1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen E tetszőleges halmaz. Mely $A, B \subseteq E$ halmazokra áll fenn, hogy $A \cap \overline{B} = \emptyset$ és $A \cup \overline{B} = E$? Állítását indokolja!
MO. $A = B$, mert $x \in A \rightsquigarrow x \notin \overline{B} \rightsquigarrow x \in B \rightsquigarrow x \notin \overline{B} \rightsquigarrow x \in A$, vagyis $x \in A$ iff $x \in B$.

2. Határozza meg a következő határértékeket!
a) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2}$ b) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n^3}$

MO. a) e^2, mert az $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n \longrightarrow e^2$ részsorozata.

b) ∞, mert $\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n^3} = \left(\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n\right)^{n^2} \geq 2^{n^2} \longrightarrow \infty$, hisz $\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n \longrightarrow e^3 > 2$.

3. Létezik-e, és ha igen mennyi a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \sin x \cdot \ln x$?

MO. $\sin x \cdot \ln x = \dfrac{\sin x}{x} \cdot x \ln x \longrightarrow 0$ ha $x \longrightarrow 0+$,
mert ha $x \longrightarrow 0+$, akkor $x \cdot \ln x \longrightarrow 0$ és $\dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$.

4. Egyenletesen folytonos-e a az $f(x) = x^3$ függvény az $I = (0, 1)$ intervallumon?
MO. Igen, f folytonos a $[0, 1]$ zárt intervallumon, így ezen és vele persze ennek minden részintervallumán, köztük I–n is egyenletesen folytonos.

5. Van-e gyöke az $x^{100} - 100\,x - 1 = 0$ egyenletnek és ha igen hány?
MO. Legyen $f(x) = x^{100} - 100\,x - 1$, $f'(x) = 100\,x^{99} - 100$. Ez pontosan akkor nulla, ha $x^{99} = 1$ azaz ha $x = 1$ és itt monoton növő módon vált előjelet a derivált, tehát minimuma van. A függvény a minimumhely előtt szigorúan monoton csökkenő, utána szigorúan monoton nővő és mindkét végtelenben a határéréke plusz végtelen, tehát $f(1) < 0$ és a folytonosság miatt Bolzano tétellel pontosan két gyöke van.

6. $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx = ?$

MO. Parcialis integrálással: $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1.$