A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2012.11.22.)

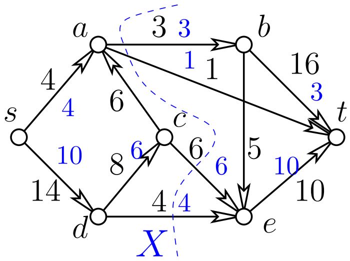
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton út.

   Ore tanult tétele szerint ha egy n pontú egyszerű G gráf bármely két nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor G-nek van Hamilton köre. (3 pont)
   Ha tehát u és v szomszédosak, akkor teljesül az Ore feltétel, van tehát G-ben Hamilton kör, (2 pont)
   ebből egy élt törölve pedig G Hamilton útját kapjuk. (1 pont)
   Ha pedig u és v nem szomszédosak, akkor húzzunk be közéjük egy élt, és nevezzük G'-nek a kapott gráfot. (2 pont)
   Mivel G'-re már teljesül az Ore feltétel, ezért G'-ben van Hamilton kör, (1 pont)
   ami még az uv él törlése után is tartalmazza G egy Hamilton útját. Ezzel mindkét esetben igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

2. Találjunk a fenti ábrán látható hálózat st-vágásai közül egy olyat, aminek a kapacitása (értéke) minimális.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult módon, a segédgráfban növelő utakat keresve. (1 pont)
   Az ábrán a kisebb méretben szedett számok a talált f folyam által felvett értékek, amit úgy kaptunk, hogy a 0 folyamból kiindulva az $sabt$, sat, $sdet$ és $sdcet$ utakon javítottunk $3, 1, 4$ ill. 6 egységnyit. (4 pont)
   Az f folyam nagysága 14, és ugyanennyi az ábrán szaggatott vonallal jelzett, az s-ből a segédgráfban elérhető pontok X halmaza által indukált st-vágás kapacitása is. (3 pont)

   Mivel minden st-vágás kapacitása legalább 14 az f folyam miatt, ezért a szóban forgó st-vágás valóban minimális kapacitású. (2 pont)

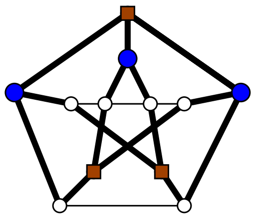
3. Jelölje $n \geq 2$ esetén G_n az a gráf, amit C_{2n}-ből úgy kapunk, hogy annak átellenes csúcsait éllel összekötjük. Határozzuk meg minden $n \geq 2$-re G_n kromatikus számát, $\chi(G_n)$-t.

   Ha n páratlan, akkor az átlók a páros C_{2n} gráf különböző színosztályai között futnak, így a C_{2n}-hez szükséges két szín elegendő G_n színezésére is, (3 pont)
   vagyis $\chi(G_n) = 2$. (1 pont)
   Ha pedig n páros, akkor egy átló a C_{2n} egyik ívével páratlan kört alkot, tehát G_n színezéséhez legalább 3 szín kell, azaz $\chi(G_n) \geq 3$. (2 pont)
   Ha $n = 2$, akkor $G_n = K_4$, tehát $\chi(G_2) = 4$. (1 pont)
   Az $n > 2$ esetben vegyük észre, hogy G_n összefüggő, nem páratlan kör és nem is teljes gráf, ezért az órán tanult Brooks tétel miatt $\chi(G_n) \leq \Delta(G_n) = 3$, (2 pont)
   tehát ebben az esetben $\chi(G_n) = 3$. (1 pont)

   A Brooks tétel alkalmazása kiváltható a G_n egy konkrét 3-színezésének megadásával, pl úgy, hogy egy átlót és két tőle diszjunkt átellenes élt azonos színűre színezünk, és ennek a párosításnak a „körbeforgatása” adja a további színosztályokat.

4. Síkbarajzolható-e a mellékelt ábrán látható 12 csúcsú gráf?

A Kuratowski tétel szerint egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz a K_5-tel vagy a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot. Úgy igazoljuk, hogy az ábrán látható gráf nem síkbarajzolható, hogy a $K_{3,3}$ egy soros bővítésével izomorf részgráfot mutatunk. (3 pont)



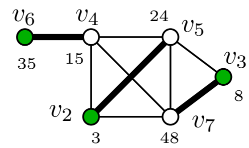
Egy ilyen részgráfot jeleztünk az ábrán vastag élekkel, a házak kiskockák, a kutak pettyek. (6 pont)

Tehát a kérdezett gráf nem síkbarajzolható. (1 pont)

Az is elfogadható megoldás, ha arra hivatkozunk, hogy az órán/gyakorlaton szerepelt, hogy a Petersen gráf még az után is tartalamazza $K_{3,3}$ soros bővítését, hogy egy „belső” élét töröljük. Márpedig ha a kérdezett gráfban töröljük a 4 pontú „vízszintes” út éleit, akkor az említett éltörölt Petersen gráf egy soros bővítését kapjuk, ami szintén nem síkba rajzolható. De akár a Wagner tétel szerinti élösszehúzásos bizonyítás is működik K_5-tel, csak trükkös.

5. Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7$ a G egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson v_i és v_j között él, ha i^2-1-nek és j^2-1-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a G-ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ($\nu(G)$-t és $\alpha(G)$-t), valamint a G-t lefogó pontok ill. élek minimális számát ($\tau(G)$-t és $\rho(G)$-t).

Az ábra a feladatban leírt gráfot mutatja, a v_i csúcsnál az i^2-1 érték is szerepel, kisebb számokkal. (3 pont)

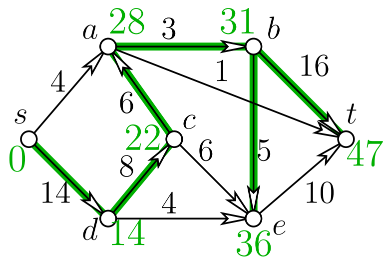


Gallai tételei szerint, ha G-ben nincs sem hurokél, sem izolált pont, akkor $\nu(G)+\rho(G) = |V(G)| = \alpha(G)+\tau(G)$. (2 pont)

A vastagon kihúzott élek G egy teljes párosítását alkotják, így $\nu(G) = 3$, (1 pont)
és a Gallai tétel miatt $\rho(G) = 6-3-3$. (1 pont)
A satírozott 3 csúcs G egy független ponthalmaza, (1 pont)
ráádásul ennél több független csúcs nincs G-ben, hisz a v_2, v_4, v_5, v_7 csúcsok alkotta klikk 4 csúcsából legfeljebb egy lehet a független ponthalmazban, azaz tetszőleges független ponthalmaz G-nek legalább 3 csúcsát nem tartalmazza. Tehát $\alpha(G) = 3$. (1 pont)
A Gallai tétel miatt $\tau(G) = 6-3-3$. (1 pont)

6. Állapítsuk meg, hogy a 2. feladathoz tartozó ábra meghatározta PERT problémában melyek azok a tevékenységek, amelyeket el tudunk kezdeni a lehető legkorábbi kezdési időpontjuknál valamivel később úgy, hogy ettől a késéstől a teljes feladat végrehajtásához szükséges minimális idő ne növekedjék.

A megadott gráf csúcsainak s, d, c, a, b, e, t egy topologikus sorrendje, így ebben a sorrendben állapítjuk meg az órán tanult módszer szerint a legkorábbi kezdési időket. (4 pont)



Ezeket az időket az egyes csúcsoknál jeleztük, valamint minden egyes csúcsnál megvastatítottuk azt az adott csúcsba befutó élt, ami miatt az adott tevékenység nem kezdődhet hamarabb. (3 pont)

Az adódott, hogy a feladatot legkorábban $t = 47$-ben lehet befejezni az *sdcabt* kritikus út miatt, más kritikus út nincs. Mivel pontosan a kritikus úton található tevékenységek azok, amelyeknek pontosan kell kezdődniük a feladat optimális végrehajtásához, egyedül az e tevékenység az, ami csúszhat valamennyit (konkrétan legfeljebb 1 időegységet) úgy, hogy ne veszélyeztesse a feladat időben történő befejezését. (3 pont)