ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak — **VIZSGADOLGOZAT** — 2012. január 5.
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (7+4=11 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+3n+2}\right) = ?$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^8+2n^5+3n^2}{(n^2+5)^4} = ?$

a.) 7

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+3n+2}\right)\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n+2}}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n+2}} =$$ 2

$$= \frac{-n-2}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3n+2}} = \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=\frac{n}{n}=1} \frac{-1-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} \longrightarrow$$ 1

$$\longrightarrow \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0+0}} = -\frac{1}{2}$$ 4

b.) 4

$$b_n = \underbrace{\frac{n^8}{(n^2)^4}}_{=1} \frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^6}}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^4} \longrightarrow \frac{1+0+0}{(1+0)^4} = 1$$

2. feladat (7+6=13 pont)

a) Mondja ki és bizonyítsa be a sorokra tanult majoráns kritériumot!

b) Konvergens-e a következő sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}+2^{4n+2}}{6^{2n+1}+4}$$

a.) 7

T $\boxed{\text{Ha } 0 \le a_n \le c_n \ \forall n > N \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergens} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}}$ 2

B A feltétel miatt

$$a_{N+1} \le c_{N+1}$$
$$\vdots$$
$$a_n \le c_n$$

Azonos irányú egyenlőtlenségek összeadhatók, ezért

$$s_n^a = a_{N+1} + \dots + a_n \le c_{N+1} + \dots + c_n = s_n^c$$

Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \le K$ $\Longrightarrow$ s_n^a korlátos és mivel pozitív tagú a sor $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens 5 ■

anlv120105/1.

b.) 6

$$a_n = \frac{27^n+4\cdot 16^n}{6\cdot 36^n+4} \le \frac{27^n+4\cdot 27^n}{6\cdot 36^n+0} = \frac{5}{6}\left(\frac{27}{36}\right)^n = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$ 1 3

$\frac{5}{6}\sum^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(q=\frac{3}{4}, |q|<1\right)$ 1

$\underset{\text{majoráns kr.}}{\Longrightarrow}$ $\sum^{\infty} a_n$ konv. 1

3. feladat (3+7+4=14 pont)

a) Mondja ki a függvények és sorozatok határértékére vonatkozó átviteli elvet!

b) Igazolja, hogy az $f(x)=\sin(x)$ függvénynek nem létezik a határértéke a ∞-ben!

c)

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & \text{ha } x \ne 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Folytonos-e a fenti $g(x)$ függvény az $x=0$-ban? (Állítását igazolja!)

a) 3

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall x_n \to x_0\text{-ra } f(x_n) \to A$$
$$x_n \in D_f$$
$$x_n \ne x_0$$

b) 7

$x_n^{(1)} = n\pi \to \infty$: $f(x_n^{(1)}) = \sin n\pi = 0 \to 0$

$x_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$: $f(x_n^{(2)}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1 \to 1 \ne 0$

$\underset{\text{átv. elv}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{x\to\infty} \sin x$ $\nexists$

c.) 4

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{korlátos}} = 0 = g(0)$, tehát g folytonos $x=0$-ban.

4. feladat (8+4+10=22 pont)

a) Adjon szükséges feltételt differenciálható függvények lokális szélsőérték létezésére! Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

b) Adjon elégséges feltételt a lokális szélsőérték létezésére! A tanult tételt kell kimondania (két állítás).

c)

$$f(x) = (x-1)\,e^{-x^2+x}$$

Határozza meg f lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét, valamint azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, ahol f monoton nő illetve csökken!

anlv120105/2.

a) Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: $f'(x_0)=0$

$\boxed{3}$

[redacted] (2)

Ⓑ Pl. lokális maximumra (4.19 a ábra):

$$\lim_{h\to 0-} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(x_0) = f'(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

(6)

$\Longrightarrow \quad f'(x_0)=0 \quad$ (vízszintes érintő)

(A $\frac{-}{-}$, illetve a $\frac{-}{+}$ szimbólumokban a + és − jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

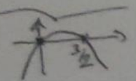
b.) $\boxed{1}$

[redacted] (2) (2)

c.) $\boxed{10}$

$$f'(x) = e^{-x^2+x} + (x-1)e^{-x^2+x}(-2x+1) = \quad (2)$$

$$= \underbrace{e^{-x^2+x}}_{>0} \; \underbrace{x(-2x+3)}_{} \quad (2) \text{ (az átalakításért)}$$



x:	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},\infty)$
f'	−	0	+	0	−
f	↘	lok min	↗	lok max	↘

(6)

an1v-120105/3.

5. feladat (13 pont)*

$$\int \frac{e^{2x}+7e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx = ?$$

Használjuk a $t=e^x$ helyettesítést!

$t=e^x \Rightarrow x=\ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$ (2)

$\int \frac{t^2+7t}{t^2-t-2}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+7}{t^2-t-2}\,dt = \int \frac{t+7}{(t+1)(t-2)}\,dt$ (2) (1)

$\frac{t+7}{(t+1)(t-2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-2}$ (1)

$t+7 = A(t-2)+B(t+1)$ $\quad t=-1:\ 6=-3A \Rightarrow A=-2$; $\quad t=2:\ 9=3B \Rightarrow B=3$ (3)

$\int\left(-2\frac{1}{t+1} + \cancel{\frac{1}{3}}\,3\,\frac{1}{t-2}\right)dt = -2\ln|t+1| + \cancel{\frac{1}{3}}\,3\,\ln|t-2| + C$ (3)

$I = -2\ln(e^x+1) + \cancel{\frac{1}{3}}\,3\,\ln|e^x-2| + C$ (1)

6. feladat (7+7=14 pont)*

a) $\int_0^2 \frac{x}{4+9x^2}\,dx = ?$ $\qquad$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+9x^2}\,dx = ?$

a.) $\boxed{7}$ $\frac{1}{18}\int_0^2 \underbrace{\frac{18x}{4+9x^2}}_{f'/f}dx = \frac{1}{18}\ln(4+9x^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{18}(\ln 40 - \ln 4)$

b.) $\boxed{7}$ $I_b = \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \frac{1}{4}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx =$ (1)

$= \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}} \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{6}\lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\omega_2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\omega_1\right)$ (4) (1)

$= \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$ (1)

an1v-120105/4.

7. feladat (8+5=13 pont)*

Legyen

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} \sqrt{4+t^4}\, dt\,, \qquad H(x) = \int_{t=x}^{x^2} \sqrt{4+t^4}\, dt\,.$$

a) Határozza meg $F(x)$ és $H(x)$ deriváltját!

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{\operatorname{arctg}(5x)} = ?$$

a.) $\boxed{8}$ $F(x) = \int_0^x \underbrace{\sqrt{4+t^4}}_{\text{folyt.}}\, dt \xrightarrow[\text{II. alaptétele}]{\text{int. szám.}} F'(x) = \sqrt{4+x^4}$ (3)

$$H(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{4+t^4}\, dt = \int_0^{x^2} \sqrt{4+t^4}\, dt - \int_0^{x} \sqrt{4+t^4}\, dt =$$

$$= F(x^2) - F(x)$$

$$\Rightarrow H'(x) = F'(x^2)\cdot 2x - F'(x) = \sqrt{4+x^8}\cdot 2x - \sqrt{4+x^4}$$ (5)

b.) $\boxed{5}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{4+t^4}\, dt}{\operatorname{arctg} 5x} \overset{L'H\ (1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x^4}}{\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5} = \frac{2}{5}$$ (3)

$\frac{0}{0}$ (1)

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (9 pont)

Határozza meg, hogy hol konvex illetve hol konkáv az $f(x) = x\, e^{-2x}$ függvény!

$$f'(x) = 1\cdot e^{-2x} + x\cdot e^{-2x}(-2) = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$$ (2)

$$f''(x) = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2x e^{-2x}(-2) = 4\underbrace{e^{-2x}}_{>0}(x-1)$$ (2)

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

(5)

an1o-12010515.

9. feladat (6+5=11 pont)

a) $(x^x)' = ?$ b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{8n^2} = ?$

a.) $\boxed{6}$ $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$ $x>0$ (2)

$$f'(x) = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)' =$$

$$= x^x\left(1\cdot\ln x + \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{=1}\right)$$ (4)

b) $\boxed{5}$ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{-3}{2n^2}\right)^{2n^2}}\right)^4 = \left(\frac{e}{e^{-3}}\right)^4 = (e^4)^4 = e^{16}$$

an1o-12010516.