7. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Mit mondhatunk az A, B halmazok viszonyáról, ha $A \cap B = A \cup B$.
MO. $A = B$, ugyanis $x \in A \rightsquigarrow x \in A \cup B \rightsquigarrow x \in A \cap B \rightsquigarrow x \in B$, vagyis $A \subseteq B$ és ugyanígy fordítva, azaz $B \subseteq A$, tehát $A = B$, **vagy:** $ab \leq a \leq a + b = ab \rightsquigarrow a = ab$ és ugyanígy fordítva, azaz $b = ab$, tehát $a = ab = b \rightsquigarrow a = b$.

2. Állapítsa meg, hogy az

$$e_1 : \ x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = -1 + t$$

és az

$$e_2 : \ x = 1 - t,\ y = 1 - 2t,\ z = -1 - t$$

egyenesek egy síkban vannak-e, és ha igen, határozza meg ezen sík egyenletét!
MO. Igen, mert a két egyenes metszi egymást a $P = (1, 1, -1)$ pontban ($x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = -1 + t,\ x = 1 - \lambda,\ y = 1 - 2\lambda,\ z = -1 - \lambda \rightsquigarrow 1 + t = 1 - \lambda,\ 1 - t = 1 - 2\lambda \rightsquigarrow t = -\lambda = -t/2, \rightsquigarrow t = \lambda = 0, \rightsquigarrow x = 1, y = 1, z = -1$). Legyen $v_1 = (1, -1, 1)$ az e_1 és $v_2 = (-1, -2, -1)$ az e_2 irányvektora. A keresett S sík normálvektora $n = v_1 \times v_2 = (3, 0, -3)$, amivel S egyenlete: $3(x - 1) - 3(z + 1) = 0 \rightsquigarrow x - z = 2$

3. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{2n} = ?$ $\quad \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[2n]{n} = ?$
MO. $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$ és csendőrelvvel $\sqrt[2n]{n}$ is 1–hez tart mert
$1 \leq \sqrt[2n]{n} \leq \sqrt[2n]{2n} \longrightarrow 1$, hiszen $\sqrt[2n]{2n}$ az $\sqrt[n]{n}$ részsorozata, **vagy** $\sqrt[2n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \sqrt{1} = 1$.

4. Az (a_n), (b_n) számsorozatokra vonatkozó alábbi következtetések közül melyik igaz és melyik nem? Válaszait indokolja!
(a) Ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens, akkor (a_n) is és (b_n) is konvergens
(b) Ha (a_n) is és (b_n) is konvergens, akkor $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens
(c) Ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens, akkor vagy (a_n) vagy (b_n) konvergens
(d) Ha (a_n) vagy (b_n) konvergens, akkor $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens
MO. (a) Nem igaz, pl. $a_n = b_n = (-1)^n$ (b) igaz, konvergencia invariáns az alapműveletekre nézve (c) nem igaz, lásd (a) (d) nem igaz, pl. $a_n = n^2$ és $b_n = \dfrac{1}{n}$, vagy $a_n = (-1)^n$ és $b_n = (1 + \dfrac{1}{n})$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = ?$
MO. Kétszer L'Hospitallal: $\dfrac{\sin x - x}{x^3} \sim \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \sim \dfrac{-\sin x}{6x} = -\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} -\dfrac{1}{6}$.

6. Ábrázolja vázlatosan az $f(x) = xe^x$ függvényt legfontosabb jellemző értékeinek feltüntetésével!

MO. $f'(x) = (x + 1)e^x$. Az ábrát lásd a túloldalon.

7. Bizonyítsa be, hogy

$$e \cdot x < e^x \quad \text{ha} \quad x > 1$$

MO. Legyen $f(x) = e \cdot x$ és $g(x) = e^x$. Ezzel $f(1) = e = g(1)$ és $f'(x) = e = e^1 < e^x = g'(x)$ ha $x > 1$, hiszen e^x szigorúan monoton növekedő, amiből a Lagrange középértéktétellel készen vagyunk. (Valóban, a tételt a $h(x) = g(x) - f(x)$ függvényre alkalmazva: ha $x > 1$, akkor valamely $c > 1$–re $\dfrac{h(x)}{x - 1} = \dfrac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(c) = g'(c) - f'(c) > 0 \rightsquigarrow h(x) > 0$.

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = ?$
MO. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{2\pi} = \pi - 0 - (0 - 0) = \pi$.