Jelek és rendszerek II.

I. HÁZI FELADAT VILLAMOSMÉRNÖK SZAKOS HALLGATÓK RÉSZÉRE

Név	Seyler Lajos
Neptun kód	EGWIB4
Házi feladat kódja	1612030402
Beadási határidő:	7. oktatási hét

Megjegyzések: *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* és a feladatlapot is be kell adni. *Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását elölről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* nem elegendő a végeredményeket közölni*! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* a megoldás elvi lépéseit *ekkor is* részletesen *ismertetni kell.*

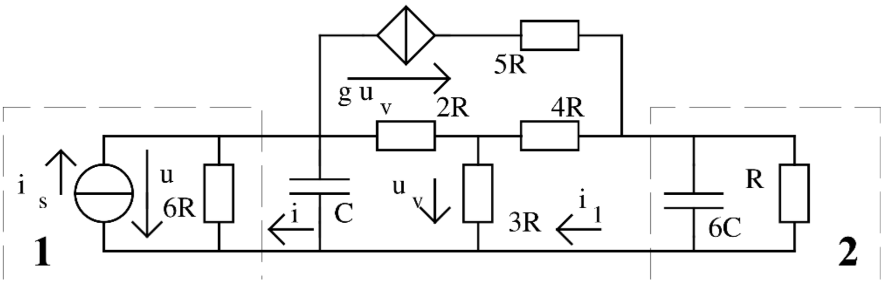
Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat **gerjesztése az áramforrás árama**, **válasza a 02** kimeneti jel.

H16

Válaszjel: u, i, i_1 A vizsgált kétpólus: 1, 2

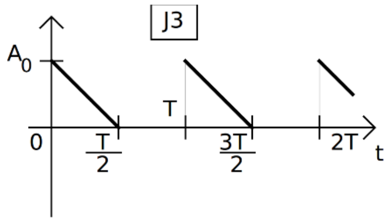


R =   C =   g =

R	C	g
$25k\Omega$	$10nF$	$80\mu S$

1. feladat

A hálózat gerjesztése az alábbi periodikus jel:



A_0	T/τ	τ
(10 V)/R	0.95	$\tau = 2 \cdot CR$

1.1 Határozza meg ezen periodikus jel legalább négy (nem zérus) harmonikust tartalmazó Fourier-polinomját! Írja fel a Fourier-polinomot komplex és valós együtthatós alakban!

1.2 Határozza meg a jel effektív értékét pontosan és a választott Fourier-polinom közelítésben is! Adja meg a közelítés relatív hibáját!

1.3 Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!

1.4 Határozza meg a válasz Fourier-polinomját az előző feladatban számított közelítésben! Határozza meg közelítőleg a válasz effektív értékét!

1.5 (Nem kötelező!) Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját!

2. feladat

A gerjesztés az 1. feladatban megadott jel első periódusa; a $(0, T)$ intervallumon kívül zérus a jel értéke.

2.1 Határozza meg az aperiodikus gerjesztő jel komplex spektrumát!

2.2 Ábrázolja az amplitúdóspektrumot, és ennek alapján adja meg a jel sávszélességét! ($\varepsilon = 0.05$)

2.3 Írja fel a válasz komplex spektrumát!

3. feladat

3.1 Határozza meg az átviteli függvényt! Számítsa ki az átviteli függvény pólusait és zérusait, vázolja fel a pólus-zérus elrendezést!

3.2 Határozza meg az impulzusválaszt az átviteli függvény alapján, és vázolja az impulzusválasz időfüggvényét!

3.3 Határozza meg a választ, ha a gerjesztőjel a 2. pont szerinti aperiodikus jel! Vázolja a válaszjelet!

4. feladat

A feladat megoldása nem kötelező! Ellenőrizze a számításokat a TINA hálózatanalízis program segítségével!

Jelek és rendszerek 2.

I. Házi feladat

1. Feladat

1.1. rész

$$A_0 = \frac{10V}{25k\Omega} = 0{,}4\,mA$$

A gerjesztés függvénye: $i_s(t) = A_0 - A_0 \cdot \frac{2t}{T}$

Fourier-sor valós alak: $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(I_k^A \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + I_k^B \cdot sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\right)$

Együtthatók meghatározása:

$$I_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t)dt$$

$$I_k^A = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt$$

$$I_k^B = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt$$

- $I_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t\right) dt = \frac{A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} 1dt - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} tdt =$

$$= \frac{A_0}{T} \cdot [t]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{A_0}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^2}{2} = \frac{A_0}{2} - \frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{4}$$

- $I_k^A = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A_0 - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t\right) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt =$

$$\frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} A_0 \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt - \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\left[t \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} dt\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\left[t \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{(k \cdot \omega_0)^2}\right]_0^{\frac{T}{2}}\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[\frac{\sin\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}{k \cdot \omega_0} - 0\right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\frac{T}{2} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}{k \cdot \omega_0} - 0 - \left[\frac{\cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}{(k \cdot \omega_0)^2} - \frac{1}{(k \cdot \omega_0)^2}\right]\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi)}{k \cdot \omega_0}}_{0} - \frac{4 \cdot A_0}{\cdot T^2} \cdot \left[\underbrace{\left(\frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi)}{k \cdot \omega_0}\right)}_{0} - \frac{\cos(k \cdot \pi)}{\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2} - \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\frac{(-1)^k}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}}\right] = \frac{A_0 \cdot \left((-1)^k - 1\right)}{k^2 \cdot \pi^2} = \begin{cases} \frac{2 \cdot A_0}{k^2 \cdot \pi^2}, \text{ha k páratlan} \\ 0, \text{ha k páros} \end{cases}$$

- $I_k^B = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt = \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt =$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[-\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\left[t \cdot \left(-\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right) \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \left(-\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right) dt \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[-\frac{\cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}{k \cdot \omega_0} - \frac{\cos(0)}{k \cdot \omega_0} \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\left[t \cdot \left(-\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{(k \cdot \omega_0)^2} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[\frac{1}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} - \frac{\cos(k \cdot \pi)}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[\left[\frac{T}{2} \cdot \left(-\frac{\cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}{k \cdot \omega_0} \right) + \frac{1}{k \cdot \omega_0} \right] + \left[\frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{(k \cdot \omega_0)^2} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[\frac{1}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} - \frac{\cos(k \cdot \pi)}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[-\frac{T}{2} \cdot \frac{\cos(k \cdot \pi)}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} + \frac{1}{k \cdot \omega_0} + \underbrace{\frac{\sin\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}{(k \cdot \omega_0)^2} - 0}_{0} \right] =$$

$$= \frac{A_0}{k \cdot \pi} - \frac{A_0 \cdot (-\cos(k \cdot \pi))}{k \cdot \pi} + \frac{A_0 \cdot (\cos(k \cdot \pi))}{k \cdot \pi} = \frac{A_0}{k \cdot \pi}$$

Tehát:

$$I_0 = \frac{A_0}{4}$$

$I_k^A = \frac{2 \cdot A_0}{k^2 \cdot \pi^2}$, ha k páratlan, egyébként 0

$$I_k^B = \frac{A_0}{k \cdot \pi}$$

$$i_s(t) = \frac{A_0}{4} + \frac{2 \cdot A_0}{\pi^2} \cdot \cos(1 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{A_0}{\pi} \cdot \sin(1 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + \frac{A_0}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) +$$

$$+ \frac{2 \cdot A_0}{9 \cdot \pi^2} \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{A_0}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + \frac{A_0}{4 \cdot \pi} \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$$A_0 = 0{,}4\, mA$$

$$i_s(t) = 0{,}1 + 0{,}081 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + 0{,}127 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + 0 + 0{,}0636 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) +$$

$+0{,}009 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0{,}042 \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + 0{,}031 \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t)$ ű

Fourier-sor komplex alak:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k^c \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 13{,}228 \frac{krad}{s}$ $\quad T = 0{,}475\, ms$ $\quad A_0 = 0{,}4\, mA$

Együtthatók kiszámítása:

$$I_0^c = I_0 = 0{,}1$$

$$I_k^c = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A_0 - A_0 \cdot \frac{2 \cdot t}{T} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt =$$

$$= \frac{A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{A_0}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt =$$

$$= \frac{A_0}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot\frac{T}{2}}}{-j\cdot k\cdot\omega_0} - \frac{1}{-j\cdot k\cdot\omega_0}\right] - \frac{2\cdot A_0}{T^2} \cdot \left\{\left[t \cdot \frac{e^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}}{-j\cdot k\cdot\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}}{-j\cdot k\cdot\omega_0} dt\right\} =$$

$$= \frac{A_0}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot\frac{T}{2}}}{-j\cdot k\cdot\omega_0} + \frac{1}{j\cdot k\cdot\omega_0}\right] - \frac{2\cdot A_0}{T^2} \cdot \left\{\frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot\frac{T}{2}}}{-j\cdot k\cdot\omega_0} - \left[\frac{e^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}}{(-j\cdot k\cdot\omega_0)^2}\right]_0^{\frac{T}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{A_0}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}}{-j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}} + \frac{1}{j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}}\right] - \frac{2\cdot A_0}{T^2} \cdot \left\{\frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}}{-j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}} - \left[\frac{e^{-j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}}{k^2\cdot\frac{4\cdot\pi^2}{T^2}} - \frac{1}{k^2\cdot\frac{4\cdot\pi^2}{T^2}}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{A_0\cdot e^{-j\cdot k\cdot\pi}}{j\cdot 2\cdot k\cdot\pi} + \frac{A_0}{j\cdot 2\cdot k\cdot\pi} + \frac{A_0\cdot e^{-j\cdot k\cdot\pi}}{j\cdot 2\cdot k\cdot\pi} + \frac{A_0\cdot e^{-j\cdot k\cdot\pi}}{2\cdot k^2\cdot\pi^2} - \frac{A_0}{2\cdot k^2\cdot\pi^2} =$$

$$= \frac{A_0}{j\cdot 2\cdot k\cdot\pi} + \frac{A_0\cdot(-1)^k}{2\cdot k^2\cdot\pi^2} - \frac{A_0}{2\cdot k^2\cdot\pi^2} = \begin{cases} \frac{A_0}{j\cdot 2\cdot k\cdot\pi}, \textit{ha k páros} \\ \frac{A_0}{j\cdot 2\cdot k\cdot\pi} - \frac{A_0}{k^2\cdot\pi^2}, \textit{ha k páratlan} \end{cases}$$

$k = \pm 1$

$$I_1^c = \frac{A_0}{j\cdot 2\cdot\pi} - \frac{A_0}{\pi^2} = -0{,}0405 - j \cdot 0{,}0637 = 0{,}0755 \cdot e^{-j\cdot 2{,}1371}$$

$$I_{-1}^c = 0{,}0755 \cdot e^{j\cdot 2{,}1371}$$

$k = \pm 2$

$$I_2^c = \frac{A_0}{j\cdot 4\cdot\pi} = 0 - j \cdot 0{,}318 = 0{,}318 \cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{-2}^c = 0{,}318 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$k = \pm 3$

$$I_3^c = \frac{A_0}{j\cdot 6\cdot\pi} - \frac{A_0}{9\cdot\pi^2} = 0{,}0045 - j \cdot 0{,}0212 = 0{,}217 \cdot e^{-j\cdot 1{,}78}$$

$$I_{-3}^c = 0{,}217 \cdot e^{j\cdot 1{,}78}$$

$k = \pm 4$

$$I_4^c = \frac{A_0}{j\cdot 8\cdot\pi} = 0 - 0{,}00159 \cdot j = 0{,}00159 \cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{-4}^c = 0{,}00159 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$$

Ez alapján a Fourier sor:

$$x(t) = 0{,}1 + 0{,}0755 \cdot e^{j\cdot(\omega_0\cdot t - 2{,}1371)} + 0{,}0755 \cdot e^{j\cdot(\omega_0\cdot t + 2{,}1371)} + 0{,}318 \cdot e^{j\cdot\left(\omega_0\cdot t - \frac{\pi}{2}\right)} +$$

$$+ 0{,}318 \cdot e^{j\cdot\left(\omega_0\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)} + 0{,}217 \cdot e^{j\cdot(\omega_0\cdot t - 1{,}78)} + 0{,}217 \cdot e^{j\cdot(\omega_0\cdot t + 1{,}78)} + 0{,}00159 \cdot e^{j\cdot\left(\omega_0\cdot t - \frac{\pi}{2}\right)} +$$

$$+ 0{,}00159 \cdot e^{j\cdot\left(\omega_0\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{T} = 13{,}228 \frac{krad}{s}$$

1.2. rész

A gerjesztés effektív értéke pontosan

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(A_0 - \frac{2\cdot A_0}{T}t\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\left(A_0^2 - \frac{4\cdot A_0^2}{T}\cdot t + \frac{4\cdot A_0^2}{T^2}\cdot t^2\right)dt} = \sqrt{\frac{A_0^2}{T}\cdot\frac{T}{2} - \frac{4\cdot A_0^2}{T^2}\cdot\frac{\left(\frac{T}{2}\right)^2}{2} + \frac{4\cdot A_0^2}{T^3}\cdot\frac{\left(\frac{T}{2}\right)^3}{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{A_0^2}{2} - \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{6}} = \frac{A_0}{\sqrt{6}} = 0{,}1633\ mA$$

A gerjesztés értéke a Fourier polinomból:

$$I_{eff,Fourier} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

Ez csak kezdőfázisos alakra igaz, ezért ehhez használnunk kell a következő azonosságot:

$$a\cdot sin(x) + b\cdot cos(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$$

$k = 1$-re: $I_1 = \sqrt{0{,}081^2 + 0{,}127^2} = 0{,}15$

$k = 2$-re: $I_2 = 0{,}0636$

$k = 3$-ra: $I_3 = \sqrt{0{,}009^2 + 0{,}042^2} = 0{,}042953$

$k = 4$-re: $I_4 = 0{,}031$

Tehát: $I_{eff,Fourier} = \sqrt{0{,}1^2 + \frac{0{,}15^2}{2} + \frac{0{,}0636^2}{2} + \frac{0{,}042953^2}{2} + \frac{0{,}031^2}{2}} = 0{,}157\ mA$

Relatív hiba: $H = \frac{0{,}1633 - 0{,}157}{0{,}1633}\cdot 100\% = 3{,}858\%$

1.3 rész

Hálózati egyenletek

1, $i_s = \frac{U_{c1}}{6\cdot R} + C\cdot\dot{U}_{c1} + g\cdot U_v + \frac{U_{c1}-U_v}{2\cdot R}$

2, $\frac{U_v}{3\cdot R} + \frac{U_v - U_{c1}}{2\cdot R} + \frac{U_v - U_{c2}}{4\cdot R} = 0$

3, $\frac{U_{c2}}{R} + 6\cdot C\cdot\dot{U}_{c2} + \frac{U_{c2}-U_v}{4\cdot R} - g\cdot U_v = 0$

4, $i = i_s - \frac{U_{c1}}{6\cdot R}$

MAPLE programmal rendezve az egyenleteket megkapjuk az állapotváltozós leírás normálalakját:

```
restart;
e1 := is = Uc1/(6·R) + C·Uc1d + g·Uv + (Uc1-Uv)/(2·R);
e2 := Uv/(3·R) + (Uv-Uc1)/(2·R) + (Uv-Uc2)/(4·R) = 0;
e3 := Uc2/R + 6·C·Uc2d + (Uc2-Uv)/(4·R) - g·Uv = 0;
e4 := i = is-Uc1/(6·R);
Uc1d := solve(e1, Uc1d);
```

$Uc2d := solve(e3, Uc2d);$
$Uv := solve(e2, Uv);$
$R := 25;$
$C := 0.01;$
$g := 0.08;$
$i := solve(e4, i);$
$Uc1d$

$$-5.435897437\,Uc1 - 1.384615385\,Uc2 + 100.0000000\,is$$

$Uc2d$

$$0.6923076925\,Uc1 - 0.4871794871\,Uc2$$

i

$$is - \frac{1}{150}\,Uc1$$

$$\dot{U}_{c1} = -5{,}436 \cdot U_{c1} - 1{,}385 \cdot U_{c2} + 100 \cdot i_s$$

$$\dot{U}_{c2} = 0{,}6923 \cdot U_{C1} - 0{,}487 \cdot U_{c2}$$

$$i = i_s - \frac{1}{150} \cdot U_{c1}$$

Koherens egységrendszer: $[k\Omega, mA, V, \mu F, ms, \frac{krad}{s}, H, ms$ (siemens)]

Az egyenletek alapján:

$$A = \begin{pmatrix} -5{,}436 & -1{,}385 \\ 0{,}69 & -0{,}487 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -0{,}0067 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 1$$

A mátrix sajátértékeinek meghatározása MATLAB-bal:

```
>>A = [-5.436  - 1.385; 0.69  - 0.487]
>>[la] = eig(A)
```

$$\lambda_1 = -5{,}2347, \lambda_2 = -0{,}6833$$

Mivel minden sajátérték negatív, ezért a rendszer asszimptotikusan stabilis, így létezik az átviteli karakterisztika.

Meghatározása MATLAB-bal:

```
>>[szam,nev]=ss2tf(A,B,C,D)
```

$$szam = 1 \quad 5{,}2531 \quad 3{,}2805$$

$$nev = 1 \quad 5{,}9231 \quad 3{,}6069$$

Tehát az átviteli karakterisztika:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{(j \cdot \omega)^2 + 5{,}2531 \cdot j \cdot \omega + 3{,}2805}{(j \cdot \omega)^2 + 5{,}9231 \cdot j \cdot \omega + 3{,}6069}$$

1.4. rész

A válasz Fourier-polinomjának meghatározása

A gerjesztés Fourier-polinomja:

$i_s(t) = 0{,}1 + 0{,}081 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + 0{,}127 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + 0 + 0{,}0636 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) +$

$+0{,}009 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0{,}042 \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + 0{,}031 \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t)$

$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 13{,}228 \frac{krad}{s}$ $\quad\quad$ $T = 0{,}475\ ms$

$\omega = 0$

$$0{,}1 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}1 \cdot \frac{0+0+3{,}2805}{0+0+3{,}6069} = 0{,}0909$$

$\omega = \omega_0 = 13{,}228 \frac{krad}{s}$

$$0{,}081 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}081 \cdot \frac{174{,}98 \cdot j^2 + 69{,}49 \cdot j + 3{,}2805}{174{,}98 \cdot j^2 + 78{,}35 \cdot j + 3{,}6069} = 0{,}0795 \cdot e^{j \cdot 2535°}$$

$$0{,}127 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}127 \cdot \frac{174{,}98 \cdot j^2 + 69{,}49 \cdot j + 3{,}2805}{174{,}98 \cdot j^2 + 78{,}35 \cdot j + 3{,}6069} = 0{,}1248 \cdot e^{j \cdot 2{,}535°}$$

$\omega = 2 \cdot \omega_0 = 26{,}456 \frac{krad}{s}$

$$0{,}0636 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}0636 \cdot \frac{699{,}92 \cdot j^2 + 138{,}976 \cdot j + 3{,}2805}{699{,}92 \cdot j^2 + 156{,}7 \cdot j + 3{,}6069} = 0{,}0633 \cdot e^{j \cdot 1{,}4°}$$

$\omega = 3 \cdot \omega_0 = 39{,}684 \frac{krad}{s}$

$$0{,}009 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}009 \cdot \frac{1574{,}82 \cdot j^2 + 208{,}46 \cdot j + 3{,}2805}{1574{,}82 \cdot j^2 + 235{,}05 \cdot j + 3{,}6069} = 0{,}00898 \cdot e^{j \cdot 0{,}95°}$$

$$0{,}042 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}042 \cdot \frac{1574{,}82 \cdot j^2 + 208{,}46 \cdot j + 3{,}2805}{1574{,}82 \cdot j^2 + 235{,}05 \cdot j + 3{,}6069} = 0{,}0419 \cdot e^{j \cdot 0{,}95°}$$

$\omega = 4 \cdot \omega_0 = 52{,}912 \frac{krad}{s}$

$$0{,}031 \cdot H(j \cdot \omega) = 0{,}031 \cdot \frac{2799{,}679 \cdot j^2 + 277{,}95 \cdot j + 3{,}2805}{2799{,}679 \cdot j^2 + 313{,}4 \cdot j + 3{,}6069} = 0{,}0309 \cdot e^{j \cdot 0{,}719°}$$

A válasz Fourier-polinomja tehát:

$u(t) = 0{,}0909 + 0{,}0795 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + 2{,}535°) + 0{,}1248 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + 2{,}535°) +$

$+0{,}0633 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t + 1{,}4°) + 0{,}00898 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t + 0{,}95°) +$

$+0{,}0419 \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t + 0{,}95°) + 0{,}0309 \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t + 0{,}719°)$

A válasz effektív értéke:

$$U_{eff,Fourier} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

Ez csak kezdőfázisos alakra igaz, ezért ismét használnunk kell a következő azonosságot:

$$a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

k = 1-re: $\quad I_1 = \sqrt{0{,}0798^2 + 0{,}1248^2} = 0{,}148$

k = 2-re: $\quad I_2 = 0{,}0633$

$k = 3$-ra: $\quad I_3 = \sqrt{0{,}00898^2 + 0{,}0419^2} = 0{,}04285$

$k = 4$-re: $\quad I_4 = 0{,}0309$

Tehát: $U_{eff,Fourier} = \sqrt{0{,}0909^2 + \frac{0{,}148^2}{2} + \frac{0{,}0633^2}{2} + \frac{0{,}04285^2}{2} + \frac{0{,}0309^2}{2}} = 0{,}1504\ mA$

2. feladat

2.1. rész

$$i(t) = \left(A_0 - A_0 \cdot \frac{2 \cdot t}{T}\right) \cdot \left(\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right)\right)$$

$$\mathcal{F}\{i(t)\} = \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A_0 - A_0 \cdot \frac{2\cdot t}{T}\right) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt = \int_0^{\frac{T}{2}} A_0 \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} A_0 \cdot \frac{2t}{T} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt =$$

$$= \left[A_0 \cdot \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2\cdot A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt = \left[A_0 \cdot \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2\cdot A_0}{T} \cdot \left[\left[t \cdot \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega} dt\right] =$$

$$= \left[A_0 \cdot \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2\cdot A_0}{T} \cdot \left[t \cdot \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j\cdot\omega} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt =$$

$$= A_0 \cdot \left(\frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t} - 1}{-j\cdot\omega}\right) - \frac{2\cdot A_0}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot t}}{-j\cdot\omega} - 0 - \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} - 1}{(j\cdot\omega)^2}\right) =$$

$$= \frac{A_0}{j\cdot\omega} \cdot \left(1 - e^{j\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}}\right) + \frac{A_0}{j\cdot\omega} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} + \frac{2\cdot A_0}{T\cdot(j\cdot\omega)^2} \cdot \left(e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{A_0}{j\cdot\omega} + \frac{2\cdot A_0}{T\cdot(j\cdot\omega)^2} \cdot \left(e^{-j\cdot\omega\cdot\frac{T}{2}} - 1\right)$$

$I_0 = 0{,}4 \qquad\qquad T = 0{,}475$

$$I(j\cdot\omega) = \frac{0{,}4}{j\cdot\omega} + \frac{1{,}68 \cdot e^{-0{,}2375\cdot j\cdot\omega}}{(j\cdot\omega)^2} - \frac{1{,}68}{(j\cdot\omega)^2}$$

2.2. rész

Ábrázoláshoz egyszerűbb alak

$$I(j\cdot\omega) = \frac{0{,}8421 \cdot \left(0{,}475 \cdot j \cdot \omega + 2 \cdot e^{-0{,}2375\cdot j\cdot\omega} - 2\right)}{(j\cdot\omega)^2}$$

Ábrázolás MATLAB-bal:

$>> om = -198 : 0.01 : 198$

$>> Iom = \left(0.8421.^* \left(0.475.^* j.^* + 2.^* \exp(-0.2375.^* j.^* om) - 2\right)\right)./(j.^* om).\hat{}2$

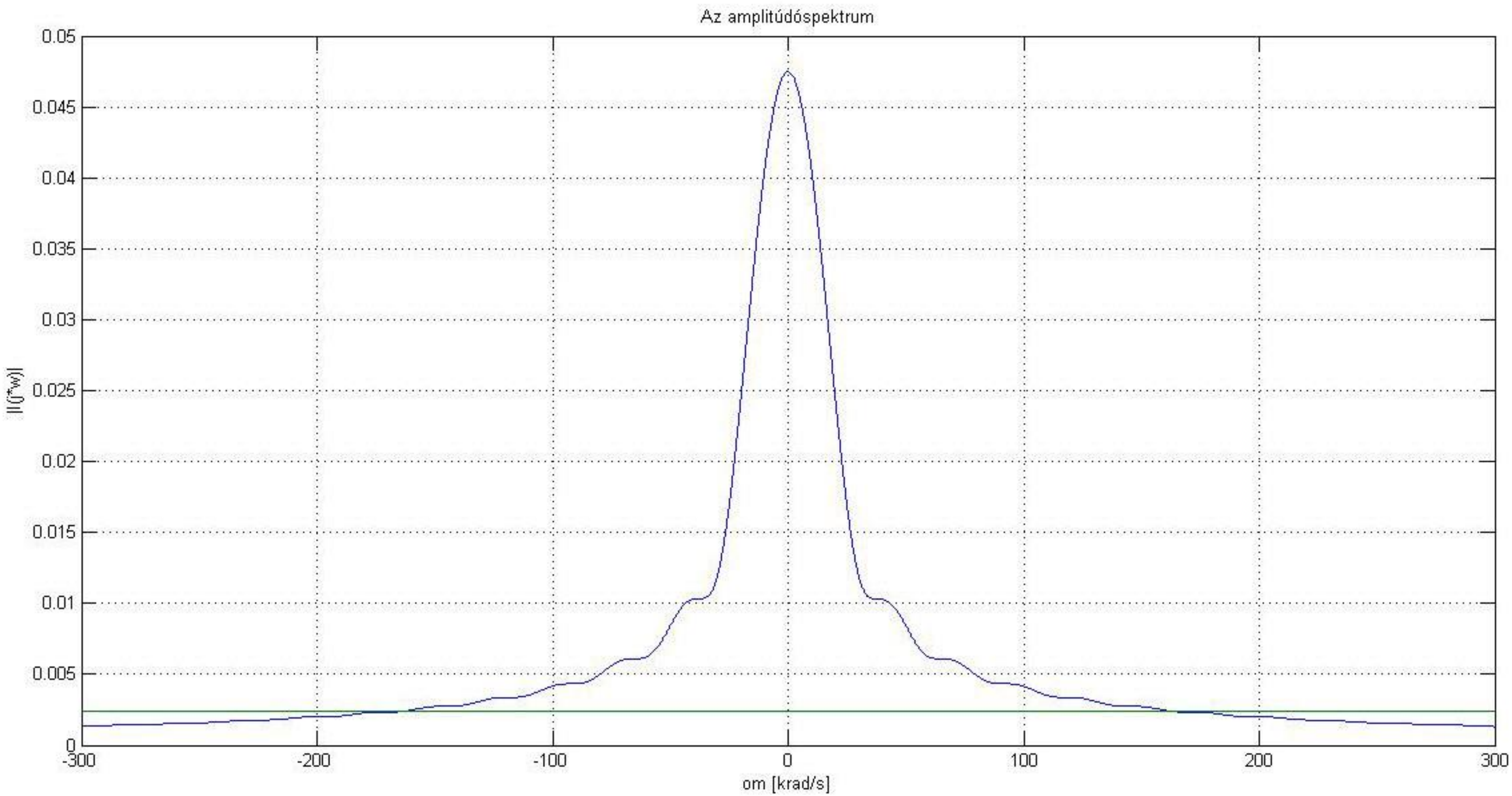
$>> plot\left(om, abs(Iom), om, 0.05.^* \max\left(abs(Iom)\right)^* ones\left(size(om)\right)\right)$

$>> grid$

Az amplitúdóspektrum maximuma $\omega_1 = 0\frac{krad}{s}$-nál van, értéke 0,0475.

MATLAB segítségével megfelelő nagyítással leolvasható, hogy a jel az $\omega_2 = 164{,}25\frac{krad}{s}$ érték felett kerül a maximumának 5%-a alá. Így a jel sávszélessége $\Delta\omega_x = \omega_2 - \omega_1 = 164{,}25\frac{krad}{s}$-nak adódik.

$(\varepsilon = 0{,}05)$


Az amplitúdóspektrum
|I(j*w)|
om [krad/s]
0.05
0.045
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-300
-200
-100
0
100
200
300

2.3. rész

A válasz komplex spektruma

$$Y(j\cdot\omega) = H(j\cdot\omega)\cdot I(j\cdot\omega)$$

$$Y(j\cdot\omega) = \frac{(j\cdot\omega)^2 + 5{,}2531\cdot j\cdot\omega + 3{,}2805}{(j\cdot\omega)^2 + 5{,}9231\cdot j\cdot\omega + 3{,}6069}\cdot\left(\frac{0{,}4}{j\cdot\omega} + \frac{1{,}68\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot 0{,}2375}}{(j\cdot\omega)^2} - \frac{1{,}69}{(j\cdot\omega)^2}\right) =$$

$$= \frac{0{,}4\cdot\left((j\cdot\omega)^2+5{,}2531\cdot j\cdot\omega+3{,}2805\right)}{(j\cdot\omega)^3+5{,}9231\cdot(j\cdot\omega)^2+3{,}6069\cdot j\cdot\omega} + \frac{1{,}68\cdot\left((j\cdot\omega)^2+5{,}2531\cdot j\cdot\omega+3{,}2805\right)}{(j\cdot\omega)^4+5{,}9231\cdot(j\cdot\omega)^3+3{,}6069\cdot(j\cdot\omega)^2}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot 0{,}2375} -$$

$$- \frac{1{,}68\cdot\left((j\cdot\omega)^2+5{,}2531\cdot j\cdot\omega+3{,}2805\right)}{(j\cdot\omega)^4+5{,}9231\cdot(j\cdot\omega)^3+3{,}6069\cdot(j\cdot\omega)^2}$$

3.1. rész

Mivel a rendszer kauzális, ezért az átviteli karakterisztikából adódik az átviteli függvény $j\cdot\omega = s$ helyettesítéssel.

$$H(s) = \frac{s^2 + 5{,}2531\cdot s + 3{,}2805}{s^2 + 5{,}9231\cdot s + 3{,}6069}$$

Pólusok: ahol az átviteli függvény értéke ∞, tehát a nevező 0

$$s^2 + 5{,}9231\cdot s + 3{,}6069 = 0$$

$$p_1 = -5{,}234$$

$$p_2 = -0{,}6891$$

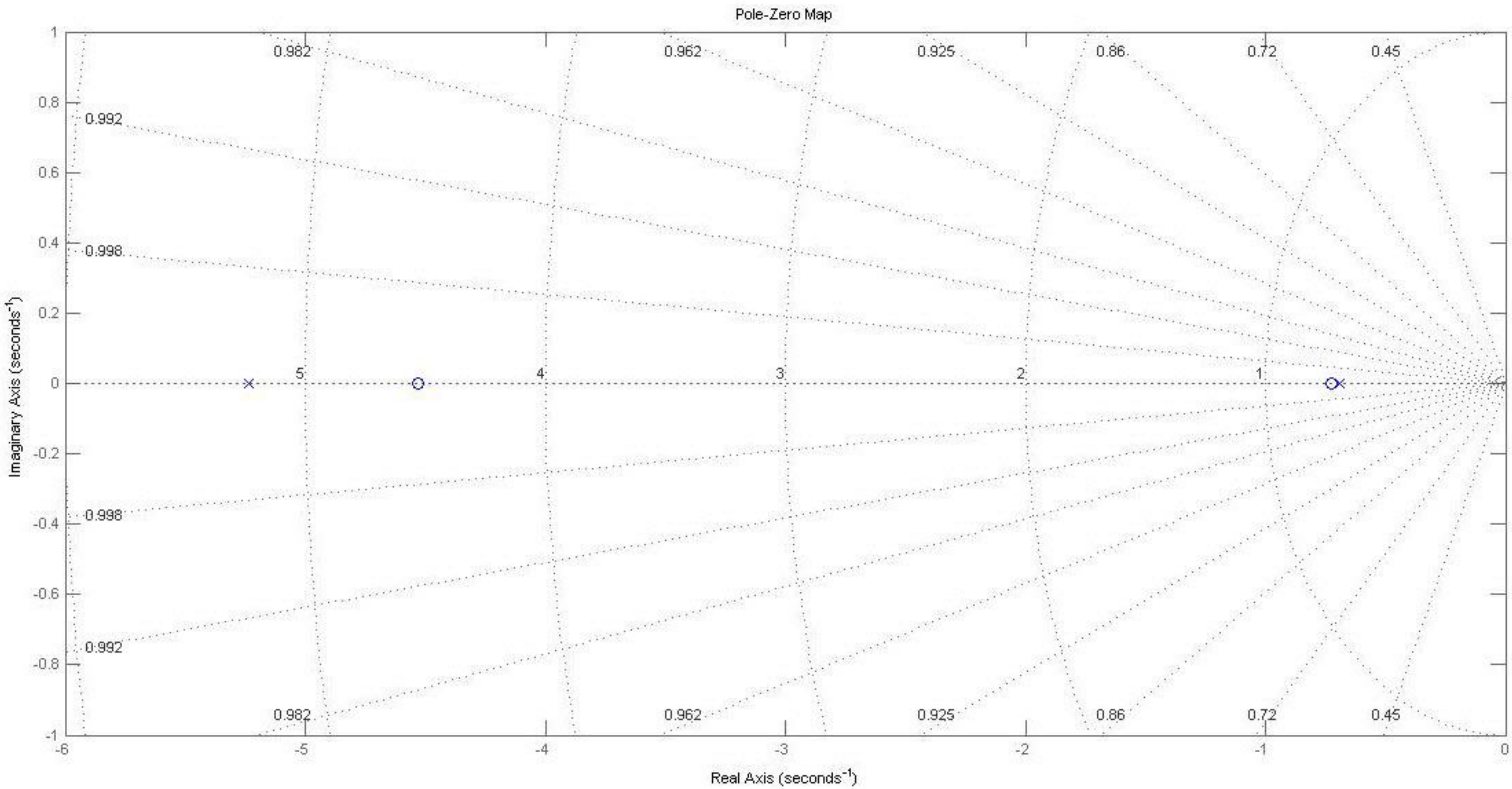
Zérusok: ahol az átviteli függvény értéke zérus, tehát a számláló 0

$$z_1 = -4{,}5287$$

$$z_2 = 0{,}7244$$

Ábrázolás MATLAB-bal:

```
>> pzmap(szam,nev)
>> grid
```



Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
0.982
0.962
0.925
0.86
0.72
0.45
0.992
0.998
0.998
0.992
0.982
0.962
0.925
0.86
0.72
0.45
5
4
3
2
1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0

3.2. rész

Az impulzusválaszt az átviteli függvény inverz Laplace transzformálásával kaphatjuk meg.

Parciális törtekre bontás MATLAB segítségével:

$>> [r, p, k] = residue(szam, nev)$

$$r_1 = \begin{matrix} -0{,}6998 \\ 0{,}0298 \end{matrix} \qquad p = \begin{matrix} -5{,}234 \\ -0{,}6891 \end{matrix} \qquad k = 1$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 5{,}2531 \cdot s + 3{,}2805}{s^2 + 5{,}9231 \cdot s + 3{,}6069} = A + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2} = 1 + \frac{-0{,}6988}{s + 5{,}234} + \frac{0{,}0298}{s + 0{,}6891}$$

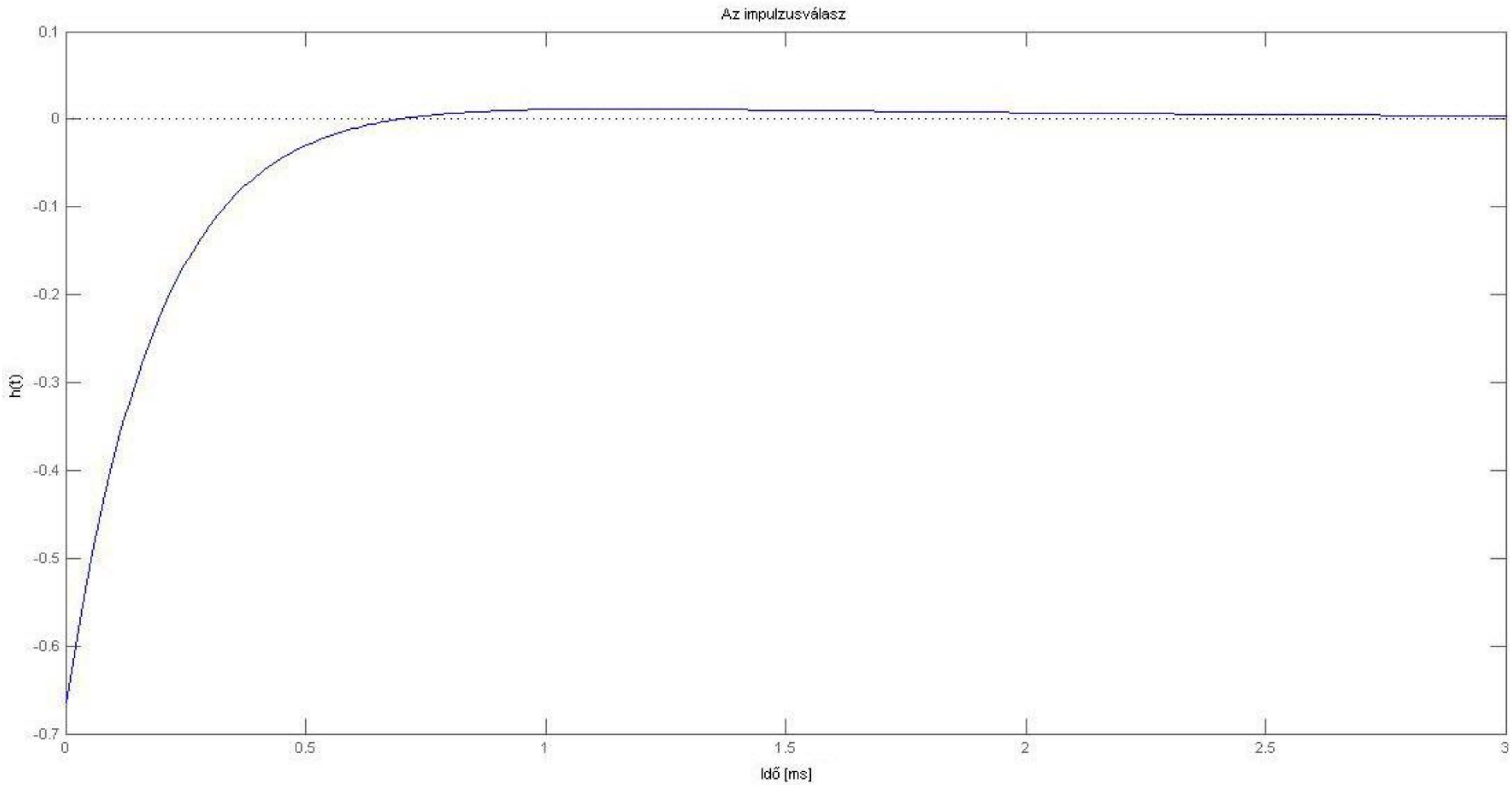
Az impulzusválasz alakja

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = k \cdot \delta(t) + (r_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + r_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}) \cdot \varepsilon(t)$$

$$h(t) = 1 \cdot \delta(t) - (0{,}6988 \cdot e^{-5{,}234 \cdot t} + 0{,}0298 \cdot e^{-0{,}6891 \cdot t}) \cdot \varepsilon(t)$$

Az impulzusválasz időfüggvényének ábrázolása:

$>> t = 0{:}\,0.01{:}\,3$
$>> ht = dirac(t) - 0.6988.^{*} \exp(-5.234 \cdot t) + 0.0298.^{*} \exp(-0.6981.^{*}\, t)$
$>> plot(t, ht)$
$>> grid$


Az impulzusválasz
h(t)
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Idő [ms]

3.3. rész

A rendszer válaszának meghatározása

$$Y(s) = H(s) \cdot I(s)$$

$$Y(s) = \frac{s^2+5{,}2531 \cdot s+3{,}2805}{s^2+5{,}9231 \cdot s+3{,}6069} \cdot \left(\frac{0{,}4}{s} + \frac{1{,}68 \cdot e^{-0{,}2375 \cdot s}}{s^2} - \frac{1{,}68}{s^2}\right) =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot s^2+2{,}1012 \cdot s+1{,}312}{s^3+5{,}9231 \cdot s^2+3{,}6069} + \frac{1{,}684 \cdot s^2+8{,}847 \cdot s+5{,}525}{s^4+5{,}9231 \cdot s^3+3{,}6069 \cdot s^2} \cdot e^{-0{,}2375 \cdot s} - \frac{1{,}684 \cdot s^2+8{,}847 \cdot s+5{,}525}{s^4+5{,}9231 \cdot s^3+3{,}6069 \cdot s^2}$$

Parciális törtekre bontás külön-külön MAPLE segítségével:

$$>> A := (4 * s^2 + 2.1012 * s + 1.3122)/(s^3 + 5.9231 * s^2 + 3.6069 * s)$$
$$>> A = convert(A, parfrac, s)$$

$$-\frac{0{,}0173}{s+0{,}689} + \frac{0{,}0535}{s+5{,}234} + \frac{0{,}364}{s}$$

$$>> B := (-1.6842 * s^2 - 8.8473 * s - 5.525)/(s^4 + 5.9231 * s^3 + 3.6069 * s^2)$$
$$>> B = convert(B, parfrac, s)$$

$$\left(\frac{0{,}106}{s+0{,}689} - \frac{0{,}043}{s+5{,}234} + \frac{1{,}532}{s^2} - \frac{0{,}0626}{s}\right) \cdot e^{-\frac{T}{2} \cdot s}$$

$$>> C := (1.6842 * s^2 + 8.8473 * s + 5.525)/(s^4 + 5.9231 * s^3 + 3.6069 * s^2)$$
$$>> C = convert(C, parfrac, s)$$

$$-\frac{0{,}106}{s+0{,}689} + \frac{0{,}043}{s+5{,}234} - \frac{1{,}532}{s^2} + \frac{0{,}0626}{s}$$

Inverz Laplace-transzformálás külön-külön:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (-0{,}0173 \cdot e^{-0{,}689 \cdot t} + 0{,}0535 \cdot e^{-5{,}234 \cdot t} + 0{,}364) \cdot \varepsilon(t)$$

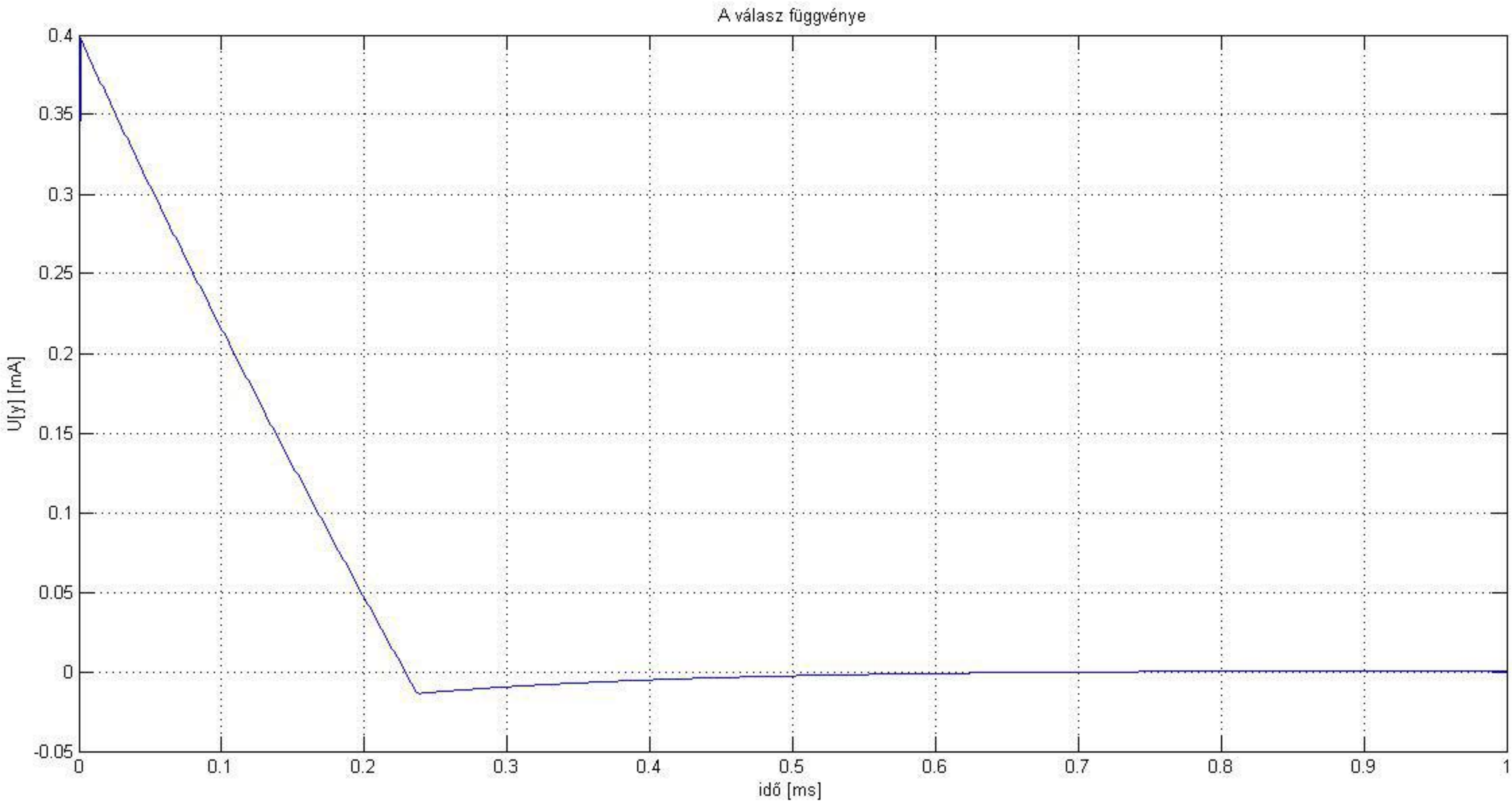
$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(0{,}106 \cdot e^{-0{,}689 \cdot (t-0{,}2375)} - 0{,}043 \cdot e^{-5{,}234 \cdot (t-0{,}2375)} + 1{,}532 \cdot (t-0{,}2375) - 0{,}0626\right) \cdot \varepsilon(t-0{,}2375)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (0.106 \cdot e^{-0{,}689 \cdot t} + 0{,}043 \cdot e^{-5{,}234 \cdot t} - 1{,}532 \cdot t + 0{,}0626) \cdot \varepsilon(t)$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$
$$= (-0{,}0173 \cdot e^{-0{,}689 \cdot t} + 0{,}0535 \cdot e^{-5{,}234 \cdot t} + 0{,}364) \cdot \varepsilon(t) +$$
$$+\left(0{,}106 \cdot e^{-0{,}689 \cdot (t-0{,}2375)} - 0{,}043 \cdot e^{-5{,}234 \cdot (t-0{,}2375)} + 1{,}532 \cdot (t-0{,}2375) - 0{,}0626\right) \cdot \varepsilon(t-0{,}2375) +$$
$$+(0.106 \cdot e^{-0{,}689 \cdot t} + 0{,}043 \cdot e^{-5{,}234 \cdot t} - 1{,}532 \cdot t + 0{,}0626) \cdot \varepsilon(t)$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
>> t = 0: 0.001: 1;
>>yt = (−0.0173.∗ exp(−0.689.∗ t) + 0.0535.∗ exp(−5.234.∗ t) + 0.364).∗ heaviside(t) + (0.106.∗
exp(−0.689.∗ (t − 0.2375)) − 0.043.∗ exp(−5.234.∗ (t − 0.2375)) + 1.532.∗ (t − 0.2375) − 0.0626).∗
heaviside(t − 0.2375) + (−0.106.∗ exp(−0.689.∗ t) + 0.043.∗ exp(−5.234.∗ t) − 1.532.∗ t + 0.0626).∗
heaviside(t)
>> plot(t, yt)
>> grid
```


A válasz függvénye
U[y] [mA]
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
idő [ms]