61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX: várható érték, σX: szórás)

Ha $X \in B(n,p)$, akkor $EX = np$

$\sigma X = \sqrt{np(1-p)}$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $\mathrm{X} \in \mathrm{G(p)}$, akkor $EX = \frac{1}{p}$

$\sigma X = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in Po(\lambda)$, akkor $EX = \lambda$

$\sigma X = \sqrt{\lambda}$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in U(a,b)$, akkor $EX = \frac{b+a}{2}$

$\sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in N(\mu,\sigma)$, akkor $EX = \mu$

$\sigma X = \sigma$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in E(\lambda)$, akkor $EX = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma X = \frac{1}{\lambda}$

68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!

Az $X_1, X_2, \dots, X_p$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ skalár-vektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(t) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i,\ \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke $\underline{t}$-ben a $\underline{t}$-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
3) Ha $\underline{X}$-nek *legalább egyik* komponensével a $-\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
4) Ha $\underline{X}$-nek *minden* komponensével a $+\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
5) Legyen $T : [\underline{a}, \underline{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_p, b_p)$ p-dimenziós tégla és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p-dimenziós bináris vektor. Ekkor:
   $P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}\left(\underline{a\varepsilon} + \underline{b}(1-\underline{\varepsilon})\right) > 0;\ j = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \big(E(X-a)\big)^2 = EX^2 - (EX)^2$ $\forall a$-ra.

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = \big(X_1, X_2, \dots, X_p\big)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k-dimenziós perem- vagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k-dimenziós $(2 \le k < p-1)$ vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \le i_1 < \dots < i_k \le p$ index-kombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

1) $\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \big(E(X-a)\big)^2 = EX^2 - (EX)^2$ $\forall a$-ra (Steiner-tétel),
2) $\mathbf{E}(X-a)^2 \ge \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$ $\forall a \in \mathbb{R}$,
3) $\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

1) $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$,
2) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$,
3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$\mathbf{E}\big(g(X)\big) = \int_\Omega g(X)\, dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, d\,F_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor $\exists$ várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x| f_X(x)\, dx < \infty$, akkor $\exists$ várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}X)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \ge 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke:$\mathbf{E}Y \ge 0$. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $\mathbf{P}(Y > \delta) \le \frac{\mathbf{E}Y}{\delta}$.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y}: t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$

Vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne $\underline{Y}$-ban.

81. Hol veszi fel a minimumát az $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2$ mennyiség?

$\sigma^2(x)$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2)$?

$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}^2(X) + \sigma^2(X)$

83. $\mathbf{E}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{bY}) = ?$

$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$

84. $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{b}) = ?$

$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{X} < \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c} \le \boldsymbol{Y} < \boldsymbol{d}$?

$P(a \le X < b; c \le Y < d) = F_{X,Y}(a,c) + F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c)$

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor $\exists$ várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x| f_X(x)\, dx < \infty$, akkor $\exists$ várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\, dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y)\, dy$$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz. Ellenpélda:

Legyenek X_1 és X_2 olyan valószínűségi változók, melyek csak a $-1, 0, +1$ értékeket vehetik fel az alábbi eloszlási táblázat szerint:

X_1/X_2	-1	0	$+1$	X_1 perem
-1	$0{,}125+\epsilon$	0	$0{,}125-\epsilon$	$0{,}25$
0	0	$0{,}5$	0	$0{,}5$
$+1$	$0{,}125-\epsilon$	0	$0{,}125+\epsilon$	$0{,}25$
X_2 perem	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}25$	1

ahol $0 < \epsilon < 0{,}125$ tetszőleges.

Ekkor $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le -1 \\ 0{,}25, & \text{ha} \quad -1 < x \le 0 \\ 0{,}75, & \text{ha} \quad 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$

90. $\boldsymbol{\sigma^2(aX+b)} = $ **?**

$\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$

91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűségfüggvényből?

Az . $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$-től $+\infty$-ig kiintegráljuk.

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

1) $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \geq 0, \forall \underline{t}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{t})\, dt_1 \dots dt_n = 1$ $\left(\lim_{\forall t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1\right)$

95. Ha $\boldsymbol{X, Y \in Po(\lambda)}$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\boldsymbol{X+Y}$?

Legyen $X \in Po(\lambda),\ Y \in Po(\mu), k = 0, 1, 2, \dots$, ekkor:

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X=l) \cdot \mathbf{P}(Y=k-l) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l}{l!} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \mathrm{e}^{-\mu} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow X+Y \in Po(\lambda+\mu)$

Tehát jelen esetben $X+Y \in Po(2\lambda)$.

96. Ha $\boldsymbol{X, Y \in N(0,1)}$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\boldsymbol{X+Y}$?

Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1),\ Y \in N(\mu_2, \sigma_2),$ akkor $X+Y \in N\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$.

Jelen esetben $X+Y \in N(0, \sqrt{2})$.

97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?

Az $X_1, X_2, \dots, X_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall\ 2 \leq k \leq n$-re és $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}\left(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left(X_{j_i} = x_{j_i}\right)$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}\, p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?

$X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$

103. Mikor független két valószínűségi változó?

X és *Y* valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall i, j$-re

$\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j)$

104. Egy n-dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?

$n-1$

112. Ha $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

113. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$$

114. Ha $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1$$

115. Ha $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(\mathrm{x})$-el!

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du \cdot \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,dv$$

116. Ha $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = xy$$

117. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda y} + \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$$

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du$?

Az $f_Y(v)$ sűrűségfüggvénnyel.

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du\,dv$?

Az $F_{X,Y}$ eloszlásfüggvénnyel.

120. Mivel egyenlő $\lim\limits_{v\to\infty} F_{X,Y}(u,v)$?

$F_X(u)$