

Gyakorló feladatsor

Kalkulus

1 Lineáris algebra

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -6 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ egyenletet, majd számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e $\mathbf{A}$ -nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

2. Tekintse az

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 0 \\ -x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer! Hány ismeretlen van? Hány egyenlet? Hány érdemi egyenlet? Megoldható-e ez az egyenletrendszer?

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerhez tartozó $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ egyenletet a rendszer normál egyenletének nevezzük (mindkét oldalt beszoroztuk $\mathbf{A}^T$ -al). Írja fel a normál egyenletet és döntse el, hogy van-e megoldása!

3. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki $\det(\mathbf{A})$ -t, $\det(\mathbf{A}^T)$ -t, $\det(\mathbf{A}^{-1})$ -t, $\det(2\mathbf{A})$ -t!

2 Sorozatok

4. Bizonyítsa be a definíció szerint, hogy

a, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 7n + 1}{2n^2 + 2} = \frac{1}{2}$

b, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n + 2}{3n^2 + 1} = \infty$

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékeket!

a, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^4 - n^2 + 7 - 2n^2}$

b, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{2n-1}}{(-3)^{n-1} + 4^{n+2} + n^{1001}}$

c, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(n) + n^n}{7^{-n+1} + 2^{n-5} + n!}$

d, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2 - n + 1}$

e, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2 + n - 1}{n^4 + 1}}$

f, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n-1} \right)^{2n+1}$

g, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{n-1} \right)^{3n-1}$

h, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{3n-1} \right)^{4n}$

i, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n-1} \right)^{7n^2}$

3 Komplex számok

1. Határozza meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b, $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

c, $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

d, $\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

2. Milyen szöget zár be a $(1, -1)$ pontba mutató vektor az x tengely pozitív felével? Milyen távolságra van a pont az origótól?

3. Határozza meg a $\frac{5+2i}{3-4i}$ szám algebrai alakját!

4. Hozza algebrai alakba a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ trigonometrikus alakban adott komplex számot! Mi lesz a szám valós része? Mi lesz a képzetes része? Mi lesz az abszolút értéke? Mi lesz a szám szöge? Mi lesz a konjugáltjának algebrai alakja?
5. Számítsuk ki az $(1+i)^{2018}$ szám algebrai alakját!
6. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!
 - a, $(1+i)^2 z^2 + z + i = 0$
 - b, $9z^2 + 6z + 2 = 0$
 - c, $8z^3 = -1$
 - d, $z^4 + i - \sqrt{3} = 0$
 - e, $|z|^2 + 2\bar{z} = 1 - 2i$

4 Határérték, Folytonosság

7. Bizonyítsa be az alábbi határértékeket a megfelelő definíció felhasználásával!
 - a, $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{5-x^2} = 1$
 - b, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-7x}{-x+1} = 7$
8. Számítsa ki az alábbi határértékeket!
 - a, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 4)^2}$
 - b, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 4)^2}$
 - c, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 4)^2}$
 - d, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\tan(3x)}$
 - e, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}$
9. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\sin(x)}{x} & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{2x^2 - 6x - 8}{x^2 - 4x - 5} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

5 Deriválás

10. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját definíció szerint az $x_0 = 1$ pontban, majd írja fel itt az érintőegyenest egyenletét!

$$f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2 - x}$$

11. Hol deriválható az alábbi függvény? Számítsa ki a deriváltat minden olyan pontban ahol létezik!

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\sin(x)}{x} & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4x + 5} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

12. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

a, $(x+2)^2 \sqrt{3x^3 + x^2}$

b, $(x^4 + \cos^2(2x))^6$

c, $e^{\sinh(x)}$

d, $\cosh(x)^{\sinh(x)}$

e, $\frac{\operatorname{arsinh}(x^2)}{\arccos^2(2x)}$

13. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken! Van-e ezen függvényeknek abszolút szélsőértéke a $[0, 1]$ intervallumon? Ha igen számítsa is ki!

a, $\ln(\sqrt{x^2 - 5x + 6})$

b, $(x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

c, $x^4 + \frac{48}{x}$

14. Mekkora hibát vétünk, ha a $\sinh(0.2)$ értékét a függvény 0 körüli harmadrendű Taylor-polinom helyettesítési értékével közelítjük?

15. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x^2)}{\operatorname{arcosh}(2x^2)}$

b, $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x^2}$

- c, $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[3]{x} \ln(2x)$
d, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$
e, $\lim_{x \rightarrow 0+} \cosh(x) \frac{1}{\sinh(2x)}$
f, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{9x} - 2e^{2x}}{e^{9x} + e^{-x}}$
g, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(4x - 1)}{\cosh(2x - 5)}$

16. Legyen $f(x) = \operatorname{arsinh}(3x - 2)$. $D_f = ?$, $R_f = ?$.

Írja fel az $x = \frac{2}{3}$ pontbeli érintőegyenest!

Indokolja meg, hogy létezik $f^{-1}(x)$! $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

6 Integrálás

17. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a,

$$\int \frac{x + 3}{4x^2 + 3} dx$$

b,

$$\int \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}} dx$$

c,

$$\int \frac{2x + 1}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}} dx$$

d,

$$\int \frac{e^{2x}}{(4 + e^{2x})^3} dx$$

e,

$$\int (5x + 7) \sinh(x + 3) dx$$

f,

$$\int x^7 \ln(3x) dx$$

18. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a,

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2x) dx$$

b,

$$\int_0^{\pi} \sin^4(x) \cos(x) dx$$

c,

$$\int_1^2 |2x - 3| dx$$

19. Számítsa ki az $f(x) = x^2 - 4x$ és az $g(x) = -x^2 + 3$ görbéje közti területet!

20. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a,

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx = ?$$

Az $x = \frac{1}{2} \cosh(t)$ helyettesítéssel számolja ki!

b,

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{3x} + 1} dx = ?$$

Az $e^x = t$ helyettesítéssel számolja ki!