

61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX : várható érték, σX : szórási)

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in B(n, p), \text{ akkor} \quad & EX = np \\ & \sigma X = \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in G(p), \text{ akkor} \quad & EX = \frac{1}{p} \\ & \sigma X = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \end{aligned}$$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in Po(\lambda), \text{ akkor} \quad & EX = \lambda \\ & \sigma X = \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in U(a, b), \text{ akkor} \quad & EX = \frac{b+a}{2} \\ & \sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in N(\mu, \sigma), \text{ akkor} \quad & EX = \mu \\ & \sigma X = \sigma \end{aligned}$$

67. Adja meg az exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in E(\lambda), \text{ akkor} \quad & EX = \frac{1}{\lambda} \\ & \sigma X = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!

Az X_1, X_2, \dots, X_p valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1]$ skálárvektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(\underline{t}) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i, \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke \underline{t} -ben a \underline{t} -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

- 1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
- 2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
- 3) Ha \underline{X} -nek *legalább* egyik komponensével a $-\infty$ -be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
- 4) Ha \underline{X} -nek *minden* komponensével a $+\infty$ -be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
- 5) Legyen $T : [\underline{a}, \underline{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$ p -dimenziós téga és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p -dimenziós bináris vektor. Ekkor:

$$P(\underline{x} \in T) = \sum_{\underline{\varepsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}(\underline{a}\underline{\varepsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\varepsilon})) > 0; \quad j = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i$$

Vagyis a téglalap csúcsaihoz tartozó eloszlásértékek megfelelően előjelezett összege soha nem negatív.

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$$\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a \text{-ra.}$$

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k -dimenziós perem- vagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k -dimenziós ($2 \leq k < p - 1$) vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$ indexkombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

- 1) $\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a \text{-ra (Steiner-tétel),}$
- 2) $E(X - a)^2 \geq \sigma^2(X) = E(X - EX)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R},$
- 3) $\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2 \sigma^2(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$
- 4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : P(X = c) = 1 \text{ és } c = EX.$

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

- 1) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y),$
- 2) $E(XY) = E(X)E(Y),$
- 3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x| f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \cdot P(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x) dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke: $EY \geq 0$. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $P(Y > \delta) \leq \frac{EY}{\delta}$.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(t)$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(t)$$

81. Hol veszi fel a minimumát az $E(x - a)^2$ mennyiség?

$$\sigma^2(x)$$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $E(X^2)$?

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

83. $E(aX + bY) = ?$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

84. $\sigma(aX + b) = ?$

$$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$$

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $P(a \leq X < b; c \leq Y < d)$?

$$P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c).$$

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens, akkor \exists várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x| f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $Y = g(X)$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y) dy$$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_X(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz. Ellenpélda:

Legyenek X_1 és X_2 olyan valószínűségi változók, melyek csak a $-1, 0, +1$ értékeket vehetik fel az alábbi eloszlási táblázat szerint:

X_1/X_2	-1	0	+1	X_1 perem
-1	$0,125 + \epsilon$	0	$0,125 - \epsilon$	0,25
0	0	0,5	0	0,5
+1	$0,125 - \epsilon$	0	$0,125 + \epsilon$	0,25
X_2 perem	0,25	0,5	0,25	1

ahol $0 < \epsilon < 0,125$ tetszőleges.

$$\text{Ekkor } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -1 \\ 0,25, & \text{ha } -1 < x \leq 0 \\ 0,75, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

90. $\sigma^2(aX + b) = ?$

$$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2 \sigma^2(X)$$