2. Vizsgazárthelyi

2009 nyár A2

1. Adja meg az alábbi $\mathbf{R}^3$-beli vektorok által kifeszített altér egy bázisát és az összes vektor oszlopvektorait (azaz koordináta-vektorait) ebben a bázisban!

$$v_1 = (-1, 1, 0),\ v_2 = (-1, 0, -1),\ v_3 = (1, 1, 2),\ v_4 = (2, -1, 1)$$

2. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Döntse el, hogy invertálható-e $\underline{\underline{A}}^{100}$. Ha igen, határozza meg az $(\underline{\underline{A}}^{100})^{-1}$ sajátértékeit!

3. Van-e lokális minimuma és lokális maximuma az $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-0,5(x^2+y^2)}$ függvénynek a $K = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ körlapon? Ha igen, határozza meg ezek helyét és értékét!

4. Konvergensek-e a következő numerikus sorok ? **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{1}{n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{2^n}}$

5. Számítsa ki az $\mathrm{arctg}(0,5)$ értékét $0,01$ pontossaggal! (Számítását indokolja részletesen!)

6.

(a) Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges véges dimenziós lineáris tér, továbbá legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két $\mathcal{L}$-ből $\mathcal{L}$-be képező lineáris operátor. Igaz-e, hogy

(a1) $\mathbf{A}$ magtere dimenziójának és képtere dimenziójának összege megegyezik $\mathbf{B}$ magtere dimenziójának és képtere dimenziójának összegével

(a2) Ha $\mathbf{A}$ magtere azonos $\mathbf{B}$ magterével és $\mathbf{A}$ képtere azonos $\mathbf{B}$ képterével, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(b) Legyen f a síkon mindenütt értelmezett kétváltozós függvény, $a \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges. Igaz-e hogy

(b1) Ha $\mathrm{grad}\, f$ létezik az a-ban, akkor tetszőleges e egységvektor esetén f-nek létezik az e irányú iránymenti deriváltja a-ban

(b2) Ha f-nek mind x mind y szerinti parciális deriváltjai léteznek az a-ban, akkor létezik a-ban a $\mathrm{grad}\, f$ is.

(c) Legyen $a_n \ge 0$ minden n-re. Igaz-e hogy

(c1) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens és minden $n \ge 1$-re $a_n \ge b_n$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens

(c2) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $a_n < \frac{1}{n}$ elegendően nagy n-ekre (azaz valamely N esetén minden $n \ge N$-re).

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2009 nyár A2

1. Adja meg az alábbi $\mathbf{R}^3$-beli vektorok által kifeszített altér egy bázisát és az összes vektor oszlopvektorait ebben a bázisban! $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 2)$, $v_4 = (2, -1, 1)$.

MO. A vektorrendszer mátrixa: $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, **2p**

ami Gauss-elimináció után: $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **3p**

tehát $e = \{v_1, v_2\}$ bázis **2p**

és v_1, v_2, v_3, v_4 ebben a bázisban: $\underline{\underline{v_1}}_{\,e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{v_2}}_{\,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{v_3}}_{\,e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{v_4}}_{\,e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **3p**

10p

2. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Döntse el, hogy invertálható-e $\underline{\underline{A}}^{100}$. Ha igen, határozza meg az $(\underline{\underline{A}}^{100})^{-1}$ sajátértékeit!

MO. $\underline{\underline{A}}$ invertálható, mert oszlopvektorai lineárisan függetlenek **1p**

így $\underline{\underline{A}}^{100}$ is invertálható. **2p**

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (2-\lambda)(3-\lambda)$, így $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 2, 3$. **2p**

Mivel ha $\underline{v}$ sajátvektora $\underline{\underline{A}}$-nak a λ sajátértékkel, akkor $\underline{v}$ sajátvektora $\left(\underline{\underline{A}}^{100}\right)^{-1}$-nek

$\dfrac{1}{\lambda^{100}}$ sajátértékkel, **4p**

tehát sajátértékei: 2^{-100} és 3^{-100}. **1p**

10p

3. Van-e lokális minimuma és lokális maximuma az $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-0,5(x^2+y^2)}$ függvénynek a $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ körlapon? Ha igen, határozza meg ezek helyét és értékét!

MO. Polárkoordinátás helyettesítéssel: $f(r) = r^2 e^{-0,5r^2}$ a $[0, \sqrt{2}]$-ben szigorúan monoton növő (hisz $f'(r) = r(2 - r^2)e^{-0,5r^2}$). **4p**

Tehát f K–beli minimumát $r = 0$–ban, az origóban, azaz K belsejében veszi fel, ami így lokális minimum, értéke $f(0) = 0\, e^0 = 0$, **3p**

míg K–beli maximumát ott, ahol K–ban r maximum, azaz bármely olyan pontban, ahol $r^2 = x^2 + y^2 = 1$, vagyis K peremén, tehát lokális maximuma nincs K-n **3p**

10p

4. Konvergensek-e a következő numerikus sorok ? (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{1}{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{2^n}}$

MO.

(a) Konvergens mert $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n} \rightsquigarrow a_n \sim \dfrac{n}{2^n}$ **3p**

és $\exists \sum \dfrac{n}{2^n}$ pl. gyökkrit.-al. **2p**

(b) Divergens mert $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{2^n} = 1 \rightsquigarrow a_n \sim \dfrac{1}{n}$ **3p**

és $\nexists \sum \dfrac{1}{n}$ pl. integrálkrit.-al. **2p**

10p

Folytatás a következő oldalon.

5. Számítsa ki az $\operatorname{arctg}(0,5)$ értékét $0,01$ pontossággal! (Számítását indokolja részletesen!)

MO. Minthogy a $-x^2$ kvóciensű geometriai sor a $(-1,1)$-en konvergens hatványsor, így egyenletesen konvergens ennek belsejében: **2p**

$$|x| < 1 \rightsquigarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{arctg}(0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^3}{3} \rightsquigarrow \operatorname{arctg}(0,5) \approx 0,458\,,$$ **5p**

hiszen, mivel a fenti sor nyilván Leibniz tipusú, így a hiba nem nagyobb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke: $|r_n| \le |a_{n+1}| = \dfrac{0,5^{2n+1}}{2n+1} < 0,01 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow n \ge 2 \text{ hiszen } |a_3| = \frac{0,5^{2\cdot 2+1}}{2\cdot 2+1} = \frac{0,5^5}{5} \approx 0,006 < 0,01\,.$$ **3p**

10p

6.

(a) Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges véges dimenziós lineáris tér, továbbá legyen **A** és **B** két $\mathcal{L}$-ből $\mathcal{L}$-be képező lineáris operátor. Igaz-e, hogy

- **(a1)** **A** magtere dimenziójának és képtere dimenziójának összege megegyezik **B** magtere dimenziójának és képtere dimenziójának összegével
- **(a2)** Ha **A** magtere azonos **B** magterével és **A** képtere azonos **B** képterével, akkor **A** = **B**.

(b) Legyen f a síkon mindenütt értelmezett kétváltozós függvény, $a \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges. Igaz-e valamelyik állítás?

- **(b1)** Ha $\operatorname{grad} f$ létezik az a-ban, akkor tetszőleges e egységvektor esetén f-nek létezik az e irányú iránymenti deriváltja a-ban
- **(b2)** Ha f-nek mind x mind y szerinti parciális deriváltjai léteznek az a-ban, akkor létezik a-ban a $\operatorname{grad} f$ is.

(c) Igaz-e valamelyik állítás?

- **(c1)** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens és minden $n \ge 1$-re $a_n \ge b_n$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens
- **(c2)** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $a_n < \dfrac{1}{n}$ elegendően nagy n-ekre (azaz valamely N esetén minden $n \ge N$-re).

MO.

(a1) Igen: dimenziótétel miatt az összeg mindkét esetben $\dim \mathcal{L}$ **1p**

(a2) Nem: pl. **A** és **B** különböző invertálható operátorok, akkor mindkettő magtere a csak a 0-ból álló lineáris tér és mindkettő képtere az egész $\mathcal{L}$ (pl. két különböző tükrözés) **2p**

(b1) Igen, tétel: $\dfrac{\partial f}{\partial e} = \operatorname{grad} f \cdot e$ **1p**

(b2) Nem: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ mindkét parciálisa létezik és 0 az origóban, de még csak nem is folytonos ott **1p**

(c1) Nem: pl. $a_n = 1/n$, $b_n = 0$ **1p**

(c2) Nem: legyen $a_n = 0$ ha n nem 2-hatvány, egyebként pedig $1/n$.

Nos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ részletösszegeinek (s_k) sorozata konvergens, mert $s_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n$ monoton növő és felülről korlátos, hisz $s_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \le \sum_{n=1}^{f(k)} \frac{1}{2^n}$ ha $k > 1$ (ahol $f(k)$ a $\log_2 k$ egész része), mely utóbbi (mint k függvénye) nyilván konvergens, mert részletöszegeinek sorozata egy konvergens geometriai sor részletösszegeinek sorozatából származik úgy, hogy annak tagjait legfeljebb véges sokszor megismételjük **4p**

10p