VIIIAB05 - Szabályozástechnika
Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó

Kiss Bálint

Irányítástechnika és Informatika Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

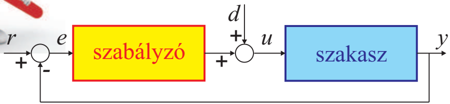
2020. március 28.

MŰEGYETEM 1782

Tartalom

1. Az előző részek tartalmából
2. Mire jó a 2DOF szabályozó?
3. Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
   - A szabályzó struktúrákról
   - A 2DOF Struktúra
   - Modellillesztés
   - Az előírt modell
   - A polinomok számítása

Az előző részek tartalmából



Ismeretek csoportosítása

1. analízis (szabályozási kör $\mapsto \{\varphi_t, BW \approx \omega_C, e(\infty), u_{max}\}$)
2. szintézis ($\{\varphi_t, BW \approx \omega_C, e(\infty), u_{max}\} \mapsto$ PID)

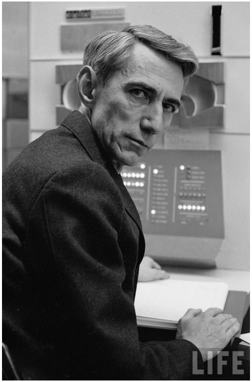
Az előző részek tartalmából

Analízis ismeretek

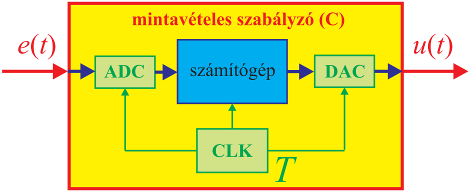
A hallgató

1. képes megfogalmazni a szabályozástechnika vizsgálódásainak tárgyát, ismeri a szabályozási kör elemeit, osztályozásának szempontjait, minőségi jellemzőit,
2. átlátja, milyen módon kapható meg egy szakasz átviteli függvénye,
3. képes meghatározni a szabályozási kör statikus tulajdonságait és a tranziensek minőségét, például a pólusok alapján,
4. tisztában van a szabályozási kör stabilitásának jelentőségével és ismeri a Nyquist- és a Bode-kritériumot,
5. ismeri a vágási frekvencia és a fázistartalék definícióját és kapcsolatukat a stabilitással,
6. képes az ideális holtidős tag leírására: e^{-st_h},

Az előző részek tartalmából



Claude Elwood Shannon, amerikai matematikus, villamosmérnök (1916-2001)



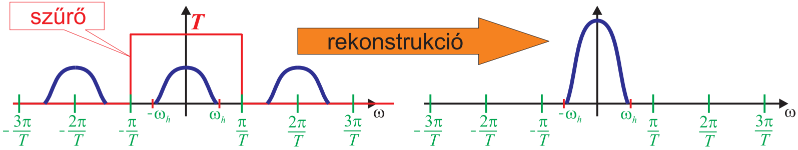
Analízis ismeretek

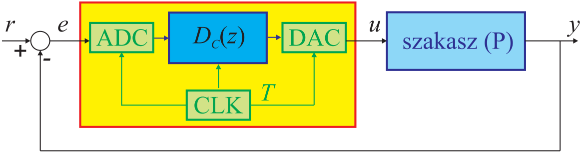
A hallgató átlátja, hogy miért van szükség mintavételezésre a szabályzó megvalósításához és ehhez milyen átalakítókra van szükség.

Az előző részek tartalmából

Analízis ismeretek

A hallgató ismeri Shannon-tétel alapján támasztott ideális követelményeket egy szabályzó mintavételes megvalósításához,

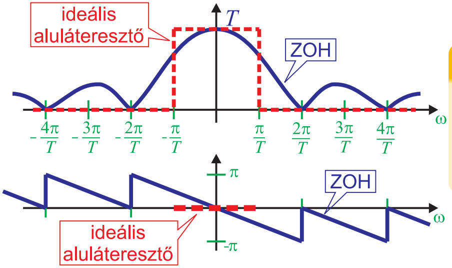




Az előző részek tartalmából

Analízis ismeretek

A hallgató ismeri az ideális aluláteresztő szűrő helyett alkalmazott kauzális tartószervek tulajdonságait és helytelen felhasználásuk akár stabilitást is veszélyeztető következményeit.



ZOH az ideális szűrő helyett

Olyan, mintha egy $\frac{T}{2}$ holtidőt tettünk volna a szabályozási körbe. Ez rontja a fázismenetet (STABILITÁS!).

Az előző részek tartalmából

Szintézis ismeretek

A hallgató

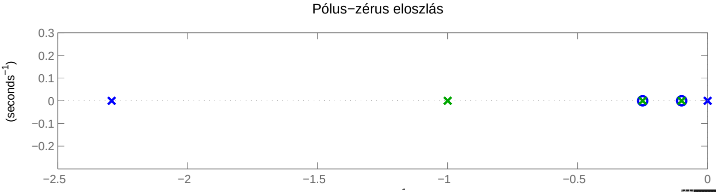
1. ismeri a hagyományos soros kompenzátorok működési mechanizmusát,
2. tisztában van a hangolás szempontjaival,
3. érti a beavatkozó jel korlátosságából adódó tervezési korlátozásokat,
4. tisztában van a sávszélesség fogalmával a szabályozási körök esetében,
5. tisztában van a PID szabályzókban alkalmazott három hatás (arányos, integráló és közelítő deriváló) jellemzőivel,
6. képes a PID szabályzók különböző változatai esetében a méretezést elvégezni,
7. képes holtidős tagot a méretezéskor figyelembe venni,
8. képes meghatározni a mintavételi periódusidőt a folytonos méretezésből kiadódó ω_c vágási frekvenciából,

Az előző részek tartalmából - PID tervezés

1. Adott $W_p(s) = \frac{3}{(10s+1)(4s+1)(s+1)}$ szakasz.
2. PID szabályozót tervezünk. Specifikáció: $\varphi_t = 60°$, $u_{max} = 8$.

Felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = \frac{A_p}{T_i} \frac{s^2 T_i(T_d + T_c) + s(T_i + T_c) + 1}{s(T_c s + 1)} \frac{3}{(10s+1)(4s+1)(s+1)}$$



Az előző részek tartalmából - PID tervezés

Egyenletek - `fsolve`

$$\|W_o(j\omega_c)\| - 1 = 0$$
$$\pi + \varphi(\omega_c) - \varphi_t = 0$$
$$\frac{40A_p}{T_c(14 - T_c)} - u_{max} = 0$$

```
function y = gyakPID(x)
Ap = x(1);
wc = x(2);
Tc = x(3);
y1 = 3*Ap/(14-Tc)/wc/sqrt(1+wc^2*Tc^2)/sqrt(1+wc^2)-1;
y2 = pi/6 - atan(wc*Tc)-atan(wc);    % fazistartalek
y3 = 40*Ap/Tc/(14-Tc) - 8;           % u(0)
y=[y1;y2;y3];
```

Mintavételes megvalósítás - `c2d(PID,Ts,'zoh')`

A mintavételezés fázisrontása legyen 5°. Ekkor $T_s = \frac{2 \cdot 5\pi}{180\omega_c} = 0,26$ sec. Az algoritmus egy ötödikes számára is világos:

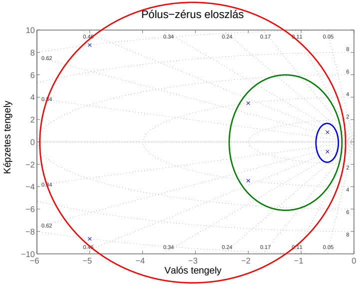
$$u_k = 1,65u_{k-1} - 0,65u_{k-2} + 8e_k - 15,4e_{k-1} + 7.41e_{k-2}$$
$$u_k = 1,65u_{k-1} - 0,65u_{k-2} + 8(r_k - y_k) - 15,4(r_{k-1} - y_{k-1}) + 7.41(r_{k-2} - y_{k-2})$$

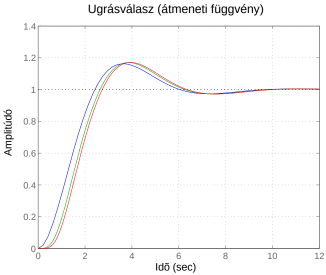
Ugyan azok az együtthatók szorozzák r és $-y$ mintáit.

Mai felhasználásra

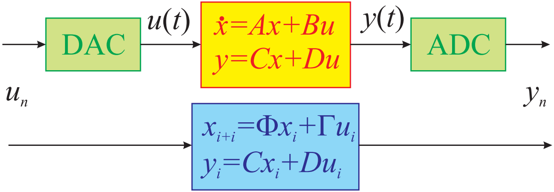
Domináns póluspár

A leglassúbb póluspár a leginkább meghatározó, domináns, hiszen a többi tranziens jóval gyorsabban lejátszódik. A leglassúbb póluspár van a legközelebb a képzetes tengelyhez.





Mai felhasználásra



A jelátalakítók típusai

1. DAC: nulladrendű tartószerv
2. ADC: mintavételező

Az folytonos állapotegyenlet lépcsős bemenetet kap.

Mai felhasználásra

Áttérés

A következő mintavételig az állapotegyenletet kell integrálni konstans bemenet mellett.

$$x((i+1)T) = e^{AT}x(iT) + \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A((i+1)T-\vartheta)}Bu(iT)d\vartheta$$

Változócsere

Legyen $\sigma = (i+1)T - \vartheta$, akkor $d\sigma = -d\vartheta$.

Diszkrét idejű állapotegyenlet mátrixai

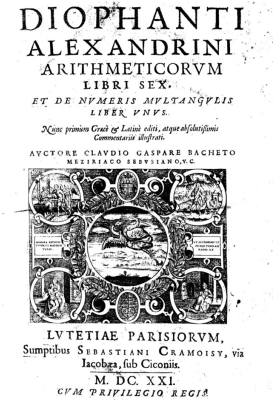
$$\Phi = e^{AT} \qquad \Gamma = \int_0^T e^{A\sigma}d\sigma B$$

A hetedik előadás célja

A hallgató

1. átlátja a különbséget az alapjelkövetésre és zavarelnyomásra történő tervezés között,
2. átlátja az ún. kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó struktúrájának hasznát,
3. érti a modellalapú méretezési paradigmát,
4. megismeri a mintavételes 2DOF szabályzó méretezésének lépéseit.

Tartalom


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus Sebastiani Cramoisy, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

(alexandriai) Diophantosz, görög ~~villamosmérnök~~ matematikus (i.sz. 3 század)

1. Az előző részek tartalmából
2. Mire jó a 2DOF szabályozó?
3. Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
   - A szabályzó struktúrákról
   - A 2DOF Struktúra
   - Modellillesztés
   - Az előírt modell
   - A polinomok számítása

Tartalom

1 Az előző részek tartalmából

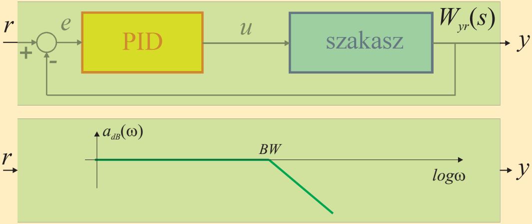
2 Mire jó a 2DOF szabályozó?

3 Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
- A szabályzó struktúrákról
- A 2DOF Struktúra
- Modellillesztés
- Az előírt modell
- A polinomok számítása

Soros szabályozó méretezése - alapjelkövetésre hangolva

A zárt kör sávszélessége: $BW \approx \omega_C$

A hangolás egyik szempontja a sávszélesség maximalizálása zárt körben, r és y között.



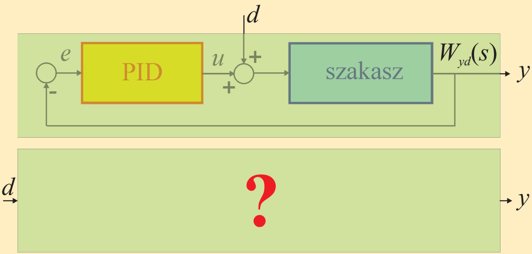
A PID hangolását az alapjelkövetésre optimalizáltuk.

$$W_{yr}(s) = \frac{W_{PID}(s)W(s)}{1 + W_{PID}(s)W(s)}$$

Soros szabályozó méretezése - alapjelkövetésre hangolva

Mi a helyzet a (bemeneti) zavar elnyomásával?

A d zavarás elnyomását eddig csak állandósult állapotban vizsgáltuk.



A zavarás hatásának lecsengését nem vettük figyelembe a méretezéskor.

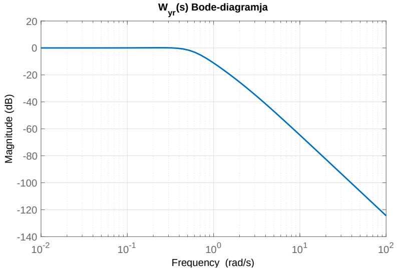
$$W_{yd}(s) = \frac{W(s)}{1 + W_{PID}(s)W(s)} \qquad W_{yd}(s)W_{PID}(s) = W_{yr}(s)$$

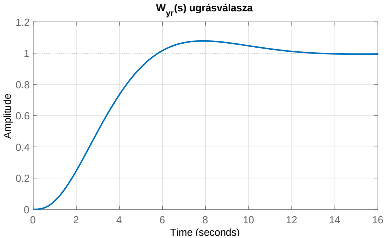
Vizsgálat egy példán - alapjelkövetés

1. Adott $W(s) = \dfrac{3}{(10s+1)(4s+1)(s+1)}$ szakasz.
2. PID szabályozót tervezünk. Specifikáció: $\varphi_t = 60°$, $u_{max} = 8$.

$$W_{PID}(s) = \frac{1,61}{13,4} \frac{40s^2 + 14s + 1}{s(0,6s + 1)}$$

3. Legyen $r(t) = \varepsilon(t)$! Zárt kör ugrásválaszának beállási ideje 11,4 sec (gyors).





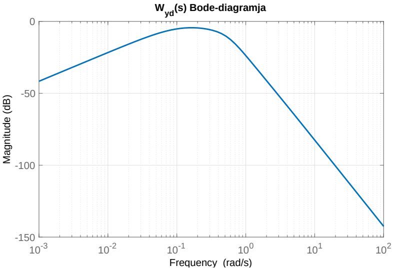
Vizsgálat egy példán - zavarelnyomás

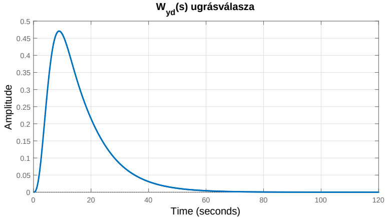
1. Adott $W(s) = \frac{3}{(10s+1)(4s+1)(s+1)}$ szakasz.
2. PID szabályozót tervezünk. Specifikáció: $\varphi_t = 60°$, $u_{max} = 8$.

$$W_{PID}(s) = \frac{1,61}{13,4} \frac{40s^2 + 14s + 1}{s(0,6s+1)}$$

3. Legyen $d(t) = \varepsilon(t)$! Zárt kör ugrásválaszának beállási ideje 51,9 sec (NAGYON LASSÚ - különösen az alapjelkövetéshez képest).

Miért ennyire lassan tűnik el a zavarás hatása a kimeneten?

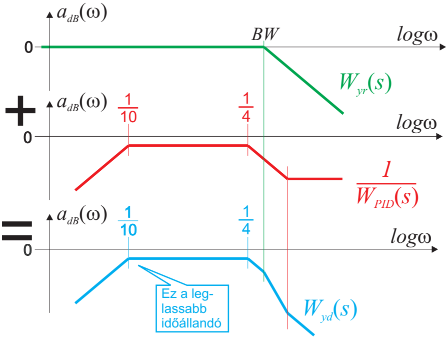




Miért lassú a zavarelnyomás zárt körben?

$$W_{yd}(s)W_{PID}(s) = W_{yr}(s)$$

$$W_{yd}(s) = W_{yr}(s)\frac{1}{W_{PID}(s)}$$



Megjegyzés

A zavarást nem átvinni, hanem elnyomni akarjuk a kimeneten. Ehhez minél nagyobb frekvencia -tartományon $W_{yd}(s)$ átvitel legyen kis erősítésű.

$$20\log|W_{yd}(j\omega)| = 20\log|W_{yr}(j\omega)| - 20\log|W_{PID}(j\omega)|$$

Megjegyzés

A PID szabályozó nagy időállandójú zérusa miatt lassú a zavarelnyomás.

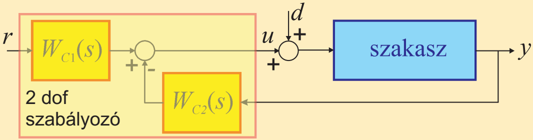
Mit tehetünk a lassú zavarelnyomás ellen?

Probléma

A PID szabályozó kiejti a szakasz lassú pólusait, hogy az alapjelkövetés gyors legyen, de ezzel éppenséggel lassítjuk a zavarás elnyomását.

Megoldás: két szabadságfokú struktúra

A soros szabályozó helyett használjunk más struktúrát! Például:



Külön méretezhetjük a $W_{yr}(s)$ és a $W_{yd}(s)$ átviteleket.

$$W_{yd}(s) = \frac{W(s)}{1 + W_{C2}(s)W(s)} \qquad W_{yr}(s) = \frac{W_{C1}(s)W(s)}{1 + W_{C2}(s)W(s)} \qquad W_{yd}(s) = \frac{W_{yr}(s)}{W_{C1}(s)}$$

A méretezést diszkrét időben fogjuk elvégezni.

Tartalom

1 Az előző részek tartalmából

2 Mire jó a 2DOF szabályozó?

3 Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
- A szabályzó struktúrákról
- A 2DOF Struktúra
- Modellillesztés
- Az előírt modell
- A polinomok számítása

Tartalom

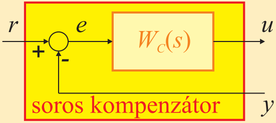
1. Az előző részek tartalmából
2. Mire jó a 2DOF szabályozó?
3. Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
   - A szabályzó struktúrákról
   - A 2DOF Struktúra
   - Modellillesztés
   - Az előírt modell
   - A polinomok számítása

A szabályzó struktúrákról

A (lineáris) szabályzó feladata

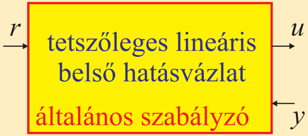
Minden időpillanatban (mintavételes esetben csak minden kT időpillanatban) előállítani $u(t)$ jelet lineáris műveletekkel az $r(t)$ alapjel és az $y(t)$ szabályozott jellemző alapján.

Soros kompenzátorok



Ez valójában egy speciális elrendezés

Általános szabályozóblokk



Megjegyzés

Ahogy láttuk, más struktúrájú szabályzók lehetnek előnyösebbek.

Tartalom

1. Az előző részek tartalmából
2. Mire jó a 2DOF szabályozó?
3. Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
   - A szabályzó struktúrákról
   - A 2DOF Struktúra
   - Modellillesztés
   - Az előírt modell
   - A polinomok számítása

Kétszabadságfokú szabályzó

Megjegyzések

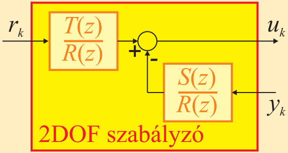
1. új struktúra és
2. új tervezési paradigma.

Módszer

Diszkrét időben tervezünk a szakasz diszkrét idejű $D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ átvitele alapján.

Új struktúra

Egy soros átvitel helyett két átvitelt illesztünk a szabályzóba.



A tervezéskor meghatározandó ismeretlen polinomok: $R(z)$, $S(z)$ és $T(z)$.

Tartalom

1 Az előző részek tartalmából

2 Mire jó a 2DOF szabályozó?

3 Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
- A szabályzó struktúrákról
- A 2DOF Struktúra
- Modellillesztés
- Az előírt modell
- A polinomok számítása

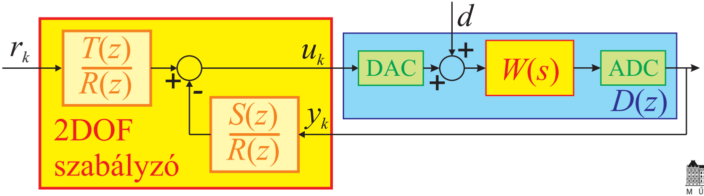
Új struktúra, új tervezési paradigma

Modellillesztés

Adott $D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ átvitele és előírjuk:

1. a zárt kör számunkra megfelelő dinamikus viselkedését definiáló domináns póluspárt és az azokhoz tartozó tranzienseket érdemben nem módosító „gyors" pólusokat,
2. a típusszámot és a zárt kör statikus erősítését,

majd ebből visszaszámoljuk a három polinom fokszámát és együtthatóit. (Nem fázistartalékra tervezünk.)



A modellillesztés alapegyenlete

A zárt kör átvitelei

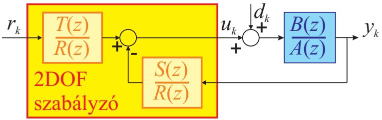
Ebben értelemszerűen megjelennek a szabályzó polinomjai.

$$D_{yr}(z) = \frac{T(z)B(z)}{A(z)R(z) + S(z)B(z)}$$

$$D_{yd}(z) = \frac{R(z)B(z)}{A(z)R(z) + S(z)B(z)}$$

$$D_{yd}(z) = \frac{R(z)}{T(z)} D_{yr}(z)$$

(Ez hasonló a folytonos időben felírt átvitelekhez.)

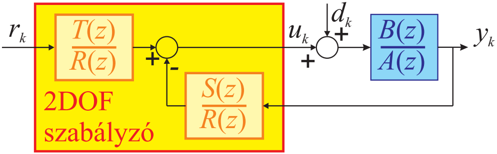


A modell átvitelének jelölése

Ezt az átvitelt várjuk el zárt körben az alapjel követéséhez (specifikálását lásd később).

$$D_{m(yr)}(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

A modellillesztés alapegyenlete (alapjelkövetéshez



Az alapegyenlet

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)R(z)+S(z)B(z)} = \frac{B_m(z)A_o(z)}{A_m(z)A_o(z)} \qquad (1)$$

Az $A_o(z)$ (megfigyelő) polinom alkalmazásának okai

1. a fokszámok egyenlők legyenek (1) két oldalán.
2. $A_o(z)$ kerül be $T(z)$ részeként $D_{yd}(z)$ átvitel nevezőjébe.

2DOF szabályzó

A tervezés menete

1. Megvizsgáljuk a szakasz tranzienseit meghatározó pólusokat.
2. A szakasz tulajdonságai alapján előírjuk a zárt kör domináns és „gyors” pólusait és az azokhoz tartozó sávszélességet.
3. A sávszélesség alapján meghatározzuk a T mintavételi periódusidőt.
4. Meghatározzuk a szakasz diszkrét idejű modelljét és a zárt körben előírt diszkrét idejű pólusokat.
5. Megoldjuk a modellillesztés alapegyenletét (számlálók és nevezők egyenlősége alapján, több lépésben).

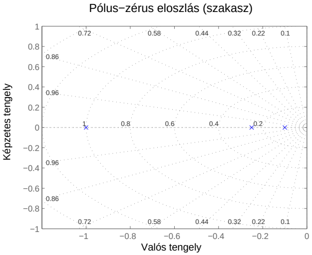
Megjegyzés

A zárt körben előírt pólusok meghatározása némi gyakorlatot igénylő, intuitív feladat, de megadunk ökölszabályokat.

Tartalom

1. Az előző részek tartalmából
2. Mire jó a 2DOF szabályozó?
3. Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
   - A szabályzó struktúrákról
   - A 2DOF Struktúra
   - Modellillesztés
   - Az előírt modell
   - A polinomok számítása

Szakasz pólusai, zárt kör pólusai (folytonos)



Paraméterek

Szakasz T_i időállandói (lehetnek konjugált póluspárhoz tartozók is).

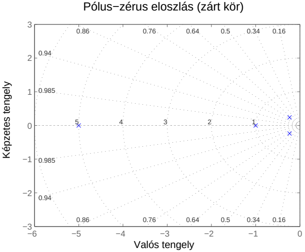
Meghatározandók

A zárt kör pólusai.

Szempontok a zárt kör előírt átvitelének választásához

1. egy domináns póluspár (ξ, ω_0) legyen és olyan pólusok, amelyek annak dominanciáját nem befolyásolják,
2. itt ξ értéke határozza meg a túllövést,
3. a gyorsítás határa a beavatkozó jel nagysága.

Zárt kör pólusai (folytonos)



Ökölszabályok

1. $T_{sum} = \sum_{i=1}^{n} T_i$
2. $\omega_0 = \frac{5}{T_{sum}}$ és $\xi = 0,7$
   $\left(s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)$
3. Gyors pólusok: $s_{c\infty} = -3\omega_0$ és $s_{o\infty} = -5\omega_0$

Mintavételi periódusidő

A tartószerv $\frac{T_s}{2}$ holtidővel közelíthető, rontja a fázistartalékot. Feltesszük, hogy $\omega_0 \sim \omega_c$ és 5° fázisromlást teszünk lehetővé, akkor $\omega_0 T_s = \frac{2\cdot 5\pi}{180}$.

Pólusok diszkrét időben

$A_m(z)$-be: $z_i = \exp(s_i T_s)$ és $z_{c\infty} = \exp(s_{c\infty} T_s)$; $A_o(z)$-be: $z_{o\infty} = \exp(s_{o\infty} T_s)$

Tartalom

1. Az előző részek tartalmából
2. Mire jó a 2DOF szabályozó?
3. Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó méretezése
   - A szabályzó struktúrákról
   - A 2DOF Struktúra
   - Modellillesztés
   - Az előírt modell
   - A polinomok számítása

Az alapegyenlet megoldása

Az alapegyenlet (1)

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)R(z)+S(z)B(z)}=\frac{B_m(z)A_o(z)}{A_m(z)A_o(z)}$$

A gr$A$ jelölés

gr$A$ $= A(z)$ polinom fokszáma.

Megjegyzés

A keresett polinomok impulzusátviteli függvények $\left(\frac{T(z)}{R(z)}, \frac{S(z)}{R(z)}\right)$ számlálói és nevezői, ezért a megoldásoknak

1. kauzális átviteleket kell eredményezniük, azaz gr$T \leq$ gr$R$ és gr$S \leq$ gr$R$,
2. stabil átviteleket kell eredményezniük, azaz $R(z)$ minden gyöke az egységkörön belül kell legyen, vagy integrátor esetén a $+1$ pontban.

Az alapegyenlet megoldása

Az alapegyenlet

$$\frac{TB}{AR+SB} = \frac{B_m A_o}{A_m A_o}$$

Szeretnénk egyszerűsíteni B-vel

Akkor lehet, ha B benne van R-ben. Cakhogy R átviteli függvények nevezője, így nem mindegy milyen gyökei vannak.

B faktorizálása

Csoportosítjuk B gyökeit: $B = B^+ \cdot B^-$

1. B^-: nem kiejthető gyököket tartalmazza
   - egységkörön (kivéve $z = 1$) és azon kívüli gyök
   - negatív valós gyök (nincs elsőfokú ekvivalens folytonos idejű pólus, hullámosságot eredményez)
2. B^+: a kiejthető gyököket tartalmazza (mindent, amit B^- nem).

Az alapegyenlet megoldása

Egyszerűsítés B faktorizációja nyomán

Most legyen $R = R' \cdot B^+$ és $B_m = B'_m \cdot B^-$

$$\frac{TB^+B^-}{AR'B^+ + SB^+B^-} = \frac{B'_m B^- A_o}{A_m A_o} \qquad \frac{T}{AR' + SB^-} = \frac{B'_m A_o}{A_m A_o}$$

Típusszám beállítása

Fontos! A zárt kör pólusainak megadásával nem állítottuk be a típusszámot. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$D_o(z) = \frac{SB}{AR}$$

Legyen a típusszám beállításához szükséges integrátorok száma l, ekkor $R = R' \cdot B^+ = (z-1)^l R'_1 \cdot B^+$

Az alapegyenlet megoldása

Alapegyenlet egyszerűsítés és integrátorok nyomán

Mivel $R = (z-1)^l R_1' \cdot B^+$

$$\frac{T}{A(z-1)^l R_1' + SB^-} = \frac{B_m' A_o}{A_m A_o}$$

Két egyenlet

A számlálók és nevezők egyenlőségéből

$$T = B_m' A_o \qquad A(z-1)^l R_1' + SB^- = A_m A_o$$

B_m' meghatározása

Legyen B_m' konstans. Úgy választjuk meg, hogy a zárt kör statikus erősítése egységnyi legyen. Így $1 = \frac{B_m' B^-(1)}{A_m(1)}$, ahonnan $B_m' = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}$

Az alapegyenlet megoldása

A diophantoszi egyenlet a polinomok gyűrűjén (ismeretlenek: R_1', S)

Két ismeretlen de egy egyenlet. Az értékkészlet nem test, hanem gyűrű.

$$A(z-1)^l R_1' + SB^- = A_m A_o$$

Fokszámfeltételek

- a diophantoszi egyenletnek legyen egyértelmű megoldása,
- a számlálók és nevezők fokszámainak különbsége legyen 1.

$$\mathrm{gr}A_m = 1 + \mathrm{gr}B^- + \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathrm{gr}B^- = 0 \\ 0 & \text{ha } \mathrm{gr}B^- > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{gr}S = \mathrm{gr}A + l - 1 \qquad \mathrm{gr}R_1' = \mathrm{gr}B^-$$

$$\mathrm{gr}A_o = \mathrm{gr}A + l - 1 - \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathrm{gr}B^- = 0 \\ 0 & \text{ha } \mathrm{gr}B^- > 0 \end{cases}$$

Az alapegyenlet megoldása

Az $A_m(z)$ és $A_o(z)$ polinomok meghatározása

A fokszámoknak megfelelő darab gyököt pakolunk beléjük ($z_1, z_2, z_{c\infty}, z_{o\infty}$). Azaz

$$A_m(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_{c\infty})^{\mathrm{gr}A_m - 2}$$
$$A_o(z) = (z - z_{o\infty})^{\mathrm{gr}A_o}$$

A T polinom számítása

Egyszerű: $T(z) = B_m' \cdot A_o(z)$

MŰEGYETEM 1782

A diophantoszi egyenlet megoldása

Definíció

Monik polinom: amelynek legnagyobb kitevőjű tagjának együtthatója 1. Például a $1z^n + a_1 z^{n-1} + \ \dots a_{n-1} z + a_n$ polinom egy monik polinom.

Monik polinomok ebben a feladatban

Egy átviteli függvény nevezőjét vagy számlálóját mindig választhatjuk moniknak. Legyen tehát monik: $A_m(z)$, $A_o(z)$, $R(z)$. A $B(z)$ faktorizációban pedig legyen monik $B^+(z)$.

Megoldás elve

A bal és jobb oldali polinomok akkor egyenlők, ha minden együtthatójuk egyenlő, így minden együtthatóra felírunk egy egyenletet

A diophantoszi egyenlet megoldása

Általános alak

$$\alpha(z) \cdot X(z) + \beta(z) \cdot Y(z) = \gamma(z)$$

Ahol az ismeretlen polinomok $X(z)$ és $Y(z)$.

Polinomok

A mi problémánkhoz hasonlóan $\alpha(z)$, $X(z)$ és $\gamma(z)$ monik, így:

$$\alpha(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = A(z) \cdot (z-1)^l$$
$$\beta(z) = \beta_0 z^m + \beta_1 z^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1} z + \beta_m = B^-(z)$$
$$\gamma(z) = z^{n+k} + \gamma_1 z^{n+k-1} + \ldots + \gamma_{n+k-1} z + \gamma_{n+k} = A_m(z) \cdot A_o(z)$$
$$X(z) = z^k + x_1 z^{k-1} + \ldots + x_{k-1} z + x_k = R_1'(z)$$
$$Y(z) = y_0 z^h + y_1 z^{h-1} + \ldots + y_{h-1} z + y_h = S(z)$$

A diophantoszi egyenlet megoldása

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_1 & 1 & \ddots & & \vdots & \beta_1 & \beta_0 & \ddots & \vdots \\
\alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & \ddots & \vdots & \beta_2 & \beta_1 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \beta_0 \\
\alpha_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & \beta_1 \\
\alpha_n & \alpha_{n-1} & \ddots & \ddots & \alpha_1 & \vdots & \ddots & \ddots & \beta_2 \\
0 & \alpha_n & \ddots & \ddots & \alpha_2 & \beta_m & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n & 0 & \cdots & 0 & \beta_m
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_h
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\gamma_1 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ \gamma_n - \alpha_n \\ \hline \gamma_{n+1} \\ \vdots \\ \gamma_{n+k}
\end{array}\right]$$