Hírközlés elmélet

dr. Bitó János — 4 kis ZH van — 10 hallgató felett

Szerda 8^{15} IE220 — inkrementális ZH rendszer! — össz 15 pont

csütörtök 10^{15} E1C — 2 legjobb ZH átlaga

4 pont 4,5-7 1
7,5-9 - 2
9,5-11 - 3
11,5-13 - 4
13,5-15 - 5

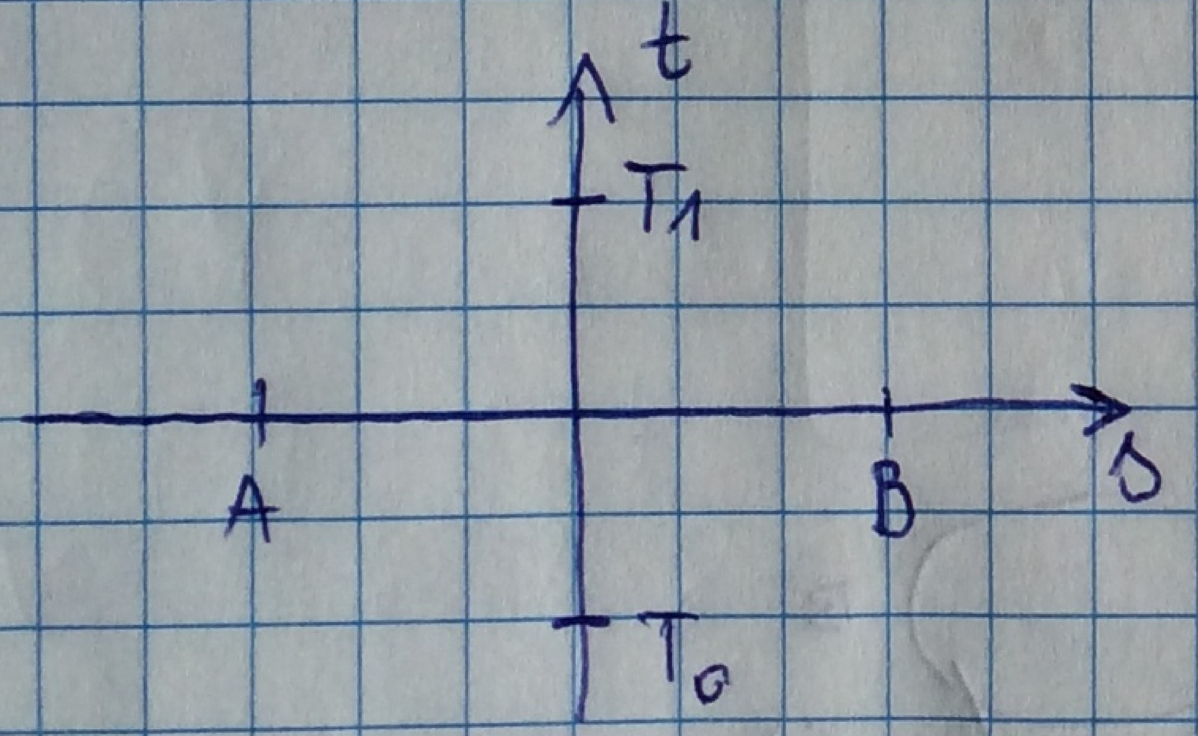
ZH: 3 rész → teszt példa tétel

10 tesztes feleletbefejezős (infohomm)
tétel kifejtés
példa számolás

1. előadás

információ forrásai üzeneteinek eljuttatása az információ nyelőjéhez = HÍRKÖZLÉS

+ Zaj, zavar, interferencia (mesterséges vagy természetes)



időben
vagy — elkülönült pontok
térben

forrás kódoló / tömörítés [időben elkülönültkor]

- mi az információ? — felkel-e a nap holnap?

  $P(\text{nap}) \to 0$ — Holnap nem kel fel a nap → nagy az információ tartalma

- hogyan mérem az információt?
  - kell egy kvantitatív mérték

    ~ Hartly (1928, Bell System Technical Journal) "Transmission of information" cikke

  () az ember alapvető igénye a kommunikáció elhagy ↓

ANALÓG! ~ szinuszos jelek reprodukciója volt a feladat (telefon)

↓ elhelyezett!

esemény: $\xi = \{x_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$ infot csak akkor viszünk át, ha az esemény több kimenetelű
– lényeg a döntés a kimenetelek közt

$\#\xi = D$ (# ~ ahány esetet felvehet az esemény) $I(\xi)$

$\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n\}$ n db val. változó együttese

$\#\bar{\xi} = D^n$ $[D \cdot D \cdot D \dots D]$ $I(\bar{\xi}) = n \cdot I(\xi)$

információ tartalom van, ha: több kimenetel van!

$$\boxed{\begin{array}{ll} \#\xi = D & I(\xi) = \log_a D \\ \#\bar{\xi} = D^n & I(\bar{\xi}) = n \cdot I(\xi) \\ \multicolumn{2}{l}{\log_a D^n = n \cdot \log_a D} \end{array}}$$

ha $a = 2 \rightsquigarrow \log_2$
⇓
ld [bit]
ha $a = 10 \rightsquigarrow \log_{10}$
⇓
lg [Hartly]

DE EZ MÉG NEM JÓ:

példa: kalap 4 golyó 1-et húzunk


A

$D = 2$

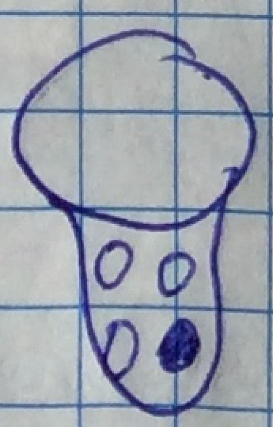
$\mathrm{ld}\, D = 1$ [bit]
binary digit


B

( ) azt várnám hogy fehér lesz ezért jobban meglepődök! több info

a baj az, hogy a Hartly mérték nem veszi figyelembe a valószínűségi eloszlást!

B



● húzok : $\mathrm{ld}\,\frac{4}{1} = 2$ [bit]

O $\mathrm{ld}\,\frac{4}{3} = 0{,}415$ [bit]

[bit] az információmennyiség mértéke

BIT

● = 2
○ = 0,415

$$\underbrace{\overset{\text{valség}}{\frac{1}{4}}}_{} \cdot \underbrace{2}_{\text{info tartalom}} + \overset{\text{valség}}{\frac{3}{4}} \cdot \underbrace{0{,}415}_{\text{info tartalom}} = \underline{0{,}811\,[bit]}$$

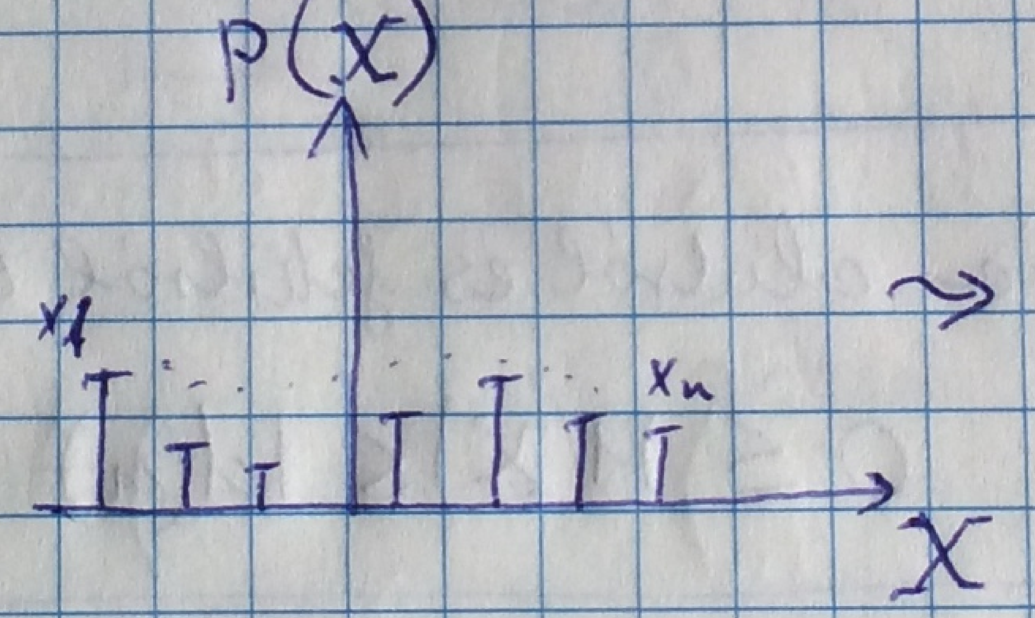
↳ kevesebb infó mint egyenletes eloszlásnál

Claude Shannon (1948, BSTJ) – "A Mathematical Theory of Communication"

legyen:

$$\underbrace{X}_{\text{diszkrét értékű val. változó}} = \{x_1 \ldots x_n\}; \quad \underbrace{p(X)}_{\text{sűrűség fv.}} = (p_1 \ldots p_n)$$

$$p_i = p(x_i)$$
i-edik esemény



$$\rightsquigarrow \underbrace{F_X(y)}_{\text{eloszlásfüggvény}} = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_X(y) = \underline{\underline{1}}$$
↳ teljes eseménytér!

Def: $I(x_i) = ld \frac{1}{p(x_i)}$ ⤳ ez egy esemény információja

$\rightarrow -ld\,(p(x_i))$ [bit]

minél valószínűbb az esemény annál kisebb az info. tartalom

(Self Information – az esemény saját információ tartalma)

Def: Entrópia, Átlagos információtartalom (entropy)

$$H(X) = E\{I(x_i)\} = \sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot \overbrace{ld \frac{1}{p(x_i)}}^{I(x_i)}$$

( ) ⇒ várható érték a lájkok

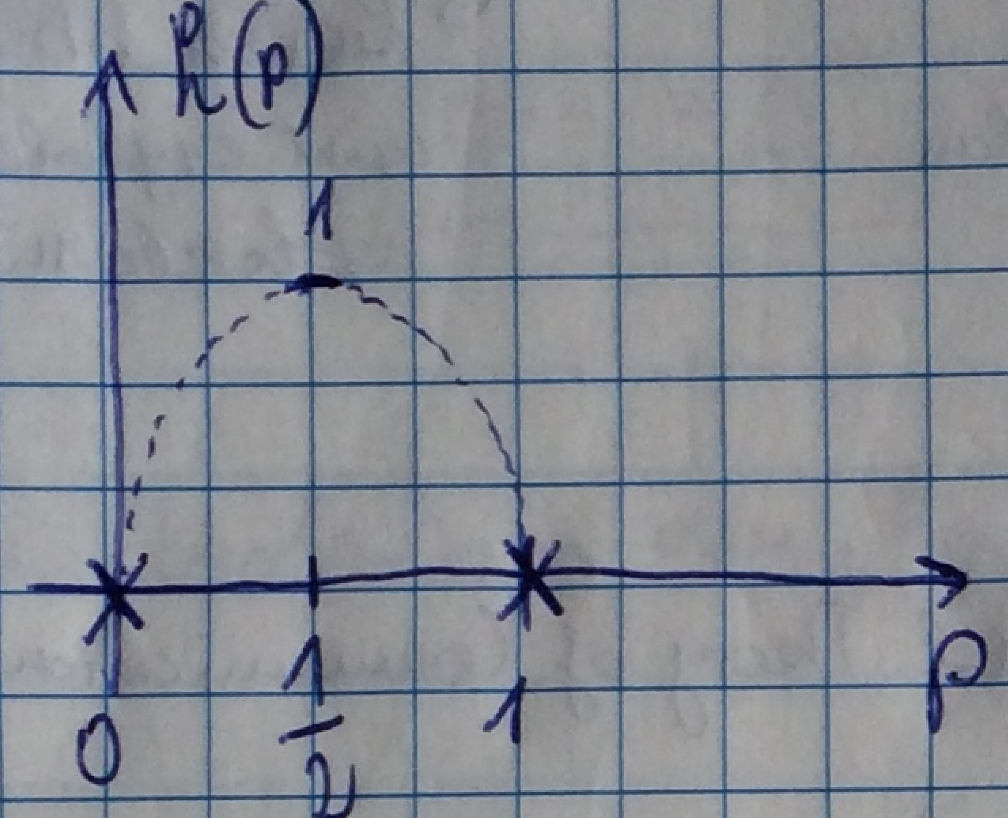
- legyen $X = \{x_1, x_2\}$, $p(X) = \{p(x_1), p(x_2)\} \Rightarrow \{\overset{p}{p(x_1)}; \overset{1-p}{1-p(x_1)}\}$

ezért ez 1 paraméteres

$$H(X) = \sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot ld\frac{1}{p(x_i)} = \underbrace{p\, ld\frac{1}{p} + (1-p)\cdot ld\frac{1}{1-p}}$$

$h(p)$ = bináris entrópia fv

határérték probléma a széleken!



legyen $\boxed{x = \frac{1}{p}}$

$$p \cdot ld\frac{1}{p} ; \frac{1}{x} \cdot ld x$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot ld x = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{L'H}{=} \frac{1}{\ln(2)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow 0$

irodalom kérülés!!! szólni Bitónak

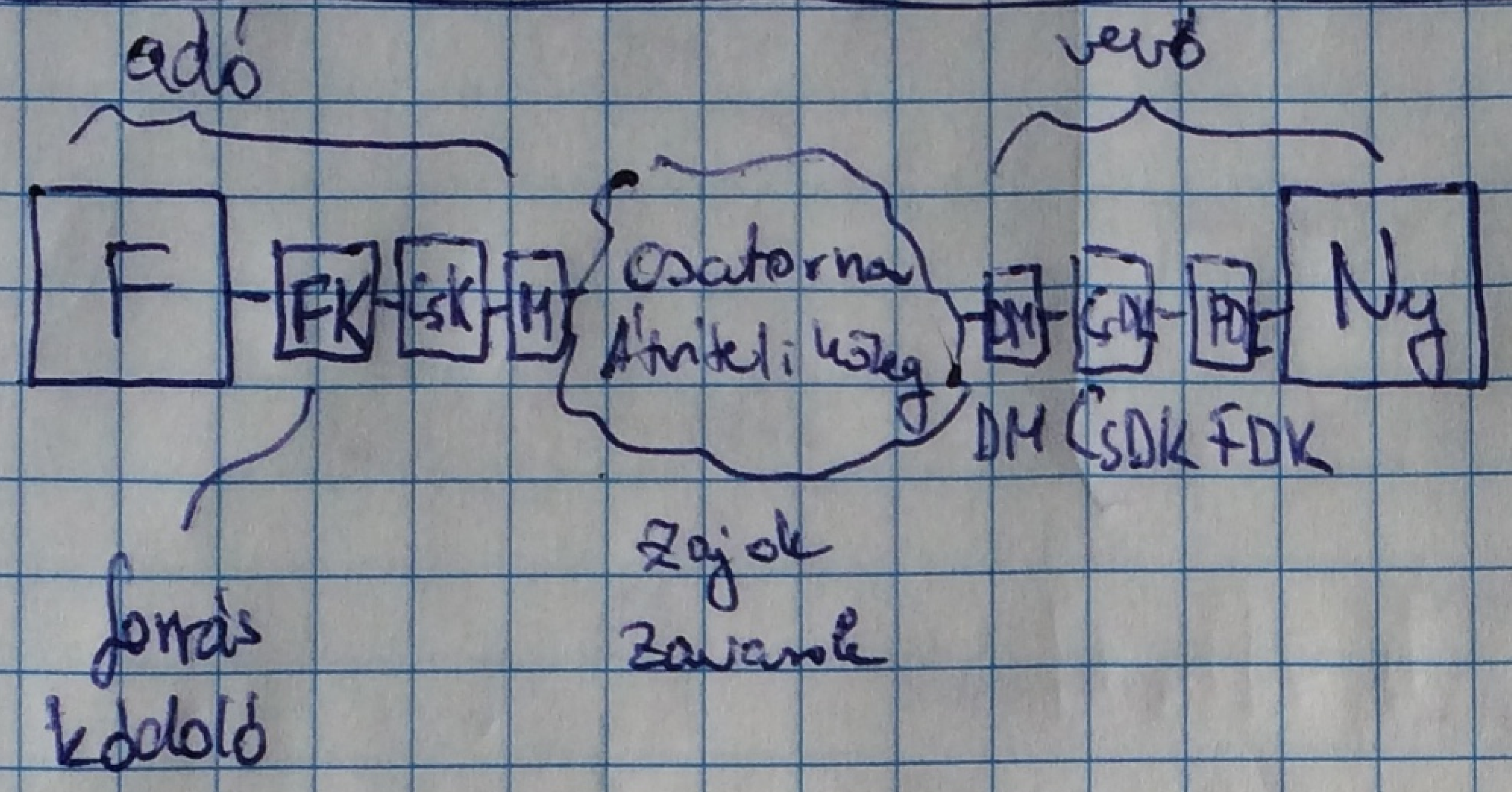
Tétel: az entrópia alulról és felülről is korlátos

$$\# X = n ; \quad 0 \le H(X) \le ld(n)$$

2. előadás

Proakis, Salehi: Communication Systems Engineering
Dallos: Tantárgyi segédlet a hírközléselmélet tárgyhoz
Pringyi I.: Hírközlő rendszerek
Csibi S.: Információ közlése és feldolgozása

} IRODALOM



FK: ami redundáns, azt tömöríti [veszteséges és veszteségnélküli]

CsK: a fellépő zavarok csillapítása (hibajavító + redundancia hozzáadó)

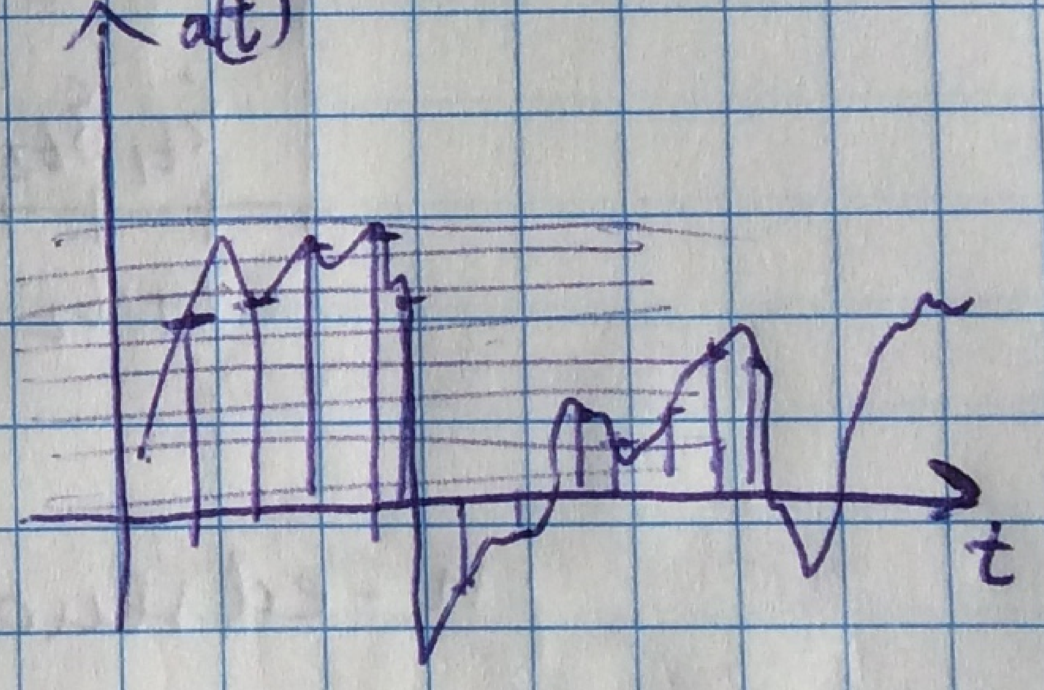
M: modulátor

DM: demodulátor

CsDK: csatorna dekóder

FDK: forrás dekódoló

$\boxed{F}$ analóg $a(t)$

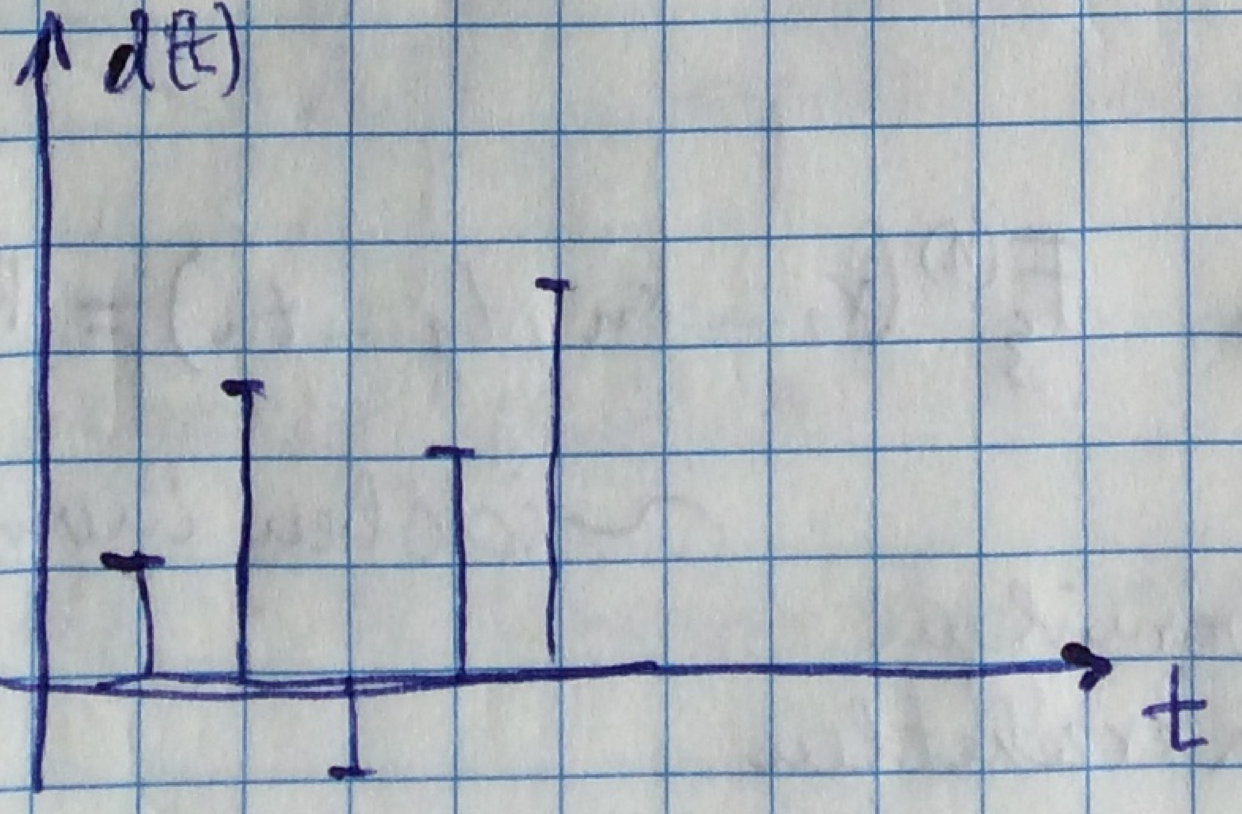


régen Bell idejében

Ha sávkorlátozott $\left(\frac{1}{2T}\right)$
mv. tétel!

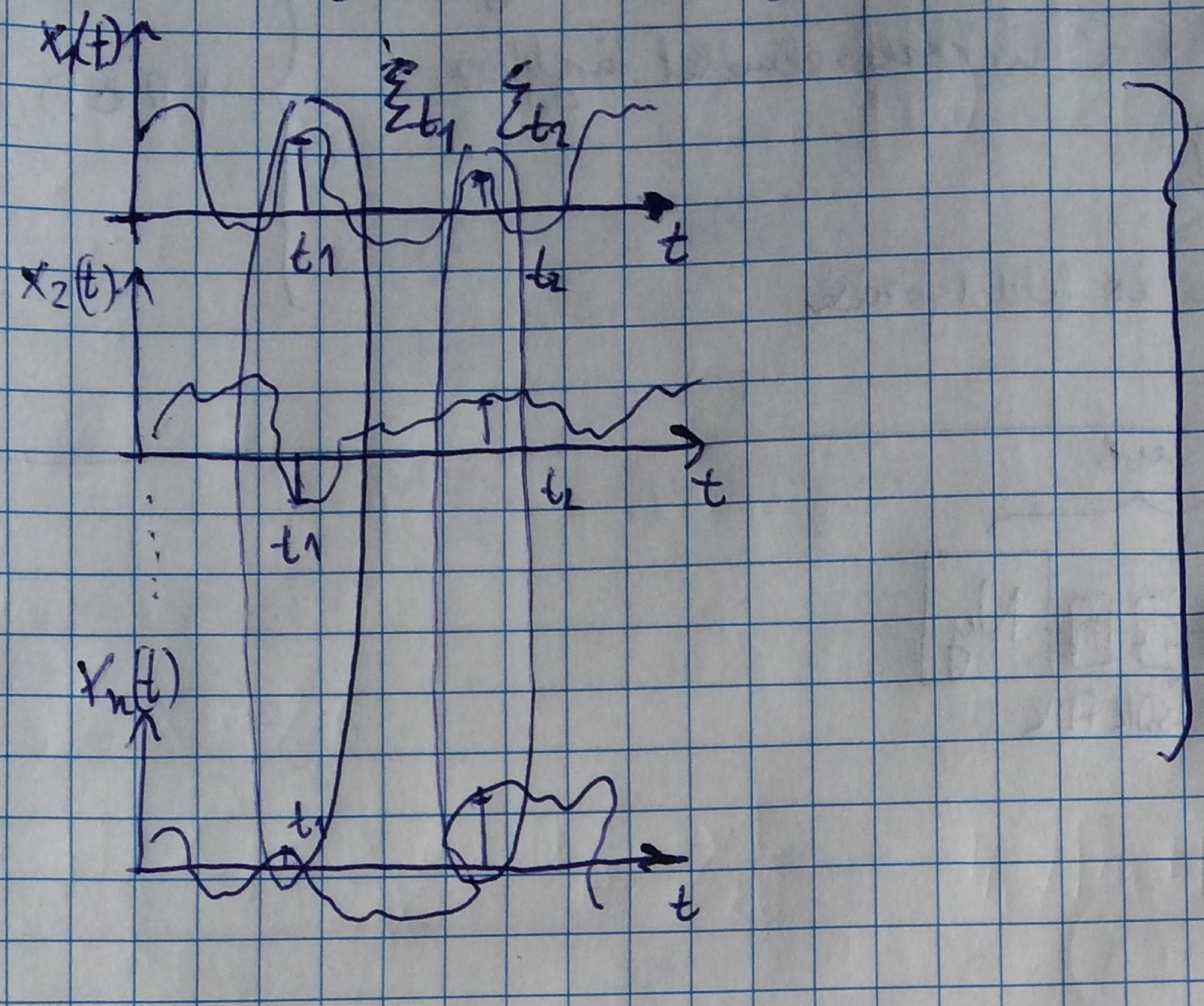
Ma digitális jel:

- időben mintavételezem (T)
- értékben kvantálom



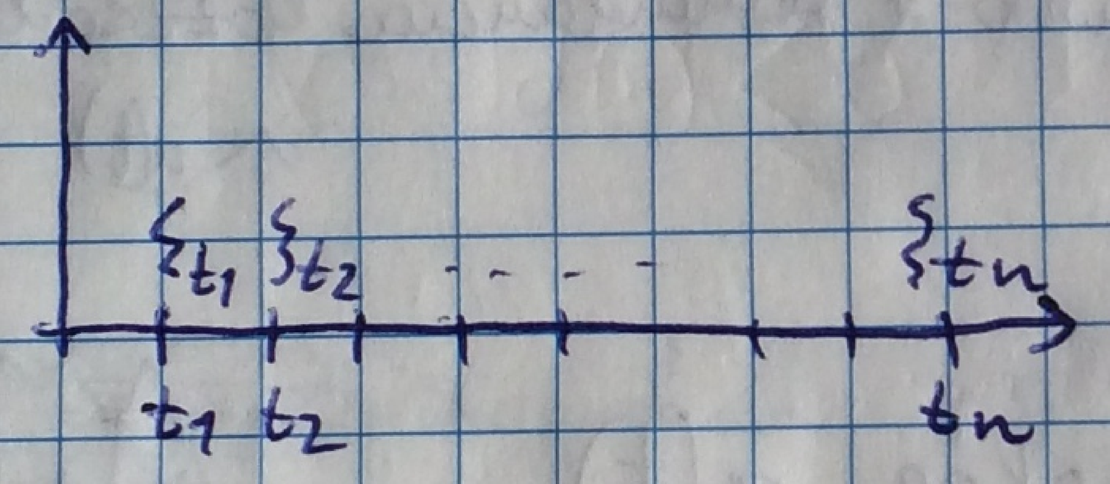
Sztochasztikus folyamatok

① a folyamat realizációjának az együttese



együtt ők a sztochasztikus folyamat!

② Valószínűségi változók rendezett (időben) serege



n-ed rendű eloszlás fv (n dimenziós)

$\cancel{F_\xi^{(n)}(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}, t_1, t_2 \ldots t_n) \triangleq}$

eloszlás fv.

$$F_\xi^{(n)}(x_1, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) \triangleq P(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \ldots \xi_{t_n} < x_n, t_1 \ldots t_n)$$

- Erősen stacionárius folyamat: $F_\xi^{(n)}(x_1 \ldots x_n, t_1 \ldots t_n) = F_\xi^{(n)}(x_1 \ldots x_n, t_1+\tau, t_n+\tau)$

~ időben invariáns

$\forall \tau, \forall n, \forall \{t\}$ időben bármilyen eltolásra érzéketlen

Várható értéke

$$m_\xi(t) \Rightarrow E(\xi_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x,t)\,dx$$

erősen stacion. foly. várható értéke időfüggetlen

$$m_\xi(t) = m_\xi \quad \forall t \text{ esetén}$$

erősen stac. foly → ergodikus foly vagy ergodikus foly keveréke

– ergodikus folyamat

bármelyik realizációból megvalósítható

$$\underset{\text{időátlag}}{A(\xi)} = \lim_{T\to\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi_t\,dt = m_\xi$$

• legyen

$$\cancel{E\,\xi(t) = M_\xi} \qquad \underset{\text{energia}}{\overbrace{e}^{\text{jel energiája}}}\,\xi(t) = \underset{\text{várható érték}}{E}\{\xi_t^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x,t)\,dx$$

• Autokorreláció

$$R_\xi\{t_1,t_2\} = E\{\xi_{t_1}\cdot\xi_{t_2}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot x_2\cdot \underbrace{f_\xi}_{\text{sűrűségfv.}}(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$R_\xi(t_1, t_1+\Delta T) = R_\xi(t_2, t_2+\Delta T) \rightsquigarrow$$ független az abszolút időtől csak az időkülönbségtől függ (ΔT)

$\Downarrow$

peremfelt: $\forall \Delta T$ és $\forall (t_1, t_2)$

• Gyengén stacionárius (Wide-Sense-Stationary)

(másodrendben stacionárius → gyengén stacionárius)

① ⇒ $m_\xi(t) = m_\xi \quad \forall t$ időfüggetlen

② ⇒ $R_\xi(\Delta T)$ korreláció csak a különbségtől függ

• ha ~~n~~ n rendben stac → n−1

de n rendben stac $\not\Rightarrow$ n+1

• Memória mentes: $\mathcal{X}$

– forrás

$$P(\xi_n = x_n \mid \overbrace{\xi = x_1, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1}}^{\text{előző betűkészlet}}) = P(\xi_n = x_n)$$

diszkrét

sűrűség eloszlás

folytonos id (f)

példa:

$\# \mathcal{X} = 26$

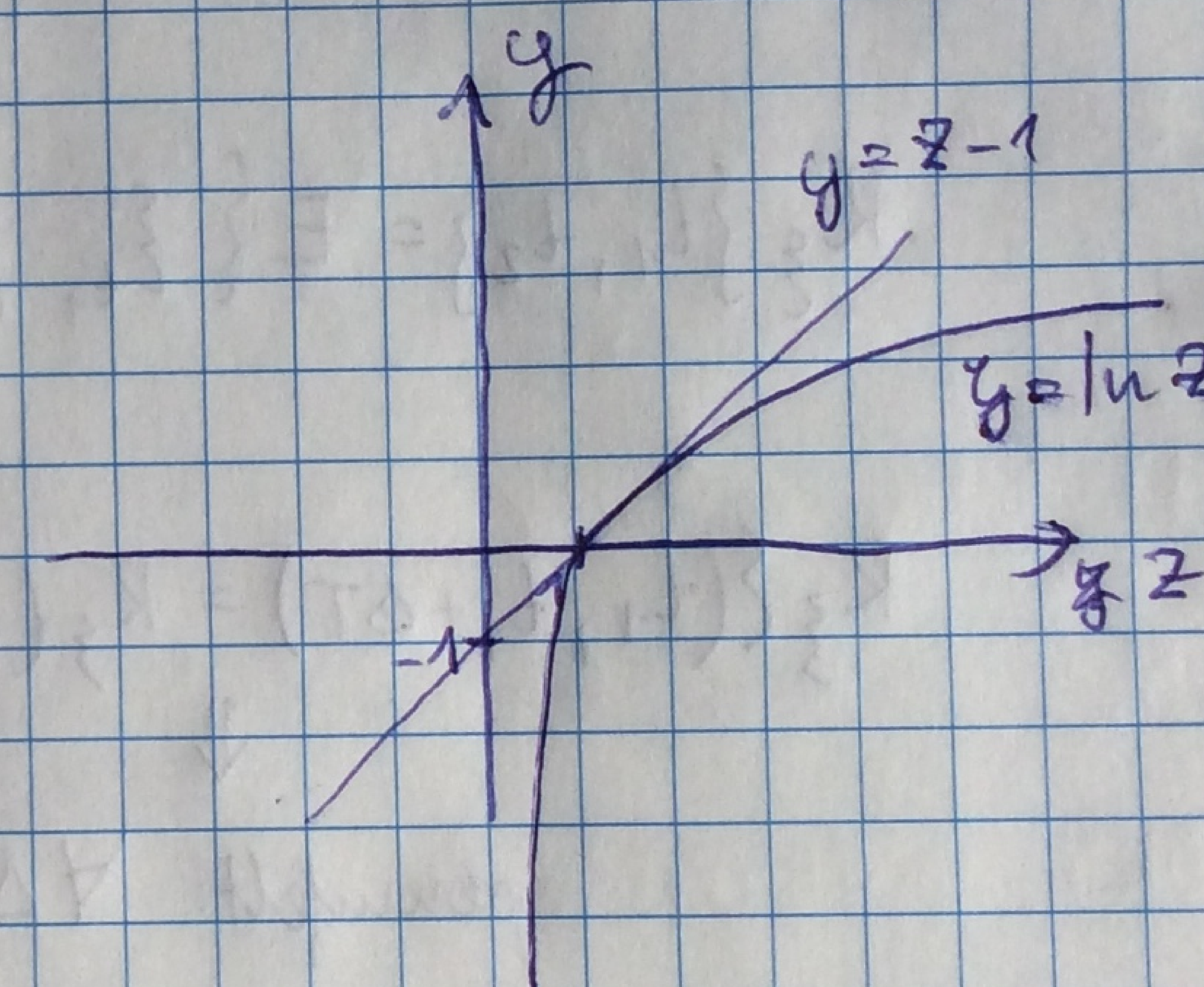
$$H_0(\mathcal{X}) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} p_{x_i} \, ld \frac{1}{p_{x_i}} = \sum \frac{1}{26} \cdots = 4{,}7 \, [bit]$$

entrópia

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

(Tétel: $0 \leq H(\mathcal{X}) \leq ld(n)$

$$H(\mathcal{X}) - ld(n) \leq 0$$



$$\sum_{x_i \in \mathcal{X}} p_{x_i} \cdot ld \frac{1}{p_{x_i}} - \sum_{x_i \in \mathcal{X}} p_{x_i} \cdot \overbrace{ld\, n}^{\text{mivel} = 1} \leq 0$$

$$\frac{1}{n \cdot p_{x_i}} = 1$$

$$\Rightarrow p(x_i) = \frac{1}{n}$$

$$\sum p_{x_i} \cdot ld \frac{1}{n \cdot p_{x_i}} \leq 0$$

$\Downarrow$

$$\sum p_{x_i} \cdot \ln \underbrace{\left(\frac{1}{n \, p_{x_i}}\right)}_{z} \leq 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} \cdot \sum_{x_i \in X} p_{x_i} \cdot \ln \frac{1}{p_{x_i} \cdot n} \leq \underbrace{\frac{1}{\ln(2)} \sum_{x_i \in X} p_{x_i} \Big[\overbrace{\frac{1}{n \cdot p_{x_i}} - 1}^{z-1} \Big]}_{} =$$

$$\frac{1}{\ln(2)} \underbrace{\Big[\underbrace{\sum_{x_i \in X} \frac{1}{n}}_{1} - \underbrace{\sum p_{x_i}}_{1} \Big]}_{0}$$

✓

<u>német nyelvre</u>

$H(\mathcal{X}) = 4{,}1$ bit

példák $H_2(\mathcal{X}) = 3$ bit

$H_\infty(\mathcal{X}) = 1{,}6$ bit