

1. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget!

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$$

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_i)$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$!

$B = A + \bar{A} \cdot B$ és $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$, így $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$. Mivel $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$, már következik az állítás.

3. Bizonyítsa be, hogyha A és B függetlenek, akkor A és \bar{B} is függetlenek!

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) \Rightarrow \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) =$$

$$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow A, \bar{B} \text{ függetlenek.}$$

4. Bizonyítsa be, hogyha A és B függetlenek, akkor \bar{A} és \bar{B} is függetlenek!

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bar{A})(1 - \mathbf{P}(B)) =$$

$$= \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ függetlenek.}$$

5. Bizonyítsa be, ha $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$, akkor A minden eseménytől független!

Ha $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $A = \emptyset \Rightarrow$ lásd 6. kérdés.

Ha $\mathbf{P}(A) = 1$, akkor $A = \Omega \Rightarrow$ lásd 7. kérdés.

6. Bizonyítsa be, hogy a lehetetlen esemény minden eseménytől független!

$$\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \emptyset \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

7. Bizonyítsa be, hogy a biztos esemény minden eseménytől független!

$$\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(A) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \Omega \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

8. Mit nevezünk eseménytérnek?

Az eseménytér (Ω) a \mathcal{K} véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

9. Mit nevezünk elemi eseménynek?

Az elemi események (ω) a \mathcal{K} véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

10. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A + B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$!

Ez az 1. Boole-egyenlőtlenség.

$A + B = A + A \setminus B$. Ez egy diszjunkt felbontás, és $A \setminus B \subseteq A \Rightarrow \mathbf{P}(A \setminus B) \leq \mathbf{P}(A)$.

A valószínűség σ -additivitása miatt:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A \setminus B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

11. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(AB) \geq 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{B})$!

Ez a 2. Boole-egyenlőtlenség. A De Morgan azonosságból következik, hogy

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\overline{\bar{A} + \bar{B}}) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A} + \bar{B}) \geq 1 - (\mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(\bar{B}))$$

Ezt átalakítva az első Boole-egyenlőtlenséget kapjuk, tehát az állítás igaz.

12. Bizonyítsa be, hogy $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$!

Könnyen belátható, hogy $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$,

illetve hogy $P(A + B) = P(A) + P(\bar{A}B)$

Ebből már kijön, hogy $P(A + B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

13. Mi az esemény?

Az esemény elemi események halmaza, az eseménytér részhalmaza.

14. $P(A + B + C) = ?$

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

15. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!

Az A_1, A_2, \dots, A_n események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ha $\forall i, j$ -re:

- 1) $A_i \cdot A_j = \emptyset$
- 2) $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$

16. Mikor páronként független egy eseményrendszer?

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események páronként függetlenek, ha $\forall i \neq j$ -re:

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

17. Mik az axiómái az \mathcal{F} -eseményrendszernek? (A σ -algebra definíciója.)

A \mathcal{K} véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események \mathcal{F} rendszere a σ -algebra (eseményalgebra), ami kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
- 3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

18. Mikor zárja ki az A esemény a B eseményt?

Az A és B esemény egymást kizáróak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

19. Mondja ki a Bayes-tételt!

Ha $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, $P(A_i) > 0$ és $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$, akkor:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k) P(A_k)}$$

20. Definiálja az események teljes függetlenségének fogalmát!

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események teljesen függetlenek, ha $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ és $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ indexkombinációra $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$.

21. Adja meg a valószínűség axiómáit!

A valószínűség egy $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény, mely kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1) $P(\Omega) = 1$
- 2) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ páronként egymást kizárják, akkor $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

22. Mikor vonja maga után az A esemény bekövetkezése a B eseményt?

Az A esemény maga után vonja B eseményt, ha az A esemény részhalmaza a B eseménynek.
Jelölés: $A \subseteq B$

23. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik minden eseménytől független!

Az \emptyset és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek.

24. Mondja ki a Poincare-formulát!

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tetszőlegesek, akkor:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \left((-1)^{i+1} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \dots \cdot A_{j_i}) \right)$$

25. Mondja ki a folytonossági tételt!

1) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ olyan események, hogy: $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, akkor:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n).$$

2) Ha $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, akkor: $\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n)$.

26. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik független a komplementétől!

Az \emptyset és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek, és mivel ezek egymás komplementesei, ezért egymástól is.

27. Definiálja az események függetlenségének fogalmát!

Az $A, B \in \mathcal{F}$ tetszőleges események függetlenek, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

28. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(C | AB)$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(C | AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(AB)} = \mathbf{P}(ABC)$$

29. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B | \bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{A})}$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B | \bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{A})} &= \frac{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathbf{P}(A)}{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathbf{P}(A) + \frac{\mathbf{P}(\bar{A}B)}{\mathbf{P}(\bar{A})} \cdot \mathbf{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B)} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A | B) \end{aligned}$$

30. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!

Legyen $A, B \in \mathcal{F}$ olyan események, hogy A tetszőleges és $\mathbf{P}(B) > 0$. Akkor az A eseménynek a B -re vonatkoztatott feltételes valószínűségén a $\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ számot értjük.