INFOANALÍZIS2   5.SZIGORLAT

2016 december 14.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Írjuk fel a parciális deriváltfüggvényeket, ahol léteznek.

2. Feladat. Keressük meg az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$z = x^2 + y^2, \quad S : 2x + 3y - 4z = 0.$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy\ dx.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x},$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Írjuk fel a parciális deriváltfüggvényeket, ahol léteznek.

Megoldás. Az origó kivételével minden pontnak van olyan környezete, ahol a tört alakú képlet érvényes, így ezekben a pontokban a deriváltak formális deriválással számíthatók. $\boxed{\textbf{2p}}$
A függvény a tengelyek mentén nulla, $\boxed{\textbf{1p}}$
így a parciális deriváltak az origóban léteznek, és nullák. $\boxed{\textbf{1p}}$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \boxed{\textbf{2p}} \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \boxed{\textbf{1p}} \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \boxed{\textbf{2p}} \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \boxed{\textbf{1p}} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

---

2. Feladat. Keressük meg az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$z = x^2 + y^2, \quad S : 2x + 3y - 4z = 0.$$

Megoldás. Ezt a felületet tekinthetjük egy $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ háromváltozós függvény nullához tartozó szintfelületének, így a felület (a,b,c) pontjában az érintősík normálvektorának koordinátái $f'_x(a,b,c) = 2a$ $\boxed{\textbf{1p}}$, $f'_y(a,b,c) = 2b$ $\boxed{\textbf{1p}}$, $f'_z(a,b,c) = -1$ $\boxed{\textbf{1p}}$. Az adott sík normálvektora $\mathbf{n}_S = (2,3,-4)$ $\boxed{\textbf{1p}}$.
Ha két sík párhuzamos, normálvektoraik párhuzamosak, pl. egyik a másiknak számszorosa: $2a = \tau \cdot 2$, $2b = \tau \cdot 3$, $-1 = \tau \cdot (-4)$ $\boxed{\textbf{1p}}$. Így $\tau = \frac{1}{4}$, amiből $a = \frac{1}{4}$ $\boxed{\textbf{1p}}$, $b = \frac{3}{8}$ $\boxed{\textbf{1p}}$, és $c = (\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{8})^2 = \frac{13}{64}$ $\boxed{\textbf{1p}}$.
Két háromdimenziós vektor párhuzamosságát úgy is ellenőrizhetjük, hogy vektoriális szorzatuk a nullvektor. $(2a, 2b, -1) \times (2,3,-4) = (-8b+3, 8a-2, 6a-4b) = (0,0,0)$, és ebből ugyancsak $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{8}$ adódik.
Az érintősík egyenlete az $(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{13}{64})$ pontban $2x + 3y - 4z = \frac{13}{16}$ $\boxed{\textbf{2p}}$. $\blacksquare$

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy\, dx.$$

Megoldás. Az integrálási tartomány egy háromszög. $\boxed{\textbf{2p}}$
Az integrálás határainak felcserélésével $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx\, dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^\pi \left[\frac{x \sin y}{y}\right]_0^y dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^\pi \sin y\, dy = 2.$$

Bár az integrandus $y = 0$-ban nincs értelmezve, ez mégsem improprius integrál, mert a tartomány is és az integrandus is korlátos. $\boxed{\textbf{2p}}$ ■

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x},$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Külső rezonancia van, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

alakban keressük.

$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x},$$
$$y_p''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\textbf{2p}}$

$$(\underbrace{4A-2A-2A}_{=0})xe^{2x}+(\underbrace{4A-A}_{=3})e^{2x}=3e^{2x}.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\textbf{1p}}$

$$A=1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá}(x) &= y_h(x)+y_p(x) \\ &= c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+xe^{2x}, \quad (c_1,c_2\in\mathbf{R}). \end{aligned}$$

A kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x)=e^{2x}+2e^{-x}+xe^{2x}. \quad \blacksquare$$

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Megoldás. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor egyben abszolút konvergens is. A tagok hatványok szorzatai, ez a hányados, vagy a gyökkritérium alkalmazását sugallja.
Gyökkritériummal $\boxed{\textbf{1p}}$:

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \sqrt[n]{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} (\sqrt[n]{n})^2\frac{2}{3} \underset{\boxed{\textbf{2p}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\sqrt[n]{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\textbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$.
Hányadoskritériummal $\boxed{\textbf{1p}}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{(n+1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{2}{3} \underset{\boxed{\textbf{2p}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\frac{n+1}{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\textbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$. $\blacksquare$

5