61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX: várható érték, σX: szórás)

Ha $X \in B(n,p)$, akkor $EX = np$

$\sigma X = \sqrt{np(1-p)}$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $\mathrm{X} \in \mathrm{G(p)}$, akkor $\mathrm{EX} = \frac{1}{\mathrm{p}}$

$\mathrm{\sigma X} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{p}}}{\mathrm{p}}$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in Po(\lambda)$, akkor $EX = \lambda$

$\sigma X = \sqrt{\lambda}$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in U(a,b)$, akkor $EX = \frac{b+a}{2}$

$\sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in N(\mu,\sigma)$, akkor $EX = \mu$

$\sigma X = \sigma$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in E(\lambda)$, akkor $EX = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma X = \frac{1}{\lambda}$

68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!

Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ skalár-vektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(t) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i,\ \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke $\underline{t}$ -ben a $\underline{t}$ -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
3) Ha $\underline{X}$-nek *legalább egyik* komponensével a $-\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
4) Ha $\underline{X}$-nek *minden* komponensével a $+\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
5) Legyen $T : [\underline{a}, \underline{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ p-dimenziós téga és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p-dimenziós bináris vektor. Ekkor:

$$P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}\left(\underline{a\varepsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\varepsilon})\right) > 0\,;\ j = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$$

Vagyis a téglalap csúcsaihoz tartozó eloszlásértékek megfelelően előjelezett összege soha nem negatív.

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \left(E(X-a)\right)^2 = EX^2 - (EX)^2\ \forall a$-ra.

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k-dimenziós perem- vagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1,X_2,\ldots,X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k-dimenziós ($2 \leq k < p-1$) vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p$ indexkombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

1) $\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \left(E(X-a)\right)^2 = EX^2 - (EX)^2\ \forall a$-ra (Steiner-tétel),
2) $\mathbf{E}(X-a)^2 \geq \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2\ \forall a \in \mathbb{R}$,
3) $\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)\ \forall a, b \in \mathbb{R}$,
4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

1) $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$,
2) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$,
3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \int_{\Omega} g(X)\, dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, d\,F_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum|x_i|P(X=x_i)$ sor konvergens. akkor ∃ várható érték, ami:

$$EX=\sum_i x_iP(X=x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int|x|f_X(x)\,dx<\infty$, akkor ∃ várható érték, ami:

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mathbf{E}X)^2\cdot\mathbf{P}(X=x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2\cdot f_X(x)\,dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y\geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke:$\mathbf{E}Y\geq 0$. Ekkor $\forall\delta>0$ esetén $\mathbf{P}(Y>\delta)\leq\frac{\mathbf{E}Y}{\delta}$.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i\in\underline{Y}:t_i)=\lim_{\forall X_i\notin\underline{Y}:t_i\to\infty}F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

81. Hol veszi fel a minimumát az $\mathbf{E}(x-a)^2$ mennyiség?

$\sigma^2(x)$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $E(X^2)$?

$\sigma^2(X)=\mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}^2(X)$

83. $\mathbf{E}(aX+bY)=$?

$\mathbf{E}(aX+bY)=a\mathbf{E}(X)+b\mathbf{E}(Y)$

84. $\sigma(aX+b)=$?

$\sigma(aX+b)=\sigma(aX)=a\sigma(X)$

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $P(a\leq X<b;c\leq Y<d$?

$P(a\leq X<b;c\leq Y<d)=F_{X,Y}(b,d)-F_{X,Y}(a,d)-F_{X,Y}(b,c)+F_{X,Y}(a,c)$.

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum|x_i|P(X=x_i)$ sor konvergens. akkor ∃ várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int|x|f_X(x)\,dx<\infty$, akkor ∃ várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $Y=g(X)$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X):=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\,dy\Rightarrow E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)f(y)\,dy$$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz. Ellenpélda:

Legyenek X_1 és X_2 olyan valószínűségi változók, melyek csak a $-1,0,+1$ értékeket vehetik fel az alábbi eloszlási táblázat szerint:

X_1/X_2	-1	0	$+1$	X_1 perem
-1	$0{,}125+\epsilon$	0	$0{,}125-\epsilon$	$0{,}25$
0	0	$0{,}5$	0	$0{,}5$
$+1$	$0{,}125-\epsilon$	0	$0{,}125+\epsilon$	$0{,}25$
X_2 perem	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}25$	1

ahol $0<\epsilon<0{,}125$ tetszőleges.

Ekkor $F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leq -1\\ 0{,}25, & \text{ha } -1<x\leq 0\\ 0{,}75, & \text{ha } 0<x\leq 1\\ 1, & \text{ha } 1<x\end{cases}$

90. $\sigma^2(aX+b)=$?

$\sigma^2(aX+b)=\sigma^2(aX)=a^2\sigma^2(X)$