

KONZERVATÍV ERŐK ÉS AZ ENERGIAMEGMRADÁS

Az energia örök gyönyörűség
William Blake

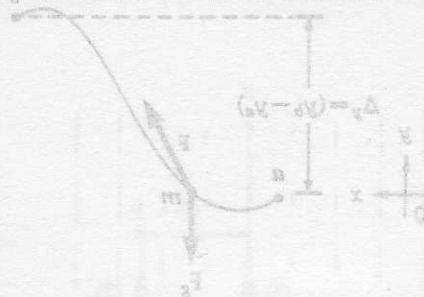
7.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a munka és az energia különböző formáit tárgyaltuk, és levezettünk egy fontos tételt, a $\Delta W = \Delta K$ munkatételt. Ebben a fejezetben tovább foglalkozunk az energia fogalmával, hogy mélyebben megértsük a természettudományok egyik legalapvetőbb tételét, az *energiamegmaradás törvényét*. Az energia megmaradása azt jelenti, hogy energiát nem lehet a semmiből teremteni, és meglévő energiát nem lehet megsemmisíteni; az energia csak átalakulhat egyik alakjából a másikba. Fizikátörténetet olvasva, meglepően hosszúnak és fáradtságosnak tűnik az út, amíg a tudomány eljutott az energia mai értelmezéséig. Széleskörű, gondos kísérletezőmunka vezetett el ahhoz a felismeréshez, hogy az energiának sok különböző alakja lehet, és hogy az energia mindig megmarad.

Az energia fogalmát megérteni nem könnyű, s ennek az az egyik oka, hogy az energia nem anyag¹; értéke a különböző körülményeknek megfelelően különbözőképpen számítható ki, tudva, hogy az energiaváltozások összege minden fizikai folyamatban zérus. A folyamatokra csak az energia egyik alakjából a másikba való átalakulás jellemző. Nincs értelme például a kinetikus vagy potenciális energiáról abszolút értelemben beszélni, hiszen értékük a vonatkoztatási rendszertől függően változhat. Érthető tehát, hogy csak több, mint két évszázados kutatás után ismerték fel, hogy ezen absztrakt mennyiségeknek – amit energiának nevezünk – az összege nem változik.

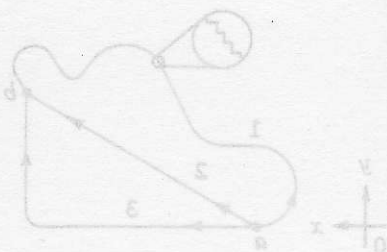
Bár az energiamegmaradás törvényét axiómaként mondtuk ki, – és így nem „bizonyítható”, – oly erősen hisszük, hogy igaz, hogy ha valamilyen folyamatban úgy tűnik, mintha az energia megmaradásának az elve nem érvényesülne, akkor új energiafajtát vezetünk be, hogy a törvényt érvényben tartjuk. Például a hőenergiát és az elektromágneses tér energiáját eredetileg csak az energiamegmaradás törvényének biztosítása céljából vezették be.

¹ A természettudósok hosszú ideig azt hitték, hogy a hó súlytalan és láthatatlan folyadék – hőanyag- amelyet kalorikumnak is neveztek. A hőmérséklet növekedését, ill. csökkenését azzal magyarázták, hogy a vizsgált test hőanyagot vesz fel, ill. ad le. A hőanyagot megmaradó mennyiségnek tekintették és e megmaradási törvény segítségével sok tapasztalati tény is értelmezhető volt (lásd. a 19.4 fejezetet).



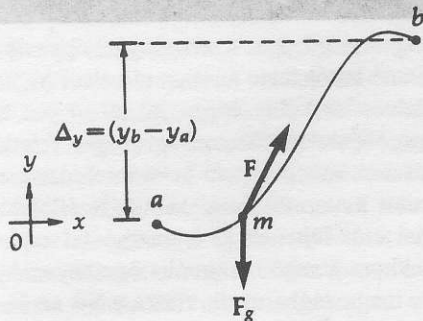
7-1 ábra

Az F_x gravitációs erő munkája az n -
től $n+1$ -ig húzódo görbevonalon a pályán,
csak az v_x – v_x magasságkülönbségtől
függ és teljesen független a két pont
közötti pálya alakjától.



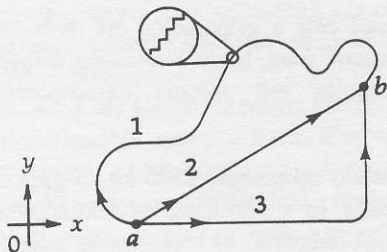
7-2 ábra

A gravitációs potenciális energia
megváltozása az n és $n+1$ közötti ter-
szögletes pályán ugyanakkora. A kín-
gyonult ivarab mutatja, hogy a gör-
bevonalt pályaszakaszok kicsiny víz-
szintes és függőleges szakaszokból
álló lépésről lépésre helyettesíthető. A
gravitációs erő csak a függőleges sza-
kaszon végez munkát. Minthogy
azonban a függőleges elmozdulások
eredője az n és $n+1$ közötti vízszleges
pályán ugyanakkora, a gravitációs erő
munkájának is ezeken a vízszleges
utakon ugyanakkorának kell lennie.



7-1 ábra

Az F_g gravitációs erő munkája az a -tól b -ig húzódó görbevonalú pályán, csak az $y_b - y_a$ magasságkülönbségtől függ és teljesen független a két pont közötti pálya alakjától.



7-2 ábra

A gravitációs potenciális energia megváltozása az a és b közötti tetszőleges pályán ugyanakkora. A kinagyított ívdarab mutatja, hogy a görbevonalú pályaszakasz kicsiny vízszintes és függőleges szakaszokból álló lépcsősorral helyettesíthető. A gravitációs erő csak a függőleges szakaszokon végez munkát. Minthogy azonban a függőleges elmozdulások eredője az a és b közötti tetszőleges pályán ugyanakkora, a gravitációs erő munkájának is ezeken a tetszőleges utakon ugyanakkorának kell lennie.

Egy másik példa erre, hogy Wolfgang Pauli 1930-ban a rádióaktív β -sugárzó anyag bomlását vizsgálva, kizárólag abból a követelményből, hogy az energia- és impulzusmegmaradás törvényének teljesülnie kell, megjósolta az egyik legérdekesebb elemi részecske, a *neutrínó* létezését. Végül 1953-ban Clyde Cowan és Frederick Reines kísérletileg is észlelték a neutrínó létezését,

Az energiamegmaradás törvénye a természettudományok leggyümölcsözőbb és legsikeresebb gondolata. Ez a hatalmas és egységes törvény, betekintést nyújt minden biológiai, kémiai és fizikai folyamatba, és a kozmológiától a részecskefizikáig minden tudományágat egymáshoz kapcsol.

7.2 Konzervatív erők

A mechanikai rendszereket vizsgálva célszerű megkülönböztetni: a *konzervatív*, és a *nem-konzervatív* erőket. Bevezetésül tekintsünk egy speciális példát a konzervatív erőre, ennek általános definícióját később adjuk meg. A *konzervatív* jelző arra utal, hogy ez az erőtípus szorosan kapcsolódik az energiamegmaradás (konzerválódás) törvényéhez.

A 7-1 ábra egy m tömegű részecske pályáját mutatja, melyre az F_g gravitációs erő mellett egy tetszőleges másik F erő is hat. Tekintsük a gravitációs erő ΔW_g munkáját, mialatt a részecske az adott pályán az a pontból a b pontba jut. Mivel az F_g gravitációs erő állandó nagyságú², függőlegesen lefelé irányuló erő, a végzett munka kiszámításához elég az elmozdulás Δy függőleges komponensével számolni:

$$\Delta W_g = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_g (\cos 180^\circ) \Delta y = -mg(y_b - y_a)$$

Látható, hogy a gravitációs potenciális energia változása éppen a gravitációs erő munkája negatív előjellel:

$$\Delta U_g = -W \tag{7-1}$$

Minden görbevonalú pályát tekinthetünk úgy is, mintha infinitezimálisan kicsiny függőleges és vízszintes szakaszok sorozata lenne, ahol a gravitációs erő csak a függőleges szakaszokon végez munkát. Így a munkavégzés nem függ a pályagörbétől csak az $(y_b - y_a)$ magasságkülönbségtől. A 7-2 ábrán látható, hogy az a és b közötti bármely görbén a gravitációs potenciális energia változása megegyezik, s így ugyanakkora a gravitációs erő munkája is. A gravitációs erő e tulajdonsága alapul szolgál a konzervatív erő egy lehetséges definíciójához:

Egy erőt konzervatívnak nevezünk, ha két pont közötti mozgás során az általa végzett munka csakis a két pont helyzetétől függ, s független a pálya alakjától. (7-2)

A gravitációs erő konzervatív erő. Visszatérve a 7-2 ábrához, vegyük észre, hogy bármelyik pályán visszafelé, b -ből a -ba haladva, a potenciális energia változása (és a gravitációs erő munkája is) ugyanaz az odafelé számított érték negatív előjellel. Ennek az a következménye, hogy a gravitációs erő munkája tetszőleges zárt görbére zérus. Például a 7-2 ábrán, ha az 1-es úton megyünk a -ból b -be, majd a 3-as úton

² Ebben a fejezetben csak a Föld közelében érvényesülő gravitációs hatásokkal foglalkozunk, ahol g állandónak tekinthető. A gravitációs erő azonban a Földtől távoli olyan tartományokban is konzervatív erő, ahol a gravitációs gyorsulás $1/r^2$ -tel arányos.

térünk vissza, akkor a gravitációs erő munkája e zárt görbére zérus. Ez a tény a konzervatív erő definiálásának egy másik módjára ad lehetőséget:

Egy erő konzervatív, ha tetszőleges zárt görbén az általa végzett munka zérus. (7-3)

Később megmutatjuk, hogy a (7-2) és a (7-3) definíció ekvivalens. Azt, hogy mikor melyiket használjuk csupán kényelmi szempontok döntenek el.

Matematikai jelölésekkel a konzervatív erő meghatározására szolgáló két egymással egyenértékű definíció a következőképpen írható fel.

Konzervatív erők esetén $\sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = [\text{állandó}]$ vagy $\sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = 0$

tetszőleges a-ből b-be vezető úton tetszőleges zárt görbére

Integrálalakban $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = [\text{ugyanaz az állandó}]$ vagy $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (7-5)

tetszőleges útra

(Az integráljelre rajzolt kör a zárt görbe mentén vett integrálra utal.)

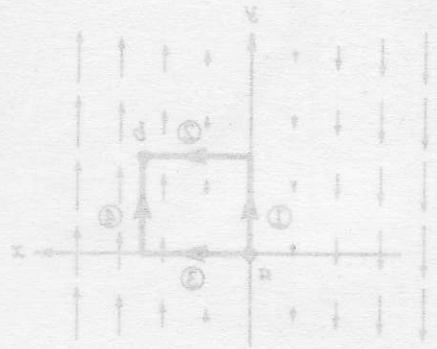
Nézzünk egy konkrét példát: tegyük fel, hogy egy testet függőlegesen földobunk. A testre ható egyetlen a gravitációs erő. Mialatt a test felemelkedik, a gravitációs erő negatív munkát végez, s ez a test potenciális energiájának növekedésével párosul. Az esésre az ellenkező igaz, a gravitációs erő pozitív munkát végez, miközben a test potenciális energiája csökken. A konzervatív erő kulcsfontosságú tulajdonsága, hogy az általa végzett munka teljes egészében mechanikai energiává alakul, (illetve a folyamat megfordításakor a tárolt energia munkavégzésre fordítódik.) A gravitációs erő tehát konzervatív erő.

Egy másik példa a konzervatív erőre az ideális rugóerő: $F_{\text{rugó}} = -kx$. Ha a rugót – nyugalmi helyzetéből x_1 távolságra megnyitjuk, akkor a rugóerő $-\frac{1}{2}kx_1^2$ negatív munkát végez. A nyugalmi helyzetbe visszatéréskor a rugóerő pontosan ugyanakkora abszolút értékű, de pozitív $+\frac{1}{2}kx_1^2$ munkát végez. A munkavégzés tetszőleges zárt görbére zérus, tehát a rugóerő konzervatív erő. *A rugó potenciális energiájának megváltozása akkora mint a rugóerő által végzett munka negatív előjellel:*

$$\Delta U_{\text{rugó}} = -\Delta W_{\text{rugó}} \quad (7-6)$$

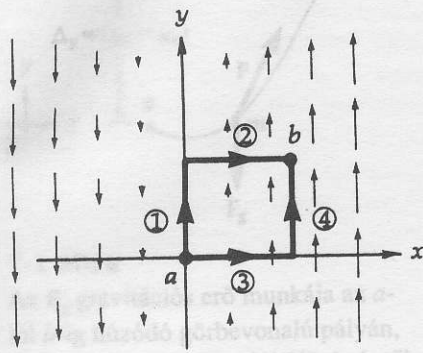
A konzervatív erőknek fontos csoportját alkotják azok az erők, amelyek nagysága csakis egy meghatározott ponttól mért távolság függvénye és csak radiális komponensük van. Az adott pontot kezdőpontnak (vagy más néven középpontnak, centrumnak) választva, s figyelembe véve, hogy az erő mindig e pont felé, vagy e centrumból sugárirányban kifelé mutat, ezeket az erőt **centrális erőknek** nevezzük. A Nap és a bolygók között ható gravitációs erő is ilyen konzervatív, centrális erő. Hasonlóképpen, az atomokban a pozitív töltésű atommag és az elektron között fellépő elektrosztatikus vonzóerő is konzervatív, centrális erő.

Ha egy zárt rendszerben csak konzervatív erők hatnak, akkor a rendszert **konzervatív rendszernek** nevezzük.



7-3 ábra

A nem-konzervatív $\mathbf{F} = ky\mathbf{j}$ erőterét grafikus képe. Képzeltben egészítsük ki az ábrát úgy, mintha a sík minden pontjában meg lenne rajzolva az erőteretnek megfelelő nagyságú és irányú erővektor. (Az erővektor mindig y irányú, nagysága azonban az adott pont x koordinjától függ.)



7-3 ábra

A nem-konzervatív $F = kx\hat{y}$ erőter grafikus képe. Képzeltben egészítsük ki az ábrát úgy, mintha a sík minden pontjában meg lenne rajzolva az erőtvörvénynek megfelelő nagyságú és irányú erővektor. (Az erővektor mindig y irányú, nagysága azonban az adott pont x koordinátájától függ.)

7.3 Nem-konzervatív erők

A leggyakoribb példa a nem-konzervatív erőre a csúszó súrlódási erő. Ha egy testet érdes (súrlódásos) pályán mozgatunk, akkor a súrlódáskor termelődő hő (termikus energia) az út hosszától is függ. A test a -ból b -be mozgatása során az f_k csúszó súrlódási erő által végzett munka különböző pályákon különböző lesz, azaz a súrlódási erő munkája *nem* független az úttól. S természetesen zárt görbére nézve a munka nem zérus, hiszen f_k mindig ellentétes a mozgás irányával, s így az általa a zárt görbén végzett (negatív) munka mindig véges, nem zérus érték. Tehát a csúszó súrlódás *nem-konzervatív* erő.

A nem-konzervatív erő másik példáját szolgáltatja az a párhuzamos erőrendszer, amelyben az erő nagysága az irányára merőleges irányban mért távolságtól függ. Ilyen erő például az xy síkban bekövetkező mozgások esetén az $F = kx\hat{y}$ erő. Az erő mindig \hat{y} irányú, azonban az x távolsággal arányos. Szemléletes képet kaphatunk erről az „erőtérrel”, ha az erővektorokat nyilacsökként sorozatával ábrázoljuk (7-3 ábra). (Próbáljuk ezt a képet gondolatban úgy kiegészíteni, hogy a sík minden pontjába az x koordinátával arányos nagyságú erőt képzelünk.) Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy ez az erőter nem konzervatív, számítsuk ki a végzett munkát az a -ból b -be vezető két különböző úton. Az ①-es szakaszon végzett munka zérus, hiszen az erő is zérus. A ②-es szakaszon végzett $F \cdot \Delta r$ munka ugyancsak zérus, mert F merőleges a Δr elmozdulásvektorra. Így a munka az ①→②-es úton zérus. A ③-as szakaszon végzett munka is zérus, hiszen F merőleges Δr -re, világos azonban, hogy a ④-es szakaszon a munka valamilyen véges, nem zérus érték. Így tehát ez az erő *nem* elégíti ki a konzervatív erő kritériumát.

Néhány erő, mint például a repülőgépekre ható légellenállás, sebességfüggő. Ezek az erők sem konzervatívak, hiszen a végzett munka *sebességfüggő*, s ez nem teljesíti azt a követelményt, miszerint két pont között végzett munka csak a végpontok helyzetétől függ. Hasonlóképpen, az időtől függő erők sem konzervatívak. Az elektromágneses indukciónál fellépő egyes erők szintén nem-konzervatív típusúak.

Általában elmondhatjuk, hogy a sebességtől vagy időtől függő erők és a súrlódási erők nem-konzervatív erők. Ezekkel a nem-konzervatív erőkkel későbbi fejezetekben fogunk foglalkozni (14., 30. és 32.), most azonban ezek közül csak a súrlódási erőről lesz szó.

7.4 Konzervatív erők és a potenciális energia

Most, hogy látjuk a különbséget a konzervatív és a nem-konzervatív erők között, részletesebben megvizsgáljuk a konzervatív rendszereket, és meghatározzuk a konzervatív erők és a potenciális energia között fennálló kapcsolatot. Megmutatjuk, hogy *minden konzervatív erőhöz létezik egy potenciális energia függvény*, valamint, hogy a potenciális energia értéke minden esetben csak a helykoordinátától függ. A következőkben a konzervatív erő és a hozzátartozó potenciális energia közötti kapcsolat megállapításával eljutunk a mechanikai rendszerek vizsgálatokor nagyon hasznos és általános mechanikai-energia-megmaradás törvényéhez.

Emlékezzünk vissza, hogy mind a gravitációs erő, mind az ideális rugóerő estén azt találtuk, hogy $\Delta U = -\Delta W$. Valóban, *minden* konzervatív, az x helykoordinátától függő F_x erőhöz létezik egy $U(x)$ *potenciálfüggvény*, melyre fennáll, hogy:

$$F(x)\Delta x = -\Delta U$$

$$\text{vagy } F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

illetve differenciális formában felírva³: $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ (7-7)

A $dU = -F(x) dx$ egyenletből kiindulva a fenti összefüggést integrál alakban is felírhatjuk. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát az $[a, b]$ intervallumon. Azt kapjuk, hogy:

$$U_b - U_a = -\int_a^b F(x) dx \quad (7-8)$$

A konzervatív erő és a hozzárendelt potenciális energia kapcsolata

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (7-9)$$

és $U_b - U_a = -\int_a^b F(x) dx$

Hasonló egyenleteket írhatunk föl az y és z koordinátákra is. *Centrális erők* esetén (16.5 fejezet), ahol az erő sugár irányú, a megfelelő koordináta a centrumtól való r távolság.

A folyamatok energetikai leírásának a dinamikaival szemben az az előnye, hogy *skalármennyiségekkel* dolgozhatunk. Ha több különböző irányú erő is hat egyszerre, akkor a *skalármennyiségekkel* sokkal egyszerűbben számolhatunk, mint az erőkre vonatkozó *vektorműveletekkel*. Továbbá, amikor kicsiny rendszerekkel, atomokkal vagy atommagokkal foglalkozunk, a rendszer energiaállapota mérésrel sokszor könnyen meghatározható, az erők azonban nem. Ezért az újabb elméleteket a fizikában majdnem minden esetben az energia segítségével fogalmazzák meg, nem pedig az erő segítségével.

Jegyezzük meg azonban, hogy egy rendszer energiája a vonatkoztatási rendszertől függően más és más lehet. Például egy nem zérus kinetikus energiájú tömegpont kinetikus energiájára egy másik, a tömegponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben zérus értéket kapunk.

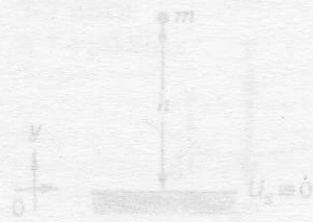
Figyeljük meg azt is, hogy a potenciális energia mindig a *teljes rendszer* tulajdonsága, s nem csupán egyetlen részecskéé. A potenciális energia kizárólag a rendszer alkotórészeinek egymáshoz képest vett elrendeződésétől függ. Igaz, néha beszélünk egy m tömegű test gravitációs potenciális energiájáról, amely ha a test y távolságra van valamilyen zérus szinttől, akkor mgy értékű. Pontosabban fogalmazva azonban azt kellene mondanunk, hogy ez a Földhöz és a tárgyhoz, mint rendszerhez tartozó potenciális energia. Ha földobunk egy labdát, a labda folyamatosan gyorsulva esik a Föld felé, miközben a Föld is gyorsulva közeledik a labda felé. Mivel azonban a Föld tömege sokkal nagyobb a labda tömegénél, ($m_{\text{labda}} \ll m_{\text{Föld}}$), a Föld mozgása elhanyagolható, s így a Föld mozgásából származó kinetikus energiát gyakorlatilag zérusnak tekintjük. Természetesen csillagászati méretű rendszerekben, ahol a tömegek összemérhetőek, (például a Föld Hold rendszer), a rendszer egészét kell vizsgálnunk, s figyelemmel kell kísérmünk minden rész mozgását. (Lásd 16. fejezet: A gravitáció)

Érdekes tulajdonsága a potenciális energiának, hogy ellentétben a könnyen kiszámítható $K = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energiával, nincs egyetlen közös formula, amellyel a potenciális energia minden fajtája megadható. Egy rend-

³ Háromdimenziós esetben, amikor U az x , y és z koordinátának is függvénye, ez az összefüggés az

$$F(r) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}\right)$$

alakat ölti, ahol a $\partial U / \partial x$ stb. kifejezések parciális deriváltak (Lásd G-V függelék). Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezést az $U(x, y, z)$ skalárfüggvény negatív gradienseként nevezzük. Más jelöléssel U gradiense a $\text{grad } u = \nabla u$



7-4 ábra
A 7-1 példához

szer potenciális energiája minden esetben részeinek egymáshoz viszonyított helyzetétől függ, akár rugókkal összekapcsolt tömegpontrendszerrel, akár gravitációs kölcsönhatás által összetartott csillagrendszerrel, vagy elektromosan töltött részecskerendszerrel van szó. A potenciális energia megváltozását, mialatt a rendszer egyik elrendeződéséből a másikba megy át, úgy kell kiszámítani, hogy a rendszert egyetlen egészként kezeljük. Mindig ki kell jelölnünk a rendszernek azt az elrendeződését, amelyhez tartozó potenciális energiát zérusnak tekintjük.

7.5 A mechanikai energia megmaradása

Most, hogy megismertük a konzervatív erő és a hozzátartozó potenciális energia között fennálló kapcsolatot, használjuk fel ezeket a fogalmakat a konzervatív rendszerekre felírt munkatétel átfogalmazására. Tekintsünk egy konzervatív rendszert, melyet a konzervatív erőtől eltekintve tökéletesen elszigeteltünk a környezetétől, – semmilyen külső erő nem hat rá. Ekkor a konzervatív erők által végzett összes munka egyenlő a rendszer potenciális energiája negatív előjelű megváltozásával.

$$\sum [\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}] = -\Delta U \quad (7-10)$$

A munkatétel szerint azonban:

$$\sum [\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}] = \Delta K \quad (7-11)$$

Összevetve a két fenti egyenletet, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} -\Delta U &= \Delta K \\ -(U - U_0) &= K - K_0 \end{aligned} \quad (7-12)$$

Átrendezve:

$$U_0 + K_0 = U + K$$

Ebből arra következtethetünk, hogy konzervatív rendszerben a teljes $E = U + K$ mechanikai energia megmarad. Ha E_0 a mechanikai energia kezdeti értéke, akkor a rendszer E energiája minden későbbi időpontban ugyanennyi lesz. Ez a konzervatív rendszerekre vonatkozó **mechanikai energia megmaradásának törvénye**.

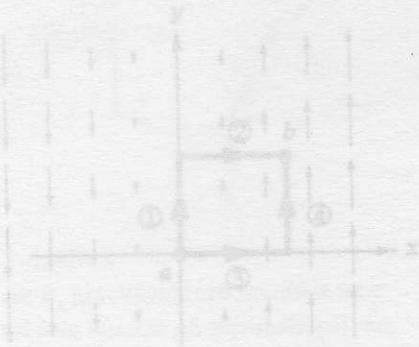
A mechanikai energia megmaradásának a törvénye (konzervatív rendszerek esetén)

$$\begin{aligned} E_0 &= E \\ U_0 + K_0 &= U + K \end{aligned} \quad (7-13)$$

Bár a tétel egyszerűnek tűnik, a konzervatív rendszerek rendkívül mély tulajdonságát fejezi ki, és ily módon nagyon hatékonyan alkalmazható a fizikai folyamatok elemzésére.

A tudományos vizsgálatokban nagyon fontos azoknak a mennyiségeknek a felkutatása, amelyek a fizikai folyamat során állandók maradnak. Ezeket a mennyiségeket *mozgásállandóknak* nevezzük. Az E összes mechanikai energia is ilyen mennyiség (feltéve, hogy olyan rendszerrel van szó, melyben csak konzervatív erők hatnak). Így a rendszerben bekövetkező folyamatától függetlenül a rendszer kezdeti energiája megegyezik a végállapot energiájával, s így *nem kell törődnünk a kölcsönhatás részleteivel*, ami jelentős egyszerűsítést jelent.

Mielőtt rátérnénk a mechanikai energia megmaradásával kapcsolatos feladatok tárgyalására, ismételjünk át néhány fontosabb részletet. A mechanikai energia kifejezés a kinetikus és a potenciális energiára utal, s kifejezet-



7-3 ábra

A nem-konzervatív $\mathbf{F} = kx\mathbf{i}$ erőter grafikus képe. Képzeltben egészítsük ki az ábrát úgy, mintha a sík minden pontjában meg lenne rajzolva az erőidörvénynek megfelelő nagyságú és irányú erővektor. (Az erővektor mindig y irányú, nagysága azonban az adott pont x koordinációjától függ.)

ten kizárja a súrlódási erő által termelt hőt, illetve bármely más nem-konzervatív erő munkáját. Az U potenciális energia mindenféle potenciális energiát magában foglal, legyen az gravitációs, rugó, elektrosztatikus, vagy egyéb más potenciális energia. A mechanikai energia megmaradásának törvényét felhasználó feladatok megoldásakor nagyon fontos kijelölnünk egy zérus konfigurációt vagy állapotot, amelyben a potenciális energiát zérusnak választjuk $U \equiv 0$. A gravitációs erőterben végzett mozgások vizsgálatakor rendszerint a feladatban szereplő legalacsonyabb szintet választjuk a zérus-energiájú szintnek. Rugó estén pedig a nyugalmi állapotot a legmegfelelőbb zérus potenciális energiájúnak kijelölni.

7-1 PÉLDA

Kezdetben nyugalomban lévő testet h magasságból a padlóra ejtünk (7-4 ábra). Határozzuk meg a test sebességét a padlóra érkezés pillanatában az energiatétel segítségével.

MEGOLDÁS

Mivel a testre csak a konzervatív gravitációs erő hat, ezért a teljes mechanikai energia $E = U + K$ állandó. Az egyszerűség kedvéért rendeljük a padló szintjéhez (a legmélyebb ponthoz) a zérus potenciális energiájú állapotot. Ezt így írhatjuk föl: $y = 0$ esetén $U_g \equiv 0$. Mivel a kezdeti és végső energia egyenlő, azt kapjuk, hogy:

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

$$mgy + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \pm\sqrt{2gh}$$

Mivel koordináta-rendszer felfelé irányítjuk, és a test lefelé esik a *negatív* előjelű sebesség a megfelelő. (A pozitív előjel azt jelentené, hogy a test az $y = 0$ koordinátájú helyen v sebességgel felfelé mozog, s ezt a sebességét az $y = h$ magasságú helyen veszíti el. Más szóval a pozitív előjel a test olyan lehetséges mozgására vonatkozik, ami a feladatban megfogalmazott mozgás előtt zajlott volna le, így nem megoldása a problémának.)

A feladatot a Newton-törvények felírásával is megoldhattuk volna:

$$\Sigma F = ma$$

$$-mg = ma$$

$$a = -g$$

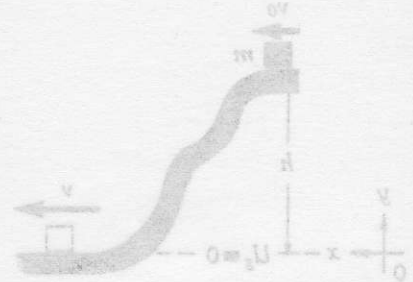
A megfelelő értékeket a kinematikai egyenletbe behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0)$$

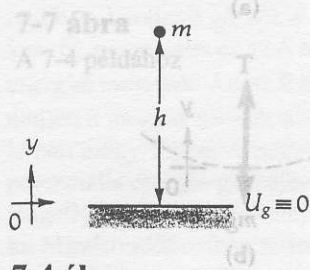
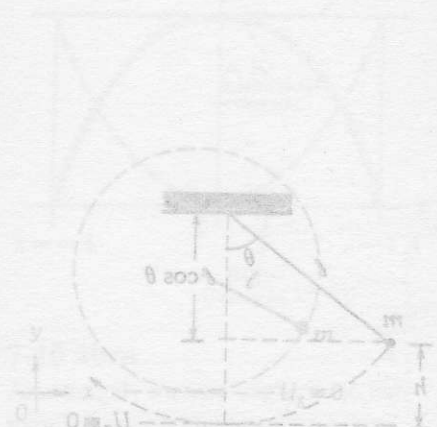
$$v^2 - 0 = 2(-g)(0 - h)$$

$$v^2 = 2gh$$

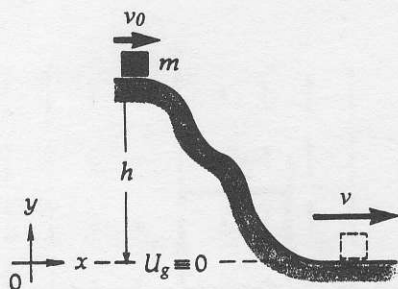
$$v = \pm\sqrt{2gh}$$



7-2 ábra
A 7-2 példához



7-4 ábra
A 7-1 példához



7-5 ábra

A 7-2 példához

Figyeljük meg, hogy ennél a feladatnál az energiamegmaradást felhasználva sokkal egyszerűbben kapjuk meg az eredményt, mint a Newton-törvények felírásával. Ez az eset általában gyakori, ha csak konzervatív erők hatnak.

7-2 PÉLDA

Egy m tömegű test v_0 kezdősebességgel csúszik le egy görbevonalú súrlódásmentes pályán, (7-5 ábra) s v sebességgel érkezik le a lejtő aljára. Milyen magasról indítottuk el a testet?

MEGOLDÁS:

Súrlódásmentes pályán a kényszererő mindig a felület normálisával egyirányú, azaz merőleges a test pillanatnyi elmozdulására. Így ez a kényszererő nem végez munkát, s az energiaátalakulásban nem játszik szerepet. A konzervatív gravitációs erő az egyetlen ható erő, így érvényes a mechanikai energiamegmaradás tétele. A zérus potenciálú állapotot a pálya aljához rendelve a következőket kapjuk:

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

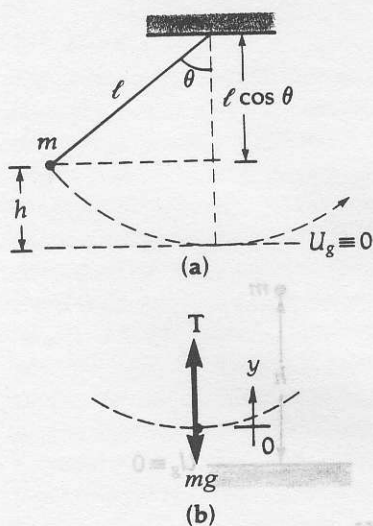
$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

innen h értéke:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$$

Megjegyzés: Gyakori hiba az ilyen típusú feladatokban a $v^2 = v_0^2 + 2ay$ kinematikai egyenlet alkalmazása, amely formálisan helyes eredményre vezet. A kinematikai megfontolás azonban most fizikailag helytelen. A test által megtett út ugyanis nem h , és a test gyorsulása sem állandó. Véssük emlékezetünkbe, hogy a kinematikai egyenlet csak egyenesvonalú, s állandó gyorsulású mozgás esetén használható.

Vegyük észre továbbá, hogy a probléma nem oldható meg a $\Sigma F = ma$ Newton-törvénnyel és a kinematikai egyenletekkel. Ehhez ugyanis a lejtő minden pontjában tudni kellene a testre ható gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponensét, amihez viszont a lejtő görbénének egyenletére lenne szükség.



7-6 ábra

A 7-3 példához

7-3 PÉLDA

Egy l hosszúságú kötéltre függesztett m tömegű ingatestet oldalra húzzunk úgy, hogy a fonál a függőlegessel θ szöget zárjon be. (7-6 ábra) Ekkor nyugalmi helyzetéből elengedjük. a) Mekkora az ingatest sebessége amikor a legmélyebben van? b) Mekkora erővel feszíti ebben a pillanatban a test a kötelet?

MEGOLDÁS

a) A lengő testen a kötelerő nem végez munkát. (Mert a kötelerő mindig merőleges a mozgás irányára) Az egyetlen erő, amely munkát végez, a gravitációs erő, s így a rendszer konzervatív, és

Érvényes a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Legyen a legalsó pont az $U \equiv 0$ potenciálú hely.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

Az ábráról látható, hogy $h = \ell - \ell \cos \theta = \ell(1 - \cos \theta)$, ezt behelyettesítve:

$$g\ell(1 - \cos \theta) = \frac{v^2}{2}$$

és innen:

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta)}$$

adódik.

- b) A kötéleben ébredő erő meghatározásához készítsünk vektorábrát (7-6b ábra), melyen a mozgás legalsó helyzetében fellépő erőket vesszük fel. A pozitív irányt válasszuk a centripetális gyorsulás irányába. A mozgáseyenlet:

$$F_y = ma_y$$

$$T - mg = m \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m \left(g + \frac{v^2}{\ell} \right) = mg + 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$T = mg(3 - 2\cos \theta)$$

7-4 PÉLDA

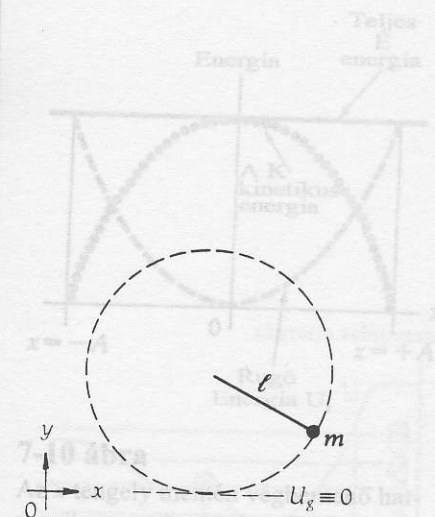
Egy m tömegű test, ℓ hosszúságú kötéltre erősítve függőleges síkú körpályán mozog (7-7 ábra). A testre a gravitációs erőn és a kötélerőn kívül semmilyen más erő nem hat. A test a körpálya legfelső pontján olyan v_f sebességgel mozog, amely elegendően nagy ahhoz, hogy a kötel mindenütt feszes maradjon⁴. Határozzuk meg a test sebességét a körpálya alsó pontjában.

MEGOLDÁS

Mivel a test mozgása mindig merőleges a kötélerőre, így a T kötélerő nem végez munkát. Az egyetlen erő, amely munkát végez, a gravitációs erő, s így alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét. Válasszuk a gravitációs potenciál értékét zérusnak a körpálya legalsó pontjában. Így:

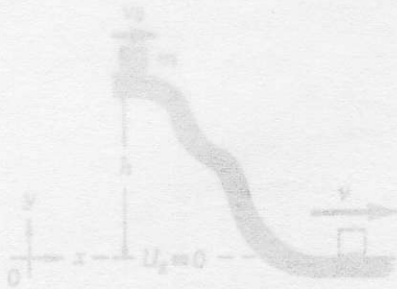
⁴ A függőleges síkú körmozgás vizsgálata alapján meggyőződhetünk arról, hogy ha a rugó a legfelső pontban feszül, akkor mindenütt feszes marad. Másképpen fogalmazva, ha a körmozgás sebességét fokozatosan csökkentjük, akkor a rugó a legfelső pontban lazul meg először. (Hasonló következtetések adódnak egy függőleges hurokban mozgó testre a pálya által kifejtett kényszererőre vonatkozóan.)

7-8 ábra
A 7-2 példához A szaggatott vo-
nallal rajzolt kör mutatja, hogy a
kivétel ugyan jól leírható a
sebesség-erő diagramon is.
A rugóerő ún. visszatérítő erő,
mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat.



7-7 ábra

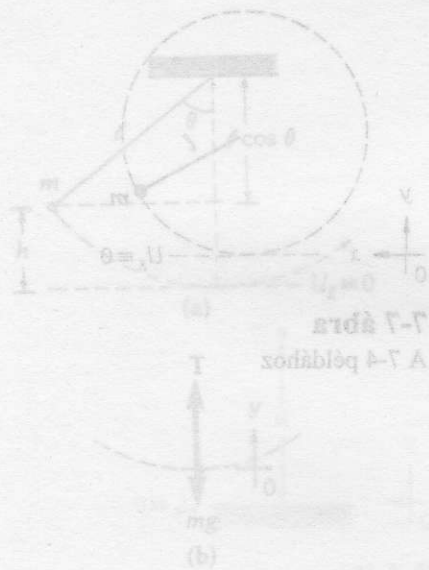
A 7-4 példához



7-5 ábra
A 7-2 példához

7-8 ábra

A 7-5 példához. A szaggatott vonallal rajzolt kör mutatja, hogy a kilövés során hol éri el maximális sebességét a golyó és ennek megfelelően hol válik el a kilövőszerkeztől.



7-6 ábra
A 7-3 példához

$$E_{fent} = E_{lent}$$

$$(U_g)_f + K_f = (U_g)_i + K_i$$

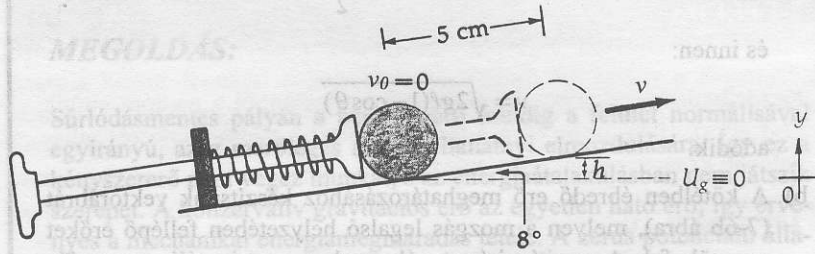
$$mg(2l) + \frac{1}{2}mv_f^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_i^2$$

és innen

$$v_f = \pm \sqrt{4gl + v_i^2}$$

adódik.

MEGOLDÁS:



7-5 PÉLDA

Egy tivolijáték automata rugós dugattyújával 100 g-os labdát lőhetünk ki. A játéktábla a vízszintessel 8°-os szöget zár be. Határozzuk meg a k rugóállandó értékét ha a dugattyú által 5 cm-nyire összenyomott rugó a dugattyú elengedésekor a labda 80 cm/s kezdősebességgel lövődik ki. Tegyük fel, hogy a dugattyú tömege és a súrlódás hatása elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A 7-8 ábra a labda függőleges elmozdulását mutatja, amíg a dugattyúval együtt mozog. Az ábráról leolvasható, hogy a labda alsó pontjának (így tömegközéppontjának is) emelkedése: $h = (5 \text{ cm}) \cdot (\sin 8^\circ) = 0,696 \text{ cm} = 6,96 \times 10^{-3} \text{ m}$. Mivel a súrlódás elhanyagolható, a rendszer konzervatívnak tekinthető, és érvényes a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Válasszuk a potenciális energia zérus-szintjének az ábrán megjelölt szintet, s legyen x a rugó összenyomásának hossza.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + (U_{rugó})_0 + K_0 = U_g + U_{rugó} + K$$

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 + 0 = mgh + 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

innen
$$k = \frac{m(2gh - v^2)}{x^2}$$

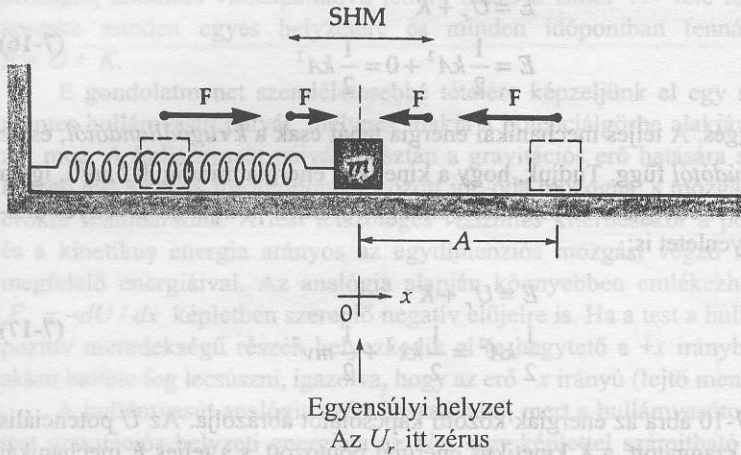
SI mértékegységben behelyettesítve az adatokat a következő eredményt kapjuk:

MEGOLDÁS

$$k = \frac{(0,1 \text{ kg}) \left[2 \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (6,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}) + \left(0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]}{(0,05 \text{ m})^2} = 31,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

7.6 Energiadiagramok

Az egydimenziós konzervatív rendszerek fizikai viselkedéséről nagyon szemléletes képet kaphatunk, ha a rendszer U potenciális energiáját az x kitérés függvényében ábrázoljuk. Ez az ábrázolás nagyon hasznos és tömör áttekintést ad, melynek tulajdonságait érdemes tanulmányozni. Két speciális eset segítségével mutatjuk be az ábrázolás előnyeit.



7-9 ábra

Egyszerű harmonikus rezgőmozgás. Az ábrán feltüntettük az $F = -kx$ rugóerőt is a test néhány helyzetében. A rugóerő ún. visszatérítő erő, mert mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat.

A 7-9 ábra egy rugóhoz erősített m tömegű testet ábrázol, mely súrlódásmentesen mozoghat egy vízszintes síkon. A rugó a Hooke-törvény szerint viselkedik. Az egyensúlyi állapotban $x = 0$ kitérésnél a rugó nyugalmi helyzetben van, s a testre ható eredő erő zérus. Ha a testet kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, és elengedjük, a test oda-vissza rezgéseket végez, és ezt **egyszerű harmonikus rezgőmozgásnak** nevezzük⁵. A fizika nagyon sok területén találkozunk rezgő, más néven oszcilláló rendszerekkel, amelyeknek mozgása az egyszerű harmonikus rezgőmozgás segítségével írható le. Néhány példa erre: az ingamozgás, a levegő molekuláinak hanghullámok keltette rezgőmozgása, vagy az órák lengőkerekének oszcillálása.

Az egyszerű harmonikus rezgőmozgás során az eredő erő a Hooke-törvénnyel ($F_r = -kx$) adható meg. Az eredő erőnek két jellegzetes tulajdonsága van:

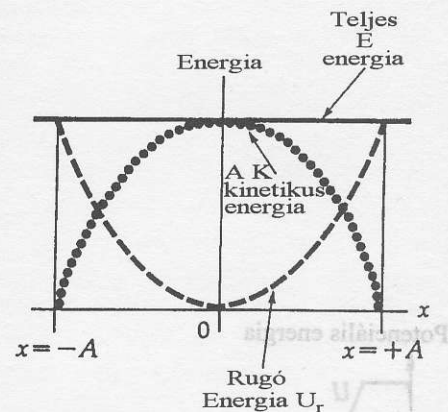
- Visszatérítő erő.** Ez azt jelenti, hogy ha a testet jobbra térítjük ki az egyensúlyi helyzetből, akkor a testre ható erő balfelé húzza vissza a testet, illetve ha balra térítjük ki, akkor a rugóerő jobbra húzza, azaz visszatéríti a testet. (A negatív előjel ezt fejezi ki.)
- Az erő az egyensúlyi helyzettől mért **kitéréssel arányos**. Az arányossági tényező k .

Az ábrán az egyszerű harmonikus rezgőmozgás az x tengely mentén az

$$F_r = -kx \quad (7-14)$$

Hooke-törvény hatására megy végbe. Az erőhöz tartozó potenciális energiafüggvény:

$$U_r = \frac{1}{2} kx^2 \quad (7-15)$$



7-10 ábra

Az x tengely mentén végbemenő harmonikus rezgőmozgás energiadiagramja. A berajzolt görbék a K kinetikus, U_r potenciális és az E teljes energiát mutatják. Adott E összenergia mellett a mozgás a $+A$ és a $-A$ pont között megy végbe. A határpontokat a potenciális energia görbéjének az x tengellyel vett metszéspontjai jelölik ki. Minden időpontban teljesül az $U_r + K = E$ összefüggés.

⁵ Az egyszerű jelző arra utal, hogy a mozgásban csak egyetlen frekvenciához tartozó rezgés szerepel, a harmonikus jelző pedig azt jelenti, hogy a kitérés matematikailag harmonikus függvénnyel (szinusz vagy koszinusz) írható le. Az egyszerű harmonikus mozgással a 15. Rezgések c. fejezetben még bővebben foglalkozunk.

A potenciális energia $U_r = 0$ szintjét a mozgás nyugalmi helyzetéhez, azaz az $x = 0$ helyhez rendeljük hozzá.

A nyugalmi helyzettől mért maximális kitérést **amplitúdónak** nevezzük, és A -val jelöljük. Az $x = \pm A$ helyeken a test pillanatnyi sebessége zérus, mivel éppen megváltozik a sebesség iránya, így ezekben a szélső helyzetekben a test kinetikus energiája zérus. Mivel nincs súrlódás, a rendszer konzervatív, és a teljes mechanikai energiára az $x = \pm A$ helyen felírható az:

$$E = U_r + K$$

$$E = \frac{1}{2} kA^2 + 0 = \frac{1}{2} kA^2 \quad (7-16)$$

összefüggés. A teljes mechanikai energia tehát csak a k rugóállandótól, és az A amplitúdótól függ. Tudjuk, hogy a kinetikus energia mindig $\frac{1}{2} mv^2$, így a mechanikai energiára felírhatunk a mozgás minden pontjában érvényes általános egyenletet is:

$$E = U_r + K$$

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 \quad (7-17)$$

A 7-10 ábra az energiák közötti kapcsolatot ábrázolja. Az U potenciális energiát szaggatott, a K kinetikus energiát pontozott, s a teljes E mechanikai energiát vastag vonal jelöli. Figyeljük meg, hogy mivel $\frac{1}{2} mv^2$ mindig pozitív, ezért az ábrán látható kinetikus energiának csak azon x -értékek esetén van fizikai jelentése, melyekre a függvénygörbe az x tengely fölött helyezkedik el. Így a test nem mehet az $x = \pm A$ határokon túl, amelyeket a mozgás **fordulópontjainak** hívunk. Ezekben a pontokban a rendszer összes mechanikai energiája potenciális energia alakjában tárolódik. Harmonikus rezgőmozgás esetén mind a potenciális, mind a kinetikus energia görbéje az egyensúlyi helyzetre szimmetrikus parabola.

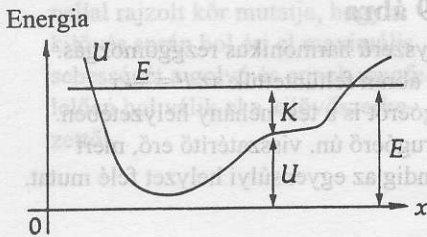
Az ábráról azt is leolvashatjuk, hogy amikor a K kinetikus energia maximális, akkor az U_r potenciális energia értéke zérus, illetve megfordítva, mikor a potenciális energia maximális, akkor a kinetikus energia zérus. Így a rendszer $E = U_r + K$ teljes energiáját kétféleképpen is kifejezhetjük:

Az összes energia: $E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$ (A maximális kinetikus energia) (7-18)

Az összes energia: $E = \frac{1}{2} kA^2$ (A maximális potenciális energia) (7-19)

Jegyezzük meg, hogy az összes energia az A amplitúdó **négyzetével** arányos.

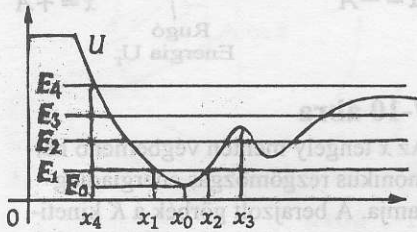
Konzervatív rendszerek esetén a potenciális energia függvényének az ábrázolása sokszor megkönnyíti a mozgás értelmezését. A 7-11 ábra mutatja, hogy adott E összenergia mellett minden pontban teljesül, hogy $E = U + K$. A 7-12 ábra egy egydimenziós, de a harmonikus rezgőmozgásnál bonyolultabb mozgást mutat be. Az összenergia különböző E értékeire a mozgás különböző tartományokra korlátozódik. A rendszer legkisebb E_0 összenergiájú állapota az, amikor a test az x_0 helyen nyugszik, s nincs kinetikus energiája, ekkor $E_0 = U$. Ha a részecskének kicsiny kinetikus energiát adunk és emiatt jobbra vagy balra kissé elmozdul, akkor a rá ható erő $F = -dU/dx$, (a görbe meredekségének **minusz egyszerűsége**) **visszatérítő erő**, amely visszahúzza a részecskét az x_0 hely felé, ezért az x_0 hely **stabilis egyenúlyi helyzet**. E_1 stabilis összenergia esetén a részecske mozgását az x_1, x_2 **fordulópontok** korlátozzák, azaz a részecske **periódikusan** oszcillál az x_1 és x_2 helyek közötti **potenciálgödörben**. A kicsit nagyobb E_2 összenergia esetén két potenciálgödör is van, amelybe a részecske befogódhat, de (külső energia hozzáadása nélkül) nem tud áthatolni a köztük levő tiltott sávon, az ún. **potenciálgáton**, melyre fennáll, hogy $U > E$. Még nagyobb E energia esetén, mely a potenciálgát legmaga-



7-11 ábra

Mindenütt: $E = U + K$

Potenciális energia



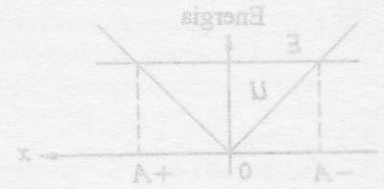
7-12 ábra

Egydimenziós mozgást végző részecske mozgása különböző nagyságú E összenergia mellett. Az U potenciális energia és a teljes energia görbék metszéspontjai jelölik ki a mozgás fordulópontjait az adott összenergia mellett. Mindig fennáll ugyanis, hogy $E = U + K$.

sabb értékével egyezik meg (nem mutatja az ábra), a részecske az x_3 helyen egyensúlyban lehet. Ez a pont azonban *instabilis egyensúlyi helyzet*, mert ha a részecskét jobbra, vagy balra kissé kizozdítjuk, akkor a részecskére ható erő méginkább távolítani igyekszik x_3 -tól. E_3 összenergiánál a részecske oda-vissza mozog a fordulópontok között, kissé lelassulva a potenciálhegyen való áthaladásakor. Végül ha a részecske energiája E_4 , akkor $V < E$ esetén a részecske szabad. A $+\infty$ -ből érkező részecske az x_4 fordulópontig tud balra mozogni, ahonnan visszapattanva jobbra haladva ismét $+\infty$ felé tart. A részecske minden egyes helyzetére és minden időpontban fennáll, hogy $E = U + K$.

E gondolatmenet szemléletesebbé tételére képzeljük el egy súrlódásmentes hullámvasút pályát, melynek alakja a potenciálgörbe alakjával egyezik meg. A hullámvasút pályán pusztán a gravitációs erő hatására szabadon mozgó test a pálya fordulópontjai között ide-oda mozog, s mozgása mindörökké fennmaradna. A test tetszőleges *vízszintes* kitérítésekor a potenciális és a kinetikus energia arányos az egydimenziós mozgást végző részecske megfelelő energiáival. Az analógia alapján könnyebben emlékezhetünk az $F_x = -dU/dx$ képletben szereplő negatív előjelre is. Ha a test a hullámvasút pozitív meredekségű részén helyezkedik el (a hegytető a $+x$ irányban van), akkor balfele fog lecsúszni, igazolva, hogy az erő $-x$ irányú (lejtő menti).

A hullámvasút analógia azért használható, mert a hullámvasúton mozgó test gravitációs helyzeti energiája az $U = mgy$ képlettel számítható ki, azaz éppúgy arányos az y magassággal, mint a potenciálfüggvény egy adott pontban vett y (energia) koordinátával. Ezen analógia használatakor azonban nem szabad elfelejtenünk, hogy a vizsgált részecske tényleges mozgása *egydimenziós* mozgás, míg az említett hullámvasút analógia kétdimenziós. Továbbá a hullámvasút pályán végighaladó test gyorsulása sem azonos az egydimenziós részecske gyorsulásával. Így, bár az analógia szemléletes, csak körültekintéssel alkalmazható.



7-13 ábra
A 7-6 példához

7-6 PÉLDA

Egy 2 kg-os test $\pm x$ irányban mozoghat olyan erő hatására, melynek potenciális energiája $U = (6,5 \text{ J/m})|x|$, alakban írható fel, ahol x az origótól mért távolság méterben. (7-13 ábra) A test teljes energiája 10 J.
a) Állapítsuk meg milyen messzire jut el a test az origótól? b) Mekkora a test maximális sebessége?

MEGOLDÁS

a) A fordulópontban a kinetikus energia zérus. A mechanikai energia kifejezését felírva, az alábbi egyenletet kapjuk:

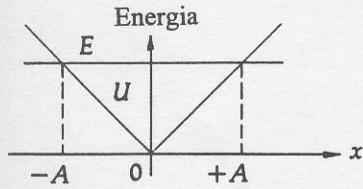
$$U + K = E$$

$$\left(6,5 \frac{\text{J}}{\text{m}}\right)(x_{\max}) + 0 = 10 \text{ J}$$

innen

$$x_{\max} = \frac{10 \text{ J}}{6,5 \frac{\text{J}}{\text{m}}} = 1,54 \text{ m}$$

b) A sebesség akkor maximális, amikor az U potenciális energia minimális (az $x = 0$ helyen). Így



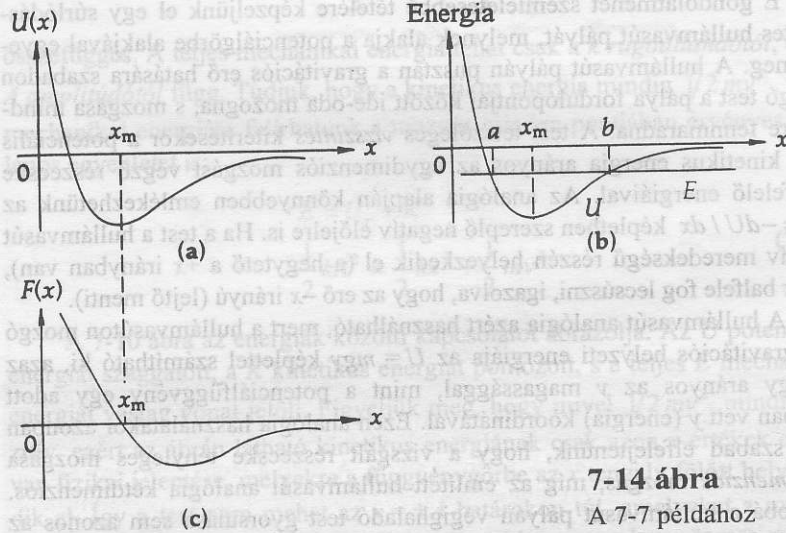
7-13 ábra
A 7-6 példához

$$U + K = E$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E$$

$$v_{\max} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} = \pm \sqrt{\frac{2(10\text{J})}{2\text{kg}}} = \pm 3,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A plusz vagy mínusz előjel azt jelenti, hogy a test mindkét irányban felveheti maximális sebességét. Mindkét érték helyes.



7-14 ábra
A 7-7 példához

7-7 PÉLDA

Egy kétatomos molekulában a potenciális energiát az alábbi függvény szerint közelíthetjük:

$$U(x) = \frac{c}{x^9} - \frac{d}{x} \tag{7-20}$$

ahol c és d állandó, és x a két atom közötti távolság. A (7-14a) ábra az $U(x)$ potenciálgörbe menetét vázolja. Az abszolút zérus hőmérséklet felett a molekula atomjai az őket összekötő egyenes mentén rezgőmozgást végeznek.⁶ Adott E energia esetén a két atom közötti távolság egy minimális a és egy maximális b érték között változik, amint ezt a 7-14b ábra mutatja. A hőmérséklet csökkenésével e rezgés tágassága kisebbé válik, s az atomok közötti távolság azon x_m érték felé tart, amelynél a molekula potenciális energiája minimális. a) Határozzuk meg az atomok közötti $F(x)$ erőt az x távolság függvényében, és ábrázoljuk a függvényt. b) Számítsuk ki az x_m távolságot.

MEGOLDÁS

a) Tudjuk, hogy az erő konzervatív, ezért:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{c}{x^9} - \frac{d}{x} \right]$$

⁶ A helyzeti energia-görbéjének aszimmetriájával magyarázható, hogy melegebbkor a legtöbb anyag tágul. Magasabb hőmérsékleteken E értéke nagyobb és időtárlagban az atomok közötti távolság is megnövekszik.

A deriválást elvégezve (magyarázat a G függelékben) az alábbi összefüggés adódik:

$$F(x) = \frac{9c}{x^{10}} - \frac{d}{x^2}$$

A függvény menete a 7-14c ábrán látható.

- b) Az x_m távolság meghatározásához vegyük észre, hogy a potenciális energia görbéjének meredeksége e pontban zérus. Így a potenciális energia deriváltjának zérushelye x_m -értékét adja meg.

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

$$\left(-\frac{9c}{x_m^{10}} + \frac{d}{x_m^2} \right) = 0$$

innen

$$x_m^8 = \frac{9c}{d}$$

$$x_m = \sqrt[8]{\frac{9c}{d}}$$

7.7 Az energiamegmaradás súrlódásos rendszerekben

Mivel a belső energia is az energia egyik alakja, ezért az energiamegmaradás tételét kiterjeszthetjük a nem-konzervatív rendszerekre is, mint például a súrlódásos rendszerekre. Zárt rendszer esetén, csupán az E , belső energiával kell kiegészítenünk az energiamegmaradást

$$E_0 = 0$$

$$\underbrace{(E_t)_0}_{\text{tegyük fel, hogy}} + \underbrace{(U_g)_0}_{\text{kezdetben zérus}} + (U_r)_0 + K_0 = \underbrace{E_t}_{f_{ix}} + U_g + U_r + K \quad (7-21)$$

A most tárgyalt esetben a belső (termikus) energia nem alakulhat vissza mechanikai energiává, ezért a kezdetben meglévő belső energia mindvégig belső energia marad. Így a kezdeti belső energia csupán egy, az egyenlet mindkét oldalához hozzáadott konstansként szerepel, amit elhagyhatunk. A kezdeti belső energiát zérusnak tekintve, a végállapot belső energiája éppen a nem-konzervatív súrlódási erő munkájának eredményeként jön létre. Bár a belső energia kezdeti értékét célszerű zérusnak tekinteni, az energiamegmaradás tételének felírásakor a szimmetria megtartása miatt célszerű az $(E_{hő})_0$ szimbólumot az egyenlet bal oldalára írni.

7-8 PÉLDA

Tekintsük a 7-2 példa 7-5 ábráját, s legyenek a lejtőn lecsúszó hullámvasút adatai a következők:

a kocsis és az utasok tömege:

$$m = 2000 \text{ kg}$$

kezdeti sebesség a lejtő tetején:

$$v_0 = 4 \text{ m/s}$$

a lejtő magassága

$$h = 10 \text{ m}$$

a) feltéve, hogy a súrlódás elhanyagolható, határozzuk meg a kocsi sebességét a lejtő alján. b) A súrlódás hatását is figyelembe véve a kocsi sebessége a lejtő alján 13,8 m/s-nak adódik. Határozzuk meg a lecsúszás közben fejlődő hőt.

MEGOLDÁS

a) Tekintsük a potenciális energia $U_g \equiv 0$ zérusszintjének a lejtő alját, helyezzük ide a koordináta-rendszer $y = 0$ helyét, s irányítsuk felfelé. A mechanikai energia megmaradásának a tételét alkalmazva az alábbiakat kapjuk:

$$E_0 = E$$

$$K_0 + (U_g)_0 = K + U_g$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

innen:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \sqrt{\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + (2)\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{m})} = 14,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Vegyük észre, hogy a test sebessége a lejtő alján valójában kisebb, mint az imént kapott érték; a „hiányzó” kinetikus energia a súrlódás miatt bekövetkező hőfejlődésben, illetve a belső energia növekedésében jelentkezik. A súrlódás okozta belső energia változását is számításba véve, az energiamegmaradásra felírt egyenlet a következő:

$$E_0 = E$$

$$(E_t)_0 + (U_g)_0 + K_0 = E_t + U_g + K$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = E_t + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

innen:

$$E_t = m \left[\frac{v_0^2 - v^2}{2} + g(h_0 - h) \right]$$

$$E_t = (2000 \text{ kg}) \left[\frac{\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(13,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} + \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{m} - 0) \right]$$

$$E_t = 2,16 \times 10^4 \text{ J}$$

A mechanikai energia megmaradásának tétele nagyon fontos útjelző volt az általános energia megmaradási tételének megfogalmazása felé vezető úton. Az $E_0 = E$ egyenlőségnek nem engedelmességet kivételes esetek felfedezése, mint például a kinetikus energia eltűnése, miközben a rendszer melegsik, ösztönzést adtak arra, hogy jobban megértsük a hő természetét, s a nem-konzervatív erők hatását. Egy teljesen új tudományág, a termodinamika született meg, amikor a belső energiát az atomi szinten tárolt kinetikus és potenciális energiaként kezdték értelmezni. Az energiamegmaradásnak a fizika minden ágára való kiterjesztésével – új energiatípusok, mint hangenergia, elektromágneses energia, atomenergia, stb. felismerésével – a fizika egyik nagy egyesítő elvéhez jutottunk el. Bár a fejlődés e téren kivételesen nehéz volt, s több mint két évszázadon keresztül birkóztak vele a legnagyobb gon-

dolködök (sokszor ellentmondásra is jutva), ma már az energiamegmaradás törvénye megkérdőjelezhetetlenül igaznak tekinthető. Energiát nem lehet a semmiből teremteni, vagy megszüntetni, az energia csak átalakulhat egyik alakjából a másikba. Ezt a mindent magában foglaló törvényt azért tudtuk kimondani, mert atomi szinten mindent visszavezettünk a kinetikus és a potenciális energiára. Úgy tűnik, hogy szubmikroszkopikus szinten az elemi részecskék között ható erők is *konzervatív erők*.

Összefoglalás

A **konzervatív erők** tulajdonságai:

- a) két pont között végzett munka független az úttól, s csak a végpontok helyzetétől függ, vagy
- b) tetszőleges zárt görbére vett munkavégzés zérus.

E két kritérium ekvivalens. A **nem-konzervatív erők** általában a súrlódással kapcsolatosak, vagy sebességtől, ill. időtől függő erők.

Ha egy rendszerben csak konzervatív erők vannak jelen, akkor a rendszert **konzervatív rendszernek** nevezzük, és ekkor bevezethetünk egy U **potenciális energiát**. Ekkor igaz a **mechanikai energia megmaradásának tétele**:

$$E_0 = E$$

$$U_0 + K_0 = U + K$$

ahol U tetszőleges potenciális energiát jelent, mint például $U_g = mgh$, és $U = 1/2 kx^2$. Mindig ki kell jelölnünk azt a helyzetet, amelyben a rendszer potenciális energiája zérus; U_g esetén ez rendszerint a problémában szerepet játszó *legmélyebb* helyzet, U esetén pedig a rugó szabad végének helye, nyugalmi állapotban.

A konzervatív F erőhöz rendelt potenciált a következőképpen határozhatjuk meg:

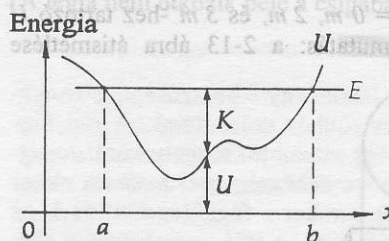
| | |
|----------------------------|---------------------------------|
| differenciálalakban | integrálalakban |
| $F = - \frac{dU}{dx}$ | $U_b - U_a = - \int_a^b F_x dx$ |

Az egydimenziós konzervatív rendszerek sok jellegzetes sajátosságának megértésében segít az **energiaábra** felrajzolása, melyen a potenciális energiát ábrázoljuk a

Kérdések

1. Határozzuk meg milyen formában tárolják az energiát az alábbi rendszerek: egy mozgó repülőgép, egy fényképezőgép vaku telepe, egy hőpölygő folyó, egy megfeszített gumiszalag, egy adag trinitro-toluol, egy szelet csokoládé, egy szikla a Mt. Everest tetején.
2. Nevezzünk meg olyan konzervatív erőt, ami nem szerepelt ebben a fejezetben.
3. Figyelembe véve, hogy a Föld, Nap és Hold között ható erők döntően gravitációs természetűek (*konzervatív erők*), mi okozza a Föld tengely körüli forgásának kinetikus energiájában bekövetkező változásokat? (tekintsük a 2-1 ábrát)

kitérés függvényében. A 7-15 ábrán vázolt potenciál-függvény által kijelölt **potenciálgödörben** az E energiájú részecske mozgása az $a \leq x \leq b$ intervallumra korlátozódik. Minden pontban $E = U + K$. A **hullámvasút analógia** segít a mozgás elképzelésében, de mindig gondolnunk kell a kétdimenziós hipotetikus hullámvasút és a részecske egydimenziós valódi mozgása közötti különbségre.



7-15 ábra
Az energiaábra

Csúszási súrlódás jelenlétekor a zárt rendszerre vonatkozó **energia megmaradásának tétele** a következő kiegészítéssel írható fel:

$$E_0 = 0$$

$$\underbrace{(E_t)_0}_{\text{tegyük fel, hogy kezdetben zérus}} + (U_g)_0 + (U_r)_0 + K_0 = \underbrace{E_t + U_g + U_r + K}_{\int_a^x}$$

Mechanikai rendszerek esetén, amint ezt e fejezetben részleteztük, a termikus energia nem alakulhat át semmiféle más energiává, ezért a kezdeti $(E_t)_0$ értéket zérusnak választhatjuk.

4. Említsünk meg egy nem konzervatív erőt a súrlódási erőn kívül.
5. Az emberi test normális hőmérséklete 37°C , s ez rendszerint melegebb, mint környezetünk hőmérséklete. Elemezzük ezen hőmérséklet fenntartáshoz szükséges energiaátalakulási folyamatokat, kezdve az anyagcsere folyamatokkal, s visszamenve végső energiaforráshoz, a Naphoz.
6. Rajzoljuk fel annak a potenciális energia-gödörnek a pályáját, amely egy, a vízszintes síkról függőlegesen visszapattanó labda mozgását korlátozza. Tekintsük az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak.

(Ábrázoljuk a potenciális energiát a vízszintes síktól mért y távolság függvényében.)

7. Rajzoljuk fel annak a potenciális energia-gödörnek a pályáját, amely egy ingatest mozgását korlátozva, midőn az a függőlegestől mért $\pm 90^\circ$ -os határok kö-

zött leng. (Legyen a potenciális energia a kötélfügőlegessel bezárt szögének függvénye.)

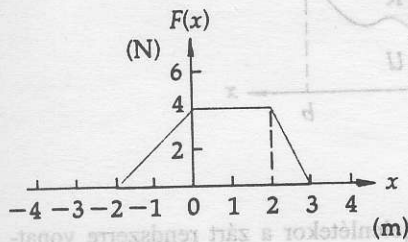
8. Írjunk le néhány energiaforrást, melynek eredete visszavezethető a Nap energiájára. Létezik-e olyan, amely nem a Naptól ered, és nincs is hatással rá a Nap?

Feladatok

7.4 Konzervatív erők és a potenciális energia

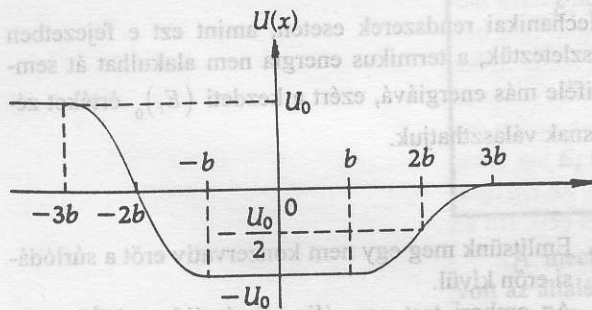
7A-1 A konzervatív $F(r)$ erő csak az origótól mért r sugárirányú távolság függvénye. A hozzátartozó potenciális energia a következő: $U(r) = C/r^2$, ahol C állandó. a) Határozzuk meg a C állandó mértékegységét SI mértékrendszerben. b) Vezessük le az $F(r)$ erő kifejezésére vonatkozó képletet.

7A-2 A 7-16 ábra az $F(x)$ konzervatív erő hatására $\pm x$ irányban mozgó részecskére ható erőt ábrázolja. Ábrázoljuk az $U(x)$ potenciális energiát az x kitérés függvényében, a $-4m < x < +4m$ intervallumban, a potenciális energia definíció szerint az $x = -4$ helyen legyen zérus. Állapítsuk meg az $x = 0$ m, 2 m, és 3 m -hez tartozó U energia értékét. (Útmutatás: a 2-13 ábra átismétlése hasznos lehet.)



7-16 ábra
A 7A-2 és 7B-14 feladathoz

7A-3 Egy rendszer potenciális energiája az $U(x) = ax^3 - bx^2$ függvénnyel adható meg. a) Vezessük le a hozzá tartozó F_x konzervatív erőre vonatkozó kifejezést. b) Az a és b konstansok segítségével fejezzük ki $F(x)$ zérushelyét (ha létezik).



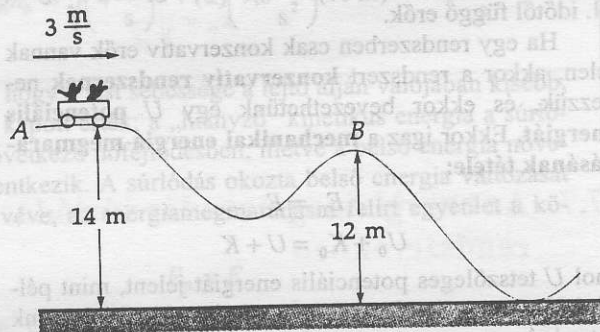
7-17 ábra
A 7B-4 feladathoz

7B-4 Egy részecske az x tengelyen pozitív és negatív irányban mozoghat. A 7-17 ábra a potenciális energia változását mutatja. A grafikon görbült részei olyan parabola ívek, amelyek az x tengely b hosszúságú szakaszaihoz tartoznak. Készítsük el a részecskére ható $F(x)$ erő változását x függvényében.

7.5 A mechanikai energia megmaradása

7A-5 Egy labdát 15 m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobunk. Az energia-megmaradásának törvényét alkalmazva határozzuk meg azt a sebességet, midőn a kiindulási helyzetéhez képest 8 m magasan van.

7A-6 A hullámvasútikocsi sebessége, amikor a kocsi a 7-18 ábrán látható A helyen van, 3 m/s a) Mekkora a kocsi sebessége a pálya B , pontján ha a súrlódás elhanyagolhatóan kicsiny? b) Mekkora az a minimális görbület a B pontban, amelynél még biztonsági öv használata nélkül sem repülnek ki az ülésről az utasok?

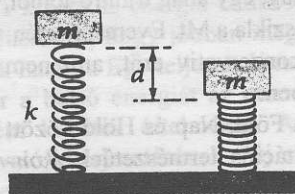


7-18 ábra
A 7A-6 feladathoz

7A-7 Egy m tömegű gyöngy súrlódásmentesen csúszik le egy olyan meghajlított dróton, amely függőleges síkú körpályát alkot. Mekkora erőt fejt ki a pálya a gyöngyre, ha a gyöngy nyugalmi helyzetből indul a körpálya legfelső pontjából és félig csúszik le a dróton.

7A-8 Egy zsinór végére erősített m tömegű labdát függőleges síkban körmozgást végez. A kör legfelső pontján a zsinórt kifeszítő erő $2mg$. Fejezzük ki mg segítségével a zsinór feszültségét abban az esetben, midőn a labda a kör legmélyebb pontján van.

7A-9 Egy zsinór végéhez erősített m tömegű labda függőleges síkban körmozgást végez. A zsinór hossza $0,60$ m. a) Határozzuk meg azt a minimális sebességet, amellyel a labdának alsó helyzetben rendelkeznie kell, hogy a zsinór a kör legfelső pontján is kifeszítve maradjon; b) Az adott feltételek mellett mekkora a zsinór feszítő ereje, midőn a labda éppen félúton van a legmélyebb és legfelső pont között?

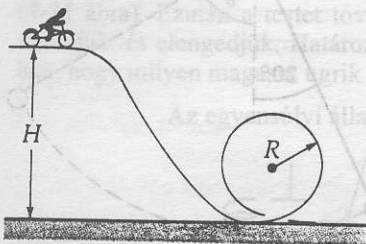


7-19 ábra
A 7A-10 feladathoz

7A-10 Egy m tömegű téglát úgy van felerősítve, hogy k rugóállandójú rugót éppen csak érinti (7-19 ábra). A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a téglát az elengedés után. (Megjegyzés: a téglát nem marad meg ebben a pontban, hanem visszalökődik és folyamatosan rezgőmozgást végez. E rezgőmozgás legalsó pontját keressük.)

7A-11 Egy m tömegű ingatest ℓ hosszúságú zsinóron leng. A lengés szélső, legmagasabb pontján a zsinór θ ($< 90^\circ$) szöget zár be a függőlegessel. Az energiátételt felhasználva ℓ , θ , és g segítségével határozzuk meg az ingatest sebességét a lengés legmélyebb pontján.

7B-12 Egy vásári akrobata kerékpáros álló helyzetből indulva súrlódásmentes pályán gurul le, amely függőleges síkú kör alakú hurokban végződik, amint ez a 7-20 ábrán látható. Határozzuk meg azt a minimális H magasságot, amely szükséges ahhoz, hogy a kerékpár minden időpontban érintkezésben maradjon a pályával. A hurkot közelítő körpálya sugara R . (Utmutatás: a hurok legfelső pontja a kritikus helyzet.)

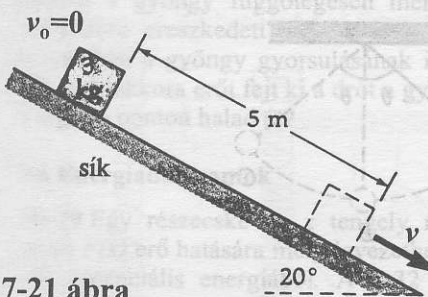


7-20 ábra

A 7B-12, 7B-26 és a 7C-44 feladathoz

7B-13 Egy 3 kg-os doboz elhanyagolható súrlódású 20° -os lejtőn csúszik le (7-21 ábra). a) Az energiátételt használva határozzuk meg a doboz sebességét 5 m csúszás után, ha a test álló helyzetből indul. b) Számítsuk ki ugyanezt a sebességet a Newton törvények és a kinematikai egyenletek felhasználásával is.

7B-14 Egy 2 kg-os tárgy a 7-16 ábrán definiált erő hatására mozog. A tárgy az $x = -1$ helyről álló helyzetből indul. Határozzuk meg a tárgy sebességét az a) $x = 0$, b) $x = 2$ m, és c) $x = 4$ m helyzetben.

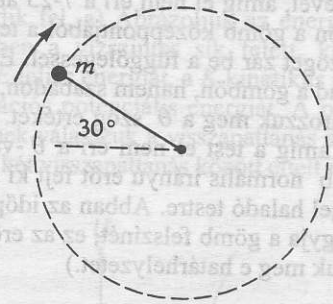


7-21 ábra

A 7B-13 és 7A-32 feladathoz

7B-15 Az $m = 80$ g tömegű kis test egy 60 cm hosszú fonatra van erősítve. A test függőleges síkú körpályán mozog. Amikor a fonal 30° -os szöget zár be a vízszintessel, akkor a test sebessége 4 m/s (7-22 ábra). a) Mekkora a test sebessége a körpálya legfelső pontján?

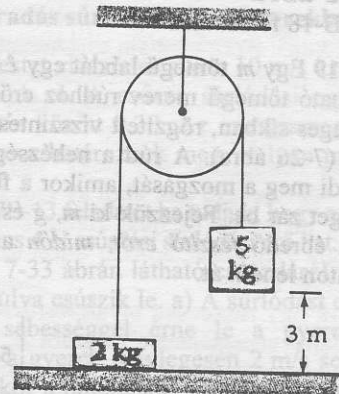
b) Mekkora erő feszíti a fonalat, midőn a test az ábrán látható helyzetben van?



7-22 ábra

A 7B-15 feladathoz

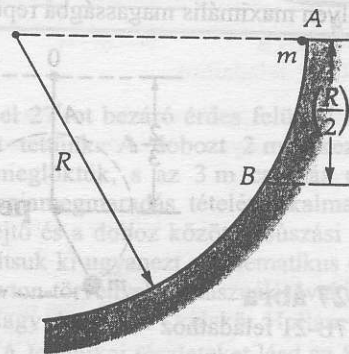
7B-16 A 7-23 ábrán látható 2 kg-os téglát a talajon nyugalmi helyzetben tartjuk, majd elengedjük. Abban a pillanatban, amikor a másik test lent nekiütődik a földnek a 2 kg-os téglát felfelé irányuló sebességet nyer. Milyen maximális magasságra emelkedik fel a 2 kg-os téglát, ha a csiga tömege és a súrlódás elhanyagolható? (A téglát nem ütközik bele a csigába.)



7-23 ábra

A 7B-16 feladathoz

7B-17 Az m tömegű részecske súrlódásmentesen csúszik le az R sugarú körpályadarabon (7-24 ábra). A részecske nyugalmi helyzetből indul az A pontból, ahol a pálya éppen függőleges. a) Mutassuk meg, hogy a részecske sebessége a B pontban (a kezdőpont alatt $R/2$ távolságban) pontosan \sqrt{gR} . b) Határozzuk meg a részecske gyorsulásának tangenciális és sugárirányú komponenseit a B ponton való áthaladáskor. c) Határozzuk meg annak az erőnek az irányát és nagyságát amit a B pontban a pálya a részecskére kifejt.

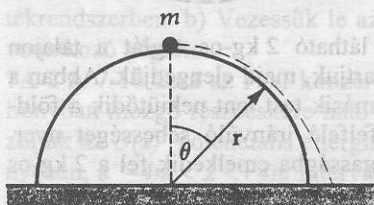


7-24 ábra

A 7B-17 feladathoz

7B-18 Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetből kissé

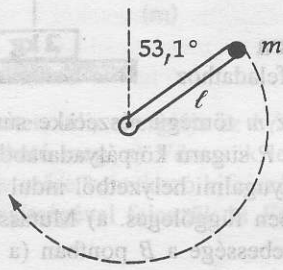
kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. A test mindaddig a érintkezésben marad a félgömb felületével, amíg el nem éri a 7-25 ábrán vázolt helyzetet, midőn a gömb középpontjából a test felé mutató vektor θ szöget zár be a függőlegessel. Ezután a test már nem marad a gömbön, hanem szabadon, parabolapályán esik. Határozzuk meg a θ szög értékét. (Útmutatás: mindaddig, amíg a test el nem éri a θ -val jelzett helyzetet, a gömb normális irányú erőt fejt ki a v pillanatnyi sebességgel haladó testre. Abban az időpontban amikor a test elhagyja a gömb felszínét, ez az erő zérussá válik. Vizsgáljuk meg e határhelyzetet.)



7-25 ábra

A 7B-18 feladathoz

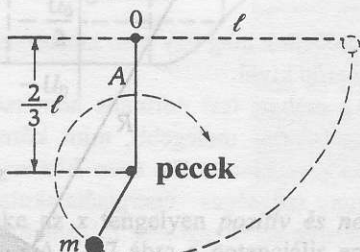
7B-19 Egy m tömegű labdát egy ℓ hosszúságú, elhanyagolható tömegű merev rúdhoz erősítettünk. A rúd függőleges síkban, rögzített vízszintes tengely körül foroghat (7-26 ábra). A rúd a nehézségi erő hatására akkor kezd meg a mozgását, amikor a függőlegessel $53,1^\circ$ -os szöget zár be. Fejezzük ki m , g és ℓ segítségével a rúdban ébredő feszítő erőt, midőn a labda a legmélyebb ponton lendül át.



7-26 ábra

A 7B-19 feladathoz

7B-20 Tekintsünk a Hooke törvény szerint viselkedő rugót, amely 15 cm hosszú és rugóállandója 8 N/m. A rugót függőleges helyzetben a földre tesszük, majd hosszúságát a felére összenyomjuk, és egy 10 g-os testet helyezünk rá. Ezután a rugót elengedve fellöjük a testet. Milyen maximális magasságba repül fel a test?



7-27 ábra

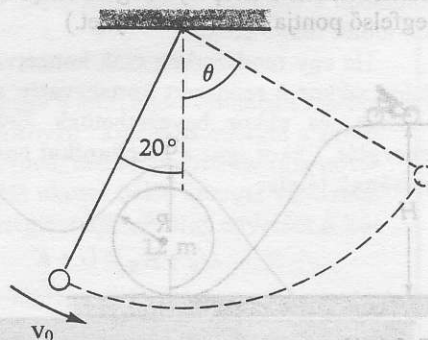
A 7B-21 feladathoz

7B-21 Egy m tömegű testet ℓ hosszúságú rugalmas kötéltre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. A 0 felfüggesztési ponttól $2/3\ell$ távolságban

kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötéllengése során beleakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $\ell/3$ sugarú függőleges körpályára tér át (7-27 ábra). Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban, ami a pöckök elérése utáni legmagasabb helye a testnek. (Feltesszük, hogy a test a mozgás során nem akad bele a kötéllengés felső szakaszába.)

7B-22 Milyen y távolságban kell elhelyezni az előző feladatban szereplő pöcköt a felfüggesztés alatt, ha azt akarjuk, hogy a kötéllengés után kialakuló kisebb sugarú körpályát tetőpontján még éppen feszes maradjon?

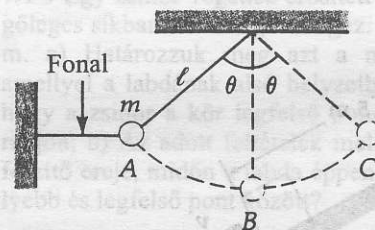
7B-23 Egy egyszerű inga egy 2 m hosszú fonalból és egy 3 kg tömegű ingatestből áll. Az ingatestet $v_0 = 2,4$ m/s kezdősebességgel elindítjuk midőn a fonal a függőlegessel 20° -os szöget zár be (7-28 ábra). Az inga ezután szabadon leng. a) Határozzuk meg a maximális θ szöget, amelyet a fonal függőlegessel bezár, midőn az inga kitérése maximális. b) Mekkora a fonal feszítő ereje, midőn az ingatest visszalendül az eredeti 20° -os helyzetébe?



7-28 ábra

A 7B-23 feladathoz

7B-24 Egy m tömegű labdát a 7-29 ábrán látható módon ℓ hosszúságú kötéllal a mennyezethez erősítettünk. A labdát az egyik oldalon az A pontban vízszintes fonallal kikötöttük úgy, hogy a felfüggesztő fonal a függőlegessel θ szöget zár be. A vízszintes kötéll elérése után a labda lengeni kezd. a) Az energiamegmaradás törvényét alkalmazva fejezzük ki a labda sebességét a pálya legmélyebb B pontjában m , ℓ , θ , és g segítségével. b) Mekkora erő feszíti a vízszintes fonalat mielőtt a fonalat azt elégejtjük? c) Mekkora a kötéll feszítő ereje a C pontban? (A lengés legtávolabbi pontja)

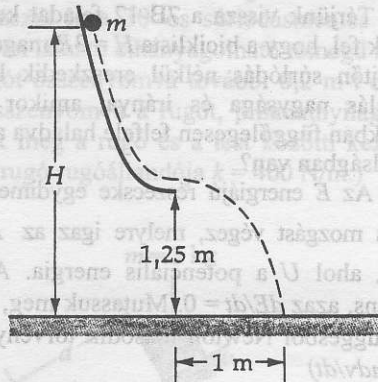


7-29 ábra

A 7B-24 feladathoz

7B-25 Egy m tömegű test kezdősebesség nélkül, súrlódásmentesen csúszik le a 7-30 ábrán látható pályán. A pálya alját a test vízszintes irányban mozogva hagyja el, s a rajzon vázolt módon ér földet. A föld színétől számítva milyen H magasságból indult a test?

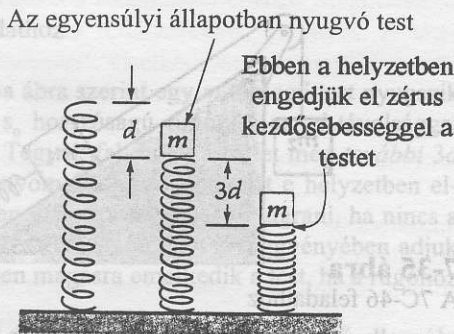
7B-26 Egy kerékpáros a 7-20 ábrán látható lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül, súrlódásmentesen gurul le. A hurok legfelső pontjában a pálya akkora erőt fejt ki, hogy az a kerékpár és a kerékpáros együttes súlyának háromszorosa. Milyen magasról indult a kerékpáros?



7-30 ábra

A 7B-25 feladathoz

7B-27 Egy m tömegű testet függőleges rugóra helyezünk, s emiatt a rugó d hosszúsággal nyomódik össze (7-31 ábra). Ezután a testet további $3d$ távolsággal lenyomjuk, és elengedjük. Határozzuk meg d függvényében, hogy milyen magasra ugrik fel a test?



7-31 ábra

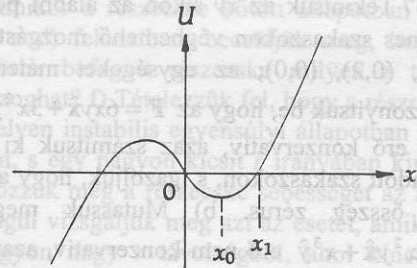
A 7B-27 feladathoz

7B-28 Könnyen hajlítható sima drótból függőleges síkú R sugarú körpályát hajlítunk, s kis gyöngyöt fűzünk fel rá. Az m tömegű gyöngyöt a körpálya tetejéről kezdősebesség nélkül indítjuk, s az súrlódásmentesen csúszik le a dróton. a) Mekkora a drót által a gyöngyre ható erő, amikor a gyöngy függőlegesen mérve R távolsággal mélyebbre ereszkedett? b) Határozzuk meg ebben a helyzetben a gyöngy gyorsulásának irányát és nagyságát. c) Mekkora erőt fejt ki a drót a gyöngyre, amikor az a legalsó ponton halad át?

7.6 Energiadiagramok

7B-29 Egy részecske az x tengely mentén mozoghat olyan $F(x)$ erő hatására mely levezethető az $U(x) = ax^3 - bx$ potenciális energiából. A 7-32 ábrán kvalitatíve vázoltuk ezt a potenciális energiát. a) Határozzuk meg az $F(x)$ erőt. b) Ha a részecske energiája zérus, akkor a részecske mozgása az $x = 0$ és az $x = x_1$ helyek közé korlátozódik. Határozzuk meg x_1 értékét! c) Mekkora ebben az esetben a részecske maximális kinetikus energiája? Az eredményeket az a és b konstansok segítségével adjuk meg!

7B-30 A nyugalmi helyzetben lévő m tömegű labdát vízszintes sík felett elengedjük. A labda tökéletesen rugalmasan ütközik, s minden visszapattnás után h magasságba emelkedik fel. a) Ábrázoljuk az energiát a távolság függvényében a vízszintes sík felett, külön-külön bemutatva az E teljes energiát, a K kinetikus energiát, és az U_g gravitációs potenciális energiát. A potenciális energia szintjének válasszuk a visszapattnás síkját. b) Határozzuk meg a két visszapattnás között eltelt időt!



7-32 ábra

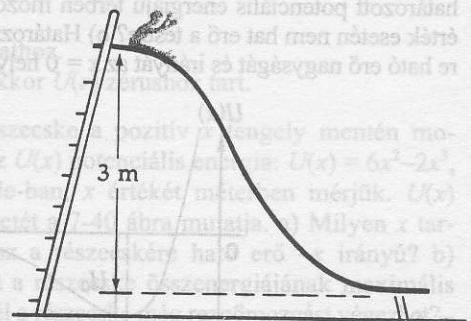
A 7B-29 feladathoz

7-7 Energiamegmaradás súrlódásos rendszerekben

7A-31 Egy 4 kg-os testet vízszintes síkon 10 m/s kezdősebességgel indítottunk el. A csúszó súrlódási együttható a test és a felszín között 0,30. Az energiamegmaradás tételét alkalmazva határozzuk meg, milyen messzire csúszik el a test!

7A-32 Oldjuk meg a 7B-13 feladatot ha tudjuk, hogy a lejtő érdes, s a testre konstans 4 N csúszási súrlódási erő hat.

7B-33 Egy gyerek a 7-33 ábrán látható csúszdáról nyugalmi helyzetből indulva csúszik le. a) A súrlódást elhanyagolva mekkora sebességgel érne le a gyerek a csúzda aljára. b) Ha a gyerek ténylegesen 2 m/s sebességgel érkezik le, akkor a potenciális energia hányadrésze alakult át a súrlódás miatt termikus energiává a lecsúszás folyamán.



7-33 ábra

A 7B-33 feladathoz

7B-34 A vízszintessel 27° -ot bezáró érdes felületű lejtő tetejére egy dobozt tettünk. A dobozt 2 m/s kezdősebességgel lefelé meglöktük, s az 3 m csúszás után megállt. a) Az energiamegmaradás tételét alkalmazva határozzuk meg a lejtő és a doboz közötti csúszási súrlódási erőt! b) Számítsuk ki ugyanezt a kinematikus összefüggések és a Newton-törvények felhasználásával is!

7B-35 A feladat a Nagy Amerikai Óriáskör Hullámvasúthoz kapcsolódik. (A technikai részleteket lásd az 5-28 ábrán.) Mekkora energia vesz el a súrlódási effektusok miatt, amikor az utasokkal teli vonat az óriáskör előtti

utolsó szakaszon a lejtő tetejéről a hurok alá járja ér? Ne felejtjük el, hogy a lejtő tetején már van kezdősebessége a hullámvasútnak.

7B-36 Az előző feladat hullámvasútjánál mekkora energia vész el a súrlódás miatt, amikor az emberekkel teli vonat a B–C–D hurkon az ábrán megjelölt sebességekkel végigszágul?

További feladatok

7C-37 Tekintsük az xy síkon az alábbi pontok közötti egyenes szakaszokon végbemenő mozgást (0,0), (3,0), (3,2), (0,2), (0,0); az egységeket méterben mérjük.

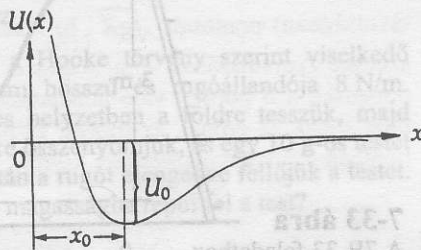
a) Bizonyítsuk be, hogy az $F = 6xy\hat{x} + 3x^2\hat{y}$ newtonban mért erő konzervatív, azaz számítsuk ki a munkát a megadott szakaszokon, s igazoljuk, hogy a zárt görbére vett összeg zérus. b) Mutassuk meg, hogy az $F = x^2y\hat{x} + x^3\hat{y}$ erő nem konzervatív, azaz az előzőleg megadott görbén végighaladva a munka nem zérus!

7C-38 A $-\pi/2$ és a $\pi/2$ intervallumban x egyes értékei szempontjából az $F(x)$ konzervatív erő viselkedése a következő: $F(x) = -k \sin x$. Ábrázoljuk az $F(x)$ erőt és a hozzá tartozó $U(x)$ potenciális energia függvényt az adott intervallumban. A potenciális energia zérusszintjét az $x = 0$ helyen jelöljük ki.

7C-39 Tételezzük fel, hogy egy test mozgására az $F = -4x + 3x^2$ erő hat, ahol az erőt newtonban, a kitérést pedig méterben mérjük. Határozzuk meg a potenciális energia változását, amikor a test az $x = 1$ m-ről az $x = 2$ m helyre kerül!

7C-40 Egy részecske olyan térrészben mozog, ahol potenciális energiája az origótól r távolsággal fordított arányban változik: $U(r) = A/r$, ahol A állandó. a) Határozzuk meg A definícióját. b) Határozzuk meg a részecskére ható erő x és y komponensét!

7C-41 Egy test az $U = a + b(x - x_0)^2$ egyenlet által meghatározott potenciális energiájú térben mozog. a) Milyen x érték esetén nem hat erő a testre? b) Határozzuk meg a testre ható erő nagyságát és irányát az $x = 0$ helyen!



7-34 ábra
A 7C-42 feladathoz

7C-42 Az egydimenziós mozgást végező m tömegű részecske olyan térrészben mozog, ahol potenciális energiája

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

(A és B állandók.)

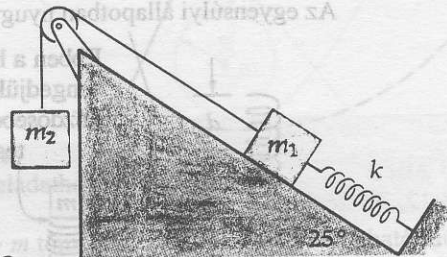
A függvény menetét a 7-34 ábra mutatja. a) Keressük meg a részecske x_0 stabilis egyensúlyi helyzetét, s fejezzük ki m , A és B segítségével! b) Határozzuk meg a potenciálgödör U_0 mélységét! c) Az x tengely mentén haladva, mekkora negatív x irányú maximális erő hat a részecskére?

7C-43 Egy részecske az $U(x) = A(1 - \cos ax)$ potenciális energiájú térben mozog. Mutassuk meg, hogy kicsiny x értékek esetén a részecskére az $F \approx -Aa^2x$ nagyságú, az $x = 0$ helyre visszatérítő erő hat! (Útmutatás: alkalmazzuk a $\cos ax$ kicsi szögek esetén érvényes közelítését.)

7C-44 Térjünk vissza a 7B-12 feladat kerékpárosához! Tegyük fel, hogy a biciklista $H = 3R$ magasságból indul, s a lejtőn súrlódás nélkül ereszkedik le. Mekkora a gyorsulás nagysága és iránya, amikor a kerékpáros a hurokban függőlegesen felfelé haladva a talajtól éppen R távolságban van?

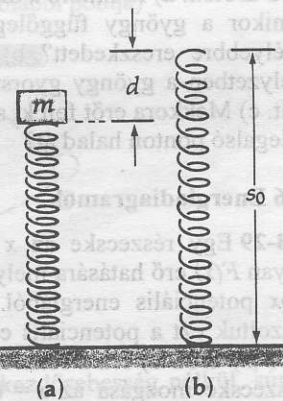
7C-45 Az E energiájú részecske egydimenziós súrlódásmentes mozgást végez, melyre igaz az $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ képlet, ahol U a potenciális energia. Az összenergia konstans, azaz $dE/dt = 0$. Mutassuk meg, hogy ebből az összefüggésből Newton második törvénye levezethető! ($F = m dv/dt$)

7C-46 A 7-35 ábrán látható $m_1 = 4$ kg és $m_2 = 5$ kg-os testet akkor engedjük el, amikor a rugó nyugalmi helyzetben van. A rugó rugóállandója $k = 80$ N/m, és a lejtő felszíne sima. A csiga tömegét és a súrlódást elhanyagolva, határozzuk meg a) milyen mélyre jut el m_2 ? b) mekkora az m_2 test pillanatnyi sebessége amikor 20 cm-t haladt?



7-35 ábra
A 7C-46 feladathoz

7C-47 Egy zsinórra erősített m tömegű labda függőleges síkban körmozgást végez. A zsinór minden időpontban feszes marad. (A sebesség a kör legfelső pontjában tetszőleges lehet, feltéve, hogy a fenti feltétel teljesül.) Bizonyítsuk be, hogy amidőn a labda a kör legmélyebb pontján van, a zsinór feszítő ereje $6mg$ értékkel haladja meg a feszítő erőt a legfelső pontban.

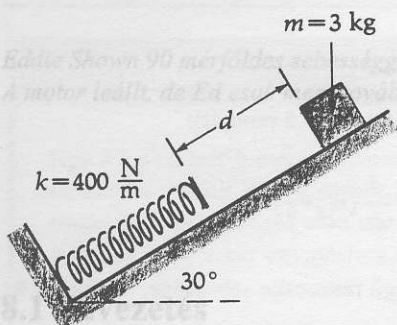


7-36 ábra
A 7C-48 feladathoz

7C-48 Az s_0 hosszúságú terheletlen rugóra m tömegű testet helyezünk, s ennek hatására a rugó d hosszúsággal össze nyomódik. (7-36 ábra) Most tegyük rá a testet a

rugóra úgy, hogy az éppen érintse a terheletlen rugót, majd engedjük el ebből a nyugalmi helyzetből. a) Mekkora a rugó d_{max} maximális összenyomódása amint a test lefelé mozog? b) Mekkora maximális sebességet ér el a test?

7C-49 Egy 3kg-os test kezdősebesség nélkül indulva d távolsággal csúszik le a 30° -os súrlódásmentes lejtőn, ahol a 7-37 ábrán látható elhanyagolható tömegű rugóba ütközik. A rugót összenyomva további 0,2 m-t csúszik lefelé, majd összenyomva a rugót, pillanatnyilag megáll. Határozzuk meg a rugó és a test közötti kezdeti d távolságot! (A rugó rugóállandója $k = 400 \text{ N/m}$.)

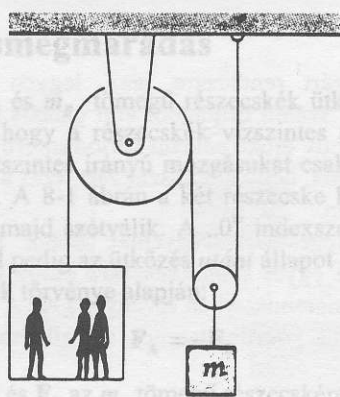


7-37 ábra

A 7C-49 feladathoz

7C-50 A 7-36a ábra szerint egy m tömegű test nyugszik az eredetileg s_0 hosszúságú rugón, s azt d távolsággal összenyomja. Tegyük fel, hogy a testet még további $3d$ távolsággal lenyomtuk. a) A rendszert e helyzetben engedve milyen magasra fog a test felugrani, ha nincs a rugóhoz rögzítve? (A eredményt d függvényében adjuk meg!) b) Milyen magasra emelkedik a test, ha a rugóhoz van erősítve?

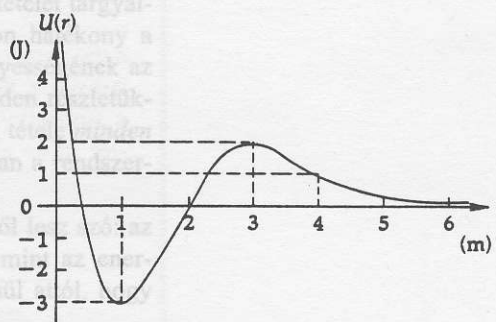
7C-51 A 7-38 ábrán egy lift és az m tömegű ellensúly látható. A lift teljes terhelésekor a lift és az utasok tömege 2000 kg, az ellensúlyé pedig 2800 kg. Tegyük fel, hogy a fékberendezés elromlik, és a lift nyugalmi helyzetből indulva süllyedni kezd, miközben az ellensúlyt megemeli. A tartó csigarendszer tömege és a súrlódási források elhanyagolhatók. a) Mekkora a lift lefelé irányuló gyorsulása? b) Mekkora a I feszítő erő a kábelben a lift zuhanása közben? (Az a) feladatban használjuk az energiátételt.)



7-38 ábra

A 7C-51 feladathoz

7C-52 A 7-39 ábrán egy 400g-os részecske $U(r)$ helyfüggő potenciális energiafüggvénye látható. a) Hol maximális a részecskére ható vonzóerő? (Vonzóerőn itt az origó felé mutató, azaz $-r$ irányú erőt értünk.) b) Hol zérus a részecskére ható eredő erő? c) Milyen r tartományban hat taszító erő a részecskére? (Taszító erőn a $+r$ irányú erőt értjük) d) Mekkora az a maximális E energia, amellyel a részecske rendelkezhet, és mozgása még mindig véges tartományra korlátozódik. e) Abban az esetben, amikor a részecske kötött állapotban van, mint például a d) feladatban, becsüljük meg, hogy a potenciálgödörbe befogott részecske milyen r tartományban mozoghat? f) Tételezzük fel, hogy a részecske az $r = 3 \text{ m}$ helyen instabilis egyensúlyi állapotban nyugalomban van, s egy nagyon kicsit r irányában kimozdítjuk. Határozzuk meg a részecske sebességét az $r = 4 \text{ m}$ helyen. Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a részecske nagyon nagy r távolságból, ahol kinetikus energiája 3 J, az origó felé tart. A következő kérdések a részecske további $-r$ irányú mozgására vonatkoznak. g) Hol a legnagyobb az origó felé tartó részecske sebessége? h) Mekkora a maximális sebesség? i) Becsüljük meg (a lehető legpontosabban), hogy az origót mennyire tudja megközelíteni a részecske?

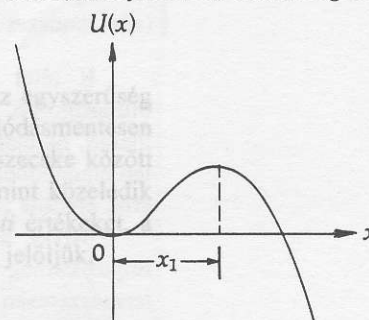


7-39 ábra

A 7C-52 feladathoz.

Ha $r \rightarrow \infty$, akkor $U(r)$ zérushoz tart.

7C-53 Egy részecske a pozitív x tengely mentén mozoghat, ahol az $U(x)$ potenciális energia: $U(x) = 6x^2 - 2x^3$, U értékét joule-ban, x értékét méterben mérjük. $U(x)$ kvalitatív menetét a 7-40 ábra mutatja. a) Milyen x tartományban lesz a részecskére ható erő $-x$ irányú? b) Mekkora lehet a részecske összenergiájának maximális értéke, amelynél a részecske még rezgőmozgást végezhet?



7-40 ábra

A 7C-53 feladathoz

- 4A-5 126 m/s
 4A-7 $2,72 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$
 4A-9 4,43 m/s
 4A-11 a) $87,0 \text{ m/s}^2$ b) 8,88g
 4B-13 a) $7,90 \times 10^5 \text{ m/s}^2$ b) $5,58 \times 10^5 \text{ m/s}^2$
 4B-15 a) 18,3 m/s b) $6,85 \times 10^4 \text{ g}$
 4B-17 $0,821 \text{ m/s}^2; 62,4^\circ$
 4B-19 a) $1,25 \text{ m/s}^2$ az út görbületi középpontja felé
 b) $-1,67 \text{ m/s}^2$
 c) $1,85 \text{ m/s}^2; 64,4^\circ$ a radiális irányhoz képest hátrafelé
 4B-21 a) $2,37 \text{ m/s}^2$ b) $4,96 \text{ m/s}^2$
 4C-23 A válasz adott.
 4C-25 $0,851 \text{ m/s}^2$ b) $5,34 \text{ m/s}^2$
 c) $5,41 \text{ m/s}^2; 9,04^\circ$ a radiális irányhoz képest hátrafelé
 4C-27 $54,4 \text{ m/s}^2$

V. Fejezet

- 5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
 d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
 5A-3 282 kg
 5A-5 a) $4,00 \text{ m/s}^2$ b) 8,00 m
 5A-7 a) 90 N b) 3 s
 5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
 5A-11 $14,8^\circ$
 5A-13 $1,63 \text{ m/s}^2$
 5B-15 a) 26,53 N b) $53,1^\circ$ a horizont alatt
 c) egyenes vonalban
 5B-17 b) 359 N
 5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
 5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
 5A-23 a) 170 N b) 170 N
 5A-25 1350 N
 5A-27 6,39 N
 5A-29 a) $0,300 \text{ m/s}^2$ b) 0,900 N
 5B-31 $t = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$
 5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
 5B-35 a) $3,33 \text{ m/s}^2$ b) 24 N c) 0,55 m/s
 5B-37 a) $4,90 \text{ m/s}^2$ b) $1,96 \text{ m/s}^2$
 5B-39 4,70 kg
 5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
 5A-43 7,00 s
 5A-45 0,364
 5A-47 0,732
 5B-49 28,7 m
 5B-51 35,25 N
 5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
 5B-55 20113 N
 5B-57 b) gR/v^2
 5B-59 A válasz adott.
 5B-61 31,4 N

- 5B-63 a) 600 N b) 1100 N
 5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
 5C-67 0,143 m
 5C-69 A válasz adott.
 5C-71 a) 1984 N b) $12,43^\circ$ c) 1448 N
 5C-73 A válasz adott.
 5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

- 6A-1 $1,8 \times 10^5 \text{ joule}$
 6A-3 270 joule
 6A-5 960 J
 6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
 6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
 6A-11 38,5 m
 6B-13 a) 60 J b) 10 J c) $7,75 \text{ m/s}$ d) $3,16 \text{ m/s}$
 6B-15 a) $2,25 \times 10^4 \text{ N}$ b) $1,33 \times 10^4 \text{ s}$
 6A-17 a) $9,75 \times 10^4 \text{ N/m}$ b) 3,12 J
 6A-19 1390 J
 6A-21 0,029 J
 6B-23 a) $6,86 \text{ m/s}^2$ b) 6,41 m/s
 6A-25 124 J
 6A-27 115 J
 6B-29 a) 980 J b) 355 J
 6B-31 $1,68 \text{ m/s}$
 6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
 6A-35 1,154 kW
 6B-37 403,2 Ft
 6A-39 12 kW
 6B-41 141 kW
 6A-43 39,2 kW
 6A-45 42,92 kW
 6B-47 35,26 kW
 6A-49 4
 6A-51 egyetlen csiga
 6B-53 $1,76 \times 10^4 \text{ N}$
 6B-55 280 N
 6C-57 22,0 J
 6C-59 a) $mg \cos\left(\frac{s}{R}\right)$ b) mgR
 6C-61 A válasz adott.
 6C-63 $\frac{k_1 l_1 + k_2 (L - l_2)}{k_1 + k_2}$
 6C-65 $9,6 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
 6C-67 0,303 m/s
 6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
 6C-71 A válasz adott.
 6C-73 242 J
 6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

- 7A-1 a) $N \cdot m^3$ b) $2C/r^3$
 7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$

- 7A-5** 8,26 m/s
7A-7 $2mg$
7A-9 a) 5,42 m/s b) $3mg$
7A-11 $\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$
7B-13 5,79 m/s
7B-15 a) 3,61 m/s b) 1,74 N
7B-17 b) $g\sqrt{3/2}$, g c) $3mg/2$, sugárirányban befelé
7B-19 4,20 mg
7B-21 mg
7B-23 a) $37,6^\circ$ b) 36,3 N
7B-25 1,45 m
7B-27 $8d$
7B-29 a) $-3ax^2 + b$ b) $\sqrt{b/a}$
 c) $\frac{2}{3}\sqrt{b^3/3a}$
7A-31 17,0 m
7B-33 a) 7,67 m/s b) 0,932
7B-35 $1,12 \times 10^5$ J
7C-37 A válasz adott.
7C-39 -1,00 J
7C-41 a) x_0 b) $2bx_0; +x$ irányban
7C-43 A válasz adott.
7C-45 A válasz adott.
7C-47 A válasz adott.
7C-49 0,344 m
7C-51 a) 0,222g b) $1,52 \times 10^4$ N
7C-53 a) $0 \leq x \leq 2$ m b) 8 J

VIII. Fejezet

- 8A-1** 1,23 m/s
8A-3 34,3 J
8A-5 10 m/s a szerelvény felé
8A-7 0,400 m/s
8B-9 7,22 m/s; $-48,4^\circ$
8B-11 $\theta = \arctg k$
8B-13 0,91 m/s $51,3^\circ$ északkeletre
8B-15 13,0 kg·m/s; $202,6^\circ$ a $+x$ iránytól az óramutató járásával egyező irányba
8B-17 A válasz adott.
8B-19 0,0466
8A-21 900 N, az eredeti sebességgel ellentétesen
8A-23 a) $1,20 \times 10^4$ kg·m/s b) $2,40 \times 10^4$ N
8B-25 6,38 N·s felfelé
8B-27 7,80 m/s
8B-29 a) $4,37 \times 10^{-4}$ s b) 0,153 m
 c) $1,22 \times 10^{-3}$ J d) $1,23 \times 10^3$ J
8B-31 a) 7,80 kg·m/s; $22,6^\circ$ a horizont fölött
 b) 3900 N; $22,6^\circ$ a horizont fölött
8A-33 200 N
8A-35 a) 1,88 N b) 3,75 N
8B-37 $4,00 \times 10^3$ N
8A-39 535 m/s

- 8B-41** a) $3,48 \times 10^6$ N b) 1659 kg/s
8C-43 a) 338 m/s b) 56,3 N
8C-45 a) $(M-m)/M$
8C-47 A válasz adott.
8C-49 $nmg \left(t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$
8C-51 0,368M

IX. Fejezet

- 9A-1** a) -0,167 m/s b) 0,333 m/s
9A-3 a) 42,9 m/s, 37° délnyugatra b) 7720 J
9A-5 Nem; 2,80 J elveszett
9B-7 a) $\sqrt{1,41}$ m/s b) 57,4 m/s c) 97,6%
9B-9 A válasz adott.
9B-11 1,81 m/s, 2,27 m/s
9A-13 0,200 m
9A-15 $\left(\frac{7}{13}m, \frac{1}{13}m \right)$
9B-17 5,35 m
9A-19 a) 30 m/s, vízszintesen b) 21,2 m/s, 45° a vízszintes alatt
9B-21 A válasz adott.
9B-23 A válasz adott.
9B-25 7,28 m/s
9B-27 a) 3,00 m/s b) 3,00 m/s
 c) 608 J és 824 J d) 0 és 216 J
9B-29 216 J
9C-31 a) $\left(\frac{M-m}{M+m} \right)$ b) ugyanaz mint a)
9C-33 $4M\sqrt{gl/m}$
9C-35 a) 65,2 m/s b) 0,458
9C-37 $\sqrt{1-d/h}$
9C-39 (1,03 m, 0,88 m)
9C-41 A válasz adott.
9C-43 $v_A = -0,667$ m/s; $v_B = 0,800$ m/s
9C-45 2,21 m/s
9C-47 a) $\frac{3}{8}v$ b) $\frac{25}{32}\mu v$
9C-49 a) $\frac{10}{30}v$ b) $\frac{11}{30}v$ (Ez a 8. fejezet 6. kérdésére adható mennyiségi válasz)

X. Fejezet

- 10A-1** a) 1,50 m b) 24,0 N·m
10A-3 a) $2bF$ b) $2bF$
10A-5 A válasz adott.
10A-7 $l/2$
10B-9 $R/12$
10B-11 $\frac{5}{16}mgl$
10A-13 2,06 m