

61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

$$\text{Ekkor minden } \epsilon > 0 \text{ esetén } \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}.$$

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX : várható érték, σX : szórás)

$$\text{Ha } X \in B(n, p), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= np \\ \sigma X &= \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in G(p), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{1}{p} \\ \sigma X &= \frac{\sqrt{1-p}}{p} \end{aligned}$$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in Po(\lambda), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \lambda \\ \sigma X &= \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in U(a, b), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{b+a}{2} \\ \sigma X &= \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in N(\mu, \sigma), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \mu \\ \sigma X &= \sigma \end{aligned}$$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in E(\lambda), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{1}{\lambda} \\ \sigma X &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!

Az X_1, X_2, \dots, X_p valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1]$ skalár-vektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(t) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i, \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke \underline{t} -ben a \underline{t} -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

- 1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
- 2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
- 3) Ha \underline{X} -nek *legalább* egyik komponensével a $-\infty$ -be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
- 4) Ha \underline{X} -nek *minden* komponensével a $+\infty$ -be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
- 5) Legyen $T : [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$ p -dimenziós téglalap és $\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^p$ p -dimenziós bináris vektor. Ekkor:

$$P(\underline{X} \in T) = \sum_{\underline{\epsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}(\underline{a\epsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\epsilon})) > 0; \quad j = \sum_{i=1}^p \epsilon_i$$

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$$\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a\text{-ra.}$$

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k -dimenziós perem- vagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k -dimenziós ($2 \leq k < p - 1$) vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$ indexkombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

- 6) $\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a\text{-ra}$ (Steiner-tétel),
- 7) $\mathbf{E}(X - a)^2 \geq \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
- 8) $\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2 \sigma^2(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$,
- 9) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

- 1) $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$,
- 2) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$,
- 3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

3. kisZH

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i|P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x|f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \cdot P(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x) dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke: $EY \geq$

0. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $P(Y > \delta) \leq \frac{EY}{\delta}$.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \in \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

81. Hol veszi fel a minimumát az $E(x - a)^2$ mennyiség?

$$\sigma^2(x)$$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $E(X^2)$?

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

83. $E(aX + bY) = ?$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

84. $\sigma(aX + b) = ?$

$$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$$

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $P(a \leq X < b; c \leq Y < d)$?

$$P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F_{X,Y}(a, c) + F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c)$$

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i|P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x|f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $Y = g(X)$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y) dy$$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz.

90. $\sigma^2(aX + b) = ?$

$$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$$

91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűségfüggvényből?

Az $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig kiintegráljuk.

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

$$1) f_{\underline{X}}(\underline{t}) \geq 0, \forall \underline{t}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{t}) dt_1 \dots dt_n = 1 \quad \left(\lim_{\forall t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1 \right)$$

95. Ha $X, Y \in Po(\lambda)$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $X + Y$?

Legyen $X \in Po(\lambda), Y \in Po(\mu), k = 0, 1, 2, \dots$, ekkor:

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\mu} =$$

$$= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda + \mu)} \Rightarrow X + Y \in Po(\lambda + \mu)$$

Tehát jelen esetben $X + Y \in Po(2\lambda)$.

3. kisZH

96. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $X + Y$?

Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor $X + Y \in N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Jelen esetben $X + Y \in N(0, \sqrt{2})$.

97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?

Az X_1, X_2, \dots, X_n diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall 2 \leq k \leq n$ -re és $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ esetén

$$P(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \prod_{i=1}^k P(X_{j_i} = x_{j_i})$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?

$X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$

103. Mikor független két valószínűségi változó?

X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall i, j$ -re

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

104. Egy n -dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?

$n - 1$

112. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

113. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$$

114. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1$$

115. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(x)$ -el!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \cdot \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

116. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = xy$$

117. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda(x+y)}$$

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du$?

Az $f_Y(v)$ sűrűségfüggvénnyel.

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv$?

Az $F_{X,Y}$ eloszlásfüggvénnyel.

120. Mivel egyenlő $\lim_{v \rightarrow \infty} F_{X,Y}(u, v)$?

$F_X(u)$