38. Ha $\boldsymbol{X \in N(m, D)}$, akkor milyen eloszlást követ $\boldsymbol{\frac{X-m}{D}}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

58. Ha $\boldsymbol{X \in N(0, 1)}$, akkor milyen eloszlást követ $\boldsymbol{aX + b}$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

59. Fejezze ki az $\boldsymbol{X \in N(m, D)}$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlás-függvénnyel!

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

60. Fejezze ki az $\boldsymbol{X \in N(m, D)}$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűség-függvénnyel!

$$f_X(X) = \varphi_{m,D}(x) = \frac{1}{D}\varphi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX: várható érték, σX: szórás)

Ha $X \in B(n, p)$, akkor $EX = np$

$\sigma X = \sqrt{np(1-p)}$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha X ∈ G(p), akkor $EX = \frac{1}{p}$

$\sigma X = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in Po(\lambda)$, akkor $EX = \lambda$

$\sigma X = \sqrt{\lambda}$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in U(a, b)$, akkor $EX = \frac{b+a}{2}$

$\sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in N(\mu, \sigma)$, akkor $EX = \mu$

$\sigma X = \sigma$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in E(\lambda)$, akkor $EX = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma X = \frac{1}{\lambda}$

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \big(E(X-a)\big)^2 = EX^2 - (EX)^2$ $\forall a$-ra.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

1) $\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \big(E(X-a)\big)^2 = EX^2 - (EX)^2$ $\forall a$-ra (Steiner-tétel),
2) $\mathbf{E}(X-a)^2 \geq \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$ $\forall a \in \mathbb{R}$,
3) $\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X=c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

1) $\mathbf{E}(aX+bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$,
2) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$,
3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$\mathbf{E}\big(g(X)\big) = \int_{\Omega} g(X)\, dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, d\,F_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor $\exists$ várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x| f_X(x)\, dx < \infty$, akkor $\exists$ várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}X)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke:$\mathbf{E}Y \geq 0$. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $\mathbf{P}(Y > \delta) \leq \frac{\mathbf{E}Y}{\delta}$.

81. Hol veszi fel a minimumát az $\mathrm{E}(x-a)^2$ mennyiség?

$\sigma^2(x)$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $E(X^2)$?

$\sigma^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X)$

83. $\mathbf{E}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{bY}) = $ **?**

$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$

84. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{aX} + \mathbf{b}) = $ **?**

$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor ∃ várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x| f_X(x)\, dx < \infty$, akkor ∃ várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $\boldsymbol{Y = g(X)}$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\, dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y)\, dy$$

90. $\boldsymbol{\sigma^2(aX + b)} = $ **?**

$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$