Alapok

Atomi formulák, kijelentésváltozók - $\Pi = \{p_1, ..., p_n\}$: a **formulák** belőlük épülnek fel, például úgy, hogy

- nem csinálunk semmit: Π
- tagadjuk: $\neg Form_{\Pi}$
- éseljük őket: $Form_{\Pi} \wedge Form_{\Pi}$

Magyarul a formula a legszűkebb olyan adathalmaz, ami zárt tagadásra és éselésre (konjukciónak is hívjuk). Formula más szóval állítás és mondat is. A formulák jele pl. φ, ψ, χ, bármilyen kis görög betű, a formulahalmazok meg nagy görög betűk. Semmilyen azonosság nem áll fenn, például $x \wedge y = y \wedge x$ nem feltétlenül igaz. Az atomi formulákra igaz állítások a formulára is igazak, öröklődik éselésen és tagadáson át is.

Extra jelölések:

- $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (“vagy”)
- $\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$ (“ha ..., akkor”)
- $\bot = p_0 \wedge \neg p_0$
- $\top = \neg \bot$
- $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (ekvivalencia, akkor és csak akkor)

Modell: a kijelentéslogikában $M = \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, vagyis mindenre megmondja, hogy igaz vagy sem. $M \vDash \varphi$ jelöli, hogy φ igaz az M modellre, vagyis a semmittevés, a tagadás, és az éselés működik rá. Ez formulahalmazokra is kimondható.

Ha φ minden modellben igaz, magyarul ha egy logikai formula minden esetben igazat ad, akkor **érvényes**. φ **kielégíthető**, ha van modellje, magyarul léteznek hozzá olyan változóértékek, hogy igazat ad. Két formula **ekvivalens**, ha közös a modelljük, magyarul azonos az igazságtáblájuk.

Lovagok és lókötők

Egy szigeten lovagok és lókötők vannak, a lovag mindig igazat mond, a lókötők mindig hazudnak. Kezelhetjük őket kijelentésváltozóknak, és akkor átfordítható logikai formulákra az állításuk:

- A azt állítja, hogy B igazat mond (lovag): $A \leftrightarrow B$
- A azt állítja, hogy B hazudik (lókötő): $A \leftrightarrow \neg B$
- vagyis: állító a bal oldalon, állítás a jobb oldalon.

Példa: B azt mondja, hogy A azt mondja, hogy A lókötő. Ennek igazságtáblája:

A	B	$A \leftrightarrow \neg A$	$B \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg A)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Itt pedig több olyan eset is van, ahol az állítása igaz, ez ellentmondás. Ha viszont B azt mondja, hogy mindketten lókötők:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0

Itt már csak egy eset igaz, vagyis az állítása helyes.

Bizonyításlogika

Egy formulahalmaz **konzisztens**, ha nem vezethető le belőle a fals formula. Ami kielégíthető, az konzisztens. Igazságtáblával vizsgáljuk, hogy van-e modellje, azaz bármi olyan értéke a változóknak, hogy minden formula eredménye azonos. Ha van ilyen, konzisztens.

Egy formulahalmaz **teljes**, ha levezethető belőle minden egyes formulája.