2. Zárthelyi

2011 tavasz A2

Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Döntse el, hogy invertálható-e $\underline{\underline{A}}^{101}$. Ha igen, határozza meg az $(\underline{\underline{A}}^{101})^{-1}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

2. Legyen $\mathbb{R}^4$-en a skalárszorzat a szokásos: $x \cdot y = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ és a norma a skalárszorzat által indukált: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2$. Legyen továbbá az $L \subseteq \mathbb{R}^4$ az $\mathbb{R}^4$-nek az $e = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ által generált (egydimenziós) altere és legyen $\mathbf{A}$ az L-re való merőleges vetítés operátora (azaz az az operátor, mely minden $x \in \mathbb{R}^4$-hez a hozzá (az adott normában) legközelebb eső L-beli vektort rendeli). Határozzuk meg $\mathbf{A}$ mátrixát $\mathbb{R}^4$ szokásos bázisában (azaz abban a bázisban, mely pontosan azokból a számnégyesekből áll, melyeknek egy kivételével minden elemük 0, a nem-nulla elem pedig 1).

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$. Deriválható-e f az origóban?

4. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} n \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{n} \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{1}{n} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n$$

5. Abszolút konvergens ill. feltételesen konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+9}$ sor?

6.

(a) Igaz-e egy lineáris teret önmagába képező lineáris operátorra az, hogy

(a1) ha sajátértéke a 0, akkor nem kölcsönösen egyértelmű

(a2) ha nem kölcsönösen egyértelmű, akkor sajátértéke a 0.

(b) Melyik igaz, melyik nem egy f kétváltozós függvényre egy adott pontban?

(b1) Ha parciálisan deriválható, akkor folytonos.

(b2) Ha létezik az összes parciális derivált, akkor totálisan deriválható.

(c) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(c1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is.

(c2) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.