1. Zárthelyi

A2 2011 tavasz

1. Legyen L tetszőleges véges dimenziós lineáris tér és $L_1 \subseteq L$ altere L-nek. Mutassa meg, hogy ha $\dim L_1 = \dim L$, akkor $L_1 = L$.

2. Adjon meg egy olyan $\mathbf{R}^4$-beli vektort, ha van ilyen, mely nincs benne egyetlen olyan altérben sem, melyet az alábbi vektorok közül három feszít ki!

$$v_1 = (1,0,1,0),\ v_2 = (0,1,0,1),\ v_3 = (-1,0,0,1),\ v_4 = (0,-1,1,1)$$

3. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mind $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, mind $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ esetén határozza meg az összes olyan 2×2-es $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ mátrixot, amellyel jobbról szorozva
(a) nullmátrixot
(b) egységmátrixot
kapunk!

4. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ olyan $n \times n$-es mátrix, melynek minden elemére fennáll, hogy $a_{ij} = \min(i,j)$. Mutassa meg, hogy $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 1$.

5. Határozza meg $\mathbf{R}^3$–on a z tengely körüli $+15°$–os forgatás szokásos bázisbeli mátrixának 90-edik hatványát!

6.
(a) Melyik igaz, melyik nem?
(1) Lineárisan független vektorrendszer minden része is lineárisan független.
(2) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a tér minden eleme előáll ezen vektorrendszer elemeinek
lineáris kombinációjaként.
(3) Véges dimenziós lineáris térnek véges sok bázisa van.
(4) Minden L lineáris tér esetén van olyan n pozitív egész, hogy az L dimenziója n.

(b) Melyik igaz az összes n ismeretlenes m darab egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre?
(1) Pontosan akkor létezik egyetlen megoldás, ha $m = n$.
(2) Nem létezik megoldás, ha $n < m$.
(3) Amennyiben egyáltalán létezik, nem egyértelmű a megoldás, ha $n > m$.
(4) Mindig végtelen sok megoldás van, ha $n > m$.