

38. Ha $X \in N(m, D)$, akkor milyen eloszlást követ $\frac{X-m}{D}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

58. Ha $X \in N(0, 1)$, akkor milyen eloszlást követ $aX + b$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

59. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlásfüggvénnyel!

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

60. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűségfüggvénnyel!

$$f_X(x) = \varphi_{m,D}(x) = \frac{1}{D} \varphi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX : várható érték, σX : szórás)

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in B(n, p), \text{ akkor} \quad & EX = np \\ & \sigma X = \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in G(p), \text{ akkor} \quad & EX = \frac{1}{p} \\ & \sigma X = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \end{aligned}$$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in Po(\lambda), \text{ akkor} \quad & EX = \lambda \\ & \sigma X = \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in U(a, b), \text{ akkor} \quad & EX = \frac{b+a}{2} \\ & \sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in N(\mu, \sigma), \text{ akkor} \quad & EX = \mu \\ & \sigma X = \sigma \end{aligned}$$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\begin{aligned} \text{Ha } X \in E(\lambda), \text{ akkor} \quad & EX = \frac{1}{\lambda} \\ & \sigma X = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$$\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - (E(X-a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

- 1) $\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - (E(X-a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (Steiner-tétel),
- 2) $\mathbf{E}(X-a)^2 \geq \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
- 3) $\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2 \sigma^2(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$,
- 4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X=c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

- 1) $\mathbf{E}(aX+bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$,
- 2) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$,
- 3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i| P(X=x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X=x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x| f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

3. kisZH

77. Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \cdot P(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x) dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke: $EY \geq 0$.

0. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $P(Y > \delta) \leq \frac{EY}{\delta}$.

81. Hol veszi fel a minimumát az $E(x - a)^2$ mennyiség?

$$\sigma^2(x)$$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $E(X^2)$?

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

83. $E(aX + bY) = ?$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

84. $\sigma(aX + b) = ?$

$$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$$

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x| f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $Y = g(X)$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y) dy$$

90. $\sigma^2(aX + b) = ?$

$$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$$