Megoldókulcs, Valószínűségszámítás ZH

2008. november 17.

1. feladat: A kúlönbséget jelöljük k-val.

   - Lottószámok egyenletes eloszlásúak, összes eset száma $\binom{90}{5}$ (vagy az esetek valószínűsége $1/\binom{90}{5}$), valószínűség = kedvező esetek száma osztva az összes eset számával 5 p
   - Legnagyobb és legkisebb szám $90-k$ értéket vehet fel. (A: 40, B: 60) 5 p
   - További három szám $\binom{k-1}{3}$ értéket vehet fel (A: $\binom{49}{3}$, B: $\binom{29}{3}$) 5 p
   - Végeredmény: $\frac{(90-k)\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}}$ A:$\frac{40\binom{49}{3}}{\binom{90}{5}}$ B:$\frac{60\binom{29}{3}}{\binom{90}{5}}$ 5 p

   Ha valaki kicsit elrontja (pl. $k-1$ helyett k-t ir), annak adjunk az adott helyen 3 pontot.

2. feladat:

   Sűrűségfüggvény számolása (10 pont)

   - A: $Y \in (0, \sqrt{5})$ illetve B: $Y \in (0, \sqrt[3]{2})$ 2 p
   - f_Y meghatározása 8 p

     A csoport

     $$f_Y(y) = \begin{cases} 2y/5 & 0 < y < \sqrt{5} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

     B csoport

     $$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2/2 & 0 < y < \sqrt[3]{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

     Részpontok: eloszlásfüggvény 5 pont, sűrűségfüggvény 3 pont

     A csoport: $y \in (0, \sqrt{5})$-re

     $$F_Y(y) = P(Y < y) \overset{2\text{ p}}{=} P(\sqrt{5X} < y) \overset{1\text{ p}}{=} P(X < y^2/5) \overset{2\text{ p}}{=} y^2/5$$

     $$f_Y(y) \overset{1\text{ p}}{=} F'_Y(y) \overset{2\text{ p}}{=} 2y/5$$

     B csoport: $y \in (0, \sqrt[3]{2}) - re$

     $$F_Y(y) = P(Y < y) \overset{2\text{ p}}{=} P(\sqrt[3]{2X} < y) \overset{1\text{ p}}{=} P(X < y^3/2) \overset{2\text{ p}}{=} y^3/2$$

     $$f_Y(y) \overset{1\text{ p}}{=} F'_Y(y) \overset{2\text{ p}}{=} 3y^2/2$$

     Transzformációs képlet esetén a képlet felírása 3 pont, X sűrűségfüggvénye 2 pont, transzformáció invertálása 1 pont, inverz deriváltja 2 pont

   Korrelációs együttható számolása (10 pont)

   Ha valaki jól felírja a képleteket, de valamit elszámol (rosszul alakít át, hibásan másolja át a részeredményeket egyik részfeladatból a másikba, stb.), attól ne nagyon vonjunk le pontot.

- $EX = 1/2$, $\sigma^2(X) = 1/12$ 1+1 p
- $\sigma^2(Y)$ számolása 3 p
  A csoport: $\sigma^2(Y) = 5/18$ B csoport: $\sigma^2(Y) = 3\sqrt[3]{4}/80$
  - $\sigma^2(Y) = EY^2 - (EY)^2$ (1 p)
  - EY (1 p)

$$EY = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{5}} y2y/5dy = [2y^3/15]_0^{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}/3 & \text{A csoport} \\ \int_0^{\sqrt[3]{2}} y3y^2/2dy = [3y^4/8]_0^{\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{2}/4 & \text{B csoport} \end{cases}$$

  vagy például

$$EY = \begin{cases} \int_0^1 \sqrt{5x}dx = [2(5x)^3/2/15]_0^1 = 2\sqrt{5}/3 & \text{A csoport} \\ \int_0^1 \sqrt[3]{2x}dx = [3(2x)^{4/3}/8]_0^1 = 3\sqrt[3]{2}/4 & \text{B csoport} \end{cases}$$

  Általában ha valaki felírja, hogy $E[g(X)] = \int g(x)f(x)dx$, de nem sikerul ezzel semmit kiszamolnia, arra is adjunk 2 pontot.
  - EY^2 (1 p)

$$EY^2 = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{5}} y^2 2y/5dy = [y^4/10]_0^{\sqrt{5}} = 2,5 & \text{A csoport} \\ \int_0^{\sqrt[3]{2}} y^2 3y^2/2dy = [3y^5/10]_0^{\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{4}/5 & \text{B csoport} \end{cases}$$

- kovariancia számolása: 3 p
  - $E[XY]$ (1 p)

$$E[XY] = \begin{cases} E[X\sqrt{5X}] = \int_0^1 \sqrt{5}x^{3/2}dx = [2\sqrt{5}x^{5/2}/5]_0^1 = 2/\sqrt{5} & \text{A csoport} \\ E[X\sqrt[3]{2X}] = \int_0^1 \sqrt[3]{2}x^{4/3}dx = [3\sqrt[3]{2}x^{7/3}/7]_0^1 = 3\sqrt[3]{2}/7 & \text{B csoport} \end{cases}$$

  - kovariancia (2 p)

$$cov(X,Y) = E[XY] - EXEY = \begin{cases} 2/\sqrt{5} - \sqrt{5}/3 & \text{A csoport} \\ 3\sqrt[3]{2}/7 - 3\sqrt[3]{2}/8) = 3\sqrt[3]{2}/56 & \text{B csoport} \end{cases}$$

- korrelációs együttható 2 p

$$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma X \sigma Y} = \begin{cases} 2\sqrt{6}/5 \approx 0,9898 & \text{A csoport} \\ 3\sqrt{5}/7 \approx 0,9583 & \text{B csoport} \end{cases}$$

3. feladat:

- Események: B – páciens beteg, R – szűrés pozitív 1+1 p
- Adott valószínűségek helyes felírása:
  $P(R|B) = 0,98/0,95$ 1 p
  $P(R|\bar{B}) = 0,002/0,001$ 1 p
  $P(B) = 0,0001/0,0002$ 1 p
  kérdéses valószínűség $P(\bar{B}|R) =?$ 1 p

- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,9999/0,9998$ 2 p
- Bayes tétel: 10 p

$$P(B|R) = \frac{P(R|B)P(B)}{P(R|B)P(B) + P(R|\bar{B})P(\bar{B})}$$

vagy

  - $P(\bar{B}|R) = P(\bar{B}R)/P(R)$ (2 p)
  - $P(\bar{B}R) = P(R|\bar{B})P(\bar{B}) = 0,0019998/0,0009998$ (3 p)
  - $P(R) = P(R|B)P(B) + P(R|\bar{B})P(\bar{B}) = 0,0020978/0,0011898$ (5 p)
- végeredmény $P(B|R) \approx 0,95/0,84$ 2 p

Számolási hibáért max 3 p-t vonjunk le.

4. feladat:

- egy harisnya selejtes: $p = 1/1000$ illetve $1/2000$ 2 p
- kérdéses dobozok valószínűsége 5 p

$$\begin{aligned}
A : q &= P(\text{dobozban legalább egy selejtes}) = 1 - P(\text{dobozban nincs selejtes}) \\
&= 1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{200} \approx 0,18135 \\
B : q &= P(\text{dobozban legfeljebb egy selejtes}) = P(0 \text{ selejtes}) + P(1 \text{ selejtes}) \\
&= \left(\frac{1999}{2000}\right)^{100} + 100\frac{1}{2000}\left(\frac{1999}{2000}\right)^{99} = \left(\frac{1999}{2000}\right)^{99}\frac{2099}{2000} \approx 0.9988
\end{aligned}$$

Ezen belül ha valaki felírja, hogy egy dobozban a selejtesek száma $B(d,p)$ (d a harisnyák száma a dobozban), az legyen 2 p, és még egy pont, ha felírja a binomiális eloszlást.

- $X \in B(n,q)$, ahol $n = 500/1000$ a kiválasztott dobozok száma 3 p
- várható érték 5 p

$$EX = nq = 500\left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{200}\right) \approx 90,676$$

illetve

$$1000\left(\frac{1999}{2000}\right)^{99}\frac{2099}{2000} = \left(\frac{1999}{2000}\right)^{99}\frac{2099}{2} \approx 998,8$$

- szórásnégyzet 5 p

$$\sigma^2 X = nq(1-q) = 500\left(1 - \left(\frac{999}{1000}\right)^{200}\right)\left(\frac{999}{1000}\right)^{200} \approx 74,23$$

illetve

$$1000\left(\frac{1999}{2000}\right)^{99}\frac{2099}{2000}\left(1 - \left(\frac{1999}{2000}\right)^{99}\frac{2099}{2000}\right) \approx 1,196$$

$1,199$ az eredmény, ha a q közelítését helyettesíti be a képletbe.

5. feladat: paraméter λ (2 illetve 1)

- exponenciális sűrűségfüggvénye 2 p

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Ha az $x \leq 0$ részt kihagyja, akkor csak akkor vonjunk le pontot, ha rosszul is használja később ($x = 0$-ban nyilván mindegy a definíció).

- $2X \in E(\lambda/2)$ 4 p
Bizonyítás példa:

$$P(2X > t) = P(X > t/2) = e^{-\lambda t/2} = e^{-(\lambda/2)t}$$

ami a $\lambda/2$ paraméterű exponenciális eloszlás farokeloszlása.

- f_Z meghatározása 9 p
Részpontok: a számozott egyenlőségek darabonként 3 pontot érnek
A csoport:

$$\begin{aligned} f_Z(z) = f_{X-2Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{2Y}(x-z)dx && (1) \\ &= \int_{\max\{0,z\}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}(x-z)}dx && (2) \\ &= \int_{\max\{0,z\}}^{\infty} 2e^{-2x} \cdot e^{-(x-z)}dx \\ &= \frac{2}{3}e^z \int_{\max\{0,z\}}^{\infty} 3e^{-3x}dx \\ &= \frac{2}{3}e^z \cdot e^{-3\max\{0,z\}} && (3) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-2z} & z > 0 \\ \frac{2}{3}e^{z} & z \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

B csoport:

$$\begin{aligned} f_Z(z) = f_{2X-Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{2Y}(x-z)dx && (4) \\ &= \int_{\max\{0,z\}}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}x} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-z)}dx && (5) \\ &= \int_{\max\{0,z\}}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \cdot e^{-(x-z)}dx \\ &= \frac{1}{3}e^z \int_{\max\{0,z\}}^{\infty} \frac{3}{2}\lambda e^{-\frac{3}{2}\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{3}e^z \cdot e^{-\frac{3}{2}\max\{0,z\}} && (6) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z} & z > 0 \\ \frac{1}{3}e^{z} & z \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) rész 5 p

$$
\begin{aligned}
f_{|Z|}(z) &= f_Z(z) + f_Z(-z) \\
A: \quad &= \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-2z} + \frac{2}{3}e^{-z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases} \\
B: \quad &= \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{3}e^{-z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Az abszolútértékre vonatkozó képletet lehet használni. Ha valaki az (a) részt nem csinálta meg, csak felírta a (b)-re a képletet, kapjon max pontot. Levezetés esetén

$$F_{|Z|}(z) = P(|Z| < z) = P(-z < Z < z) = F_Z(z) - F_Z(-z)$$

érjen 3 pontot (akkor is, ha nincs odaírva, hogy azért igaz, mert folytonos), és az

$$f_Z(z) = F'_{|Z|}(z) = f_Z(z) + f_Z(-z)$$

legyen 2 pont.