Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
12. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.06.01.

1. feladat

Az $x[k]$ jel spektruma $X\left(e^{j\vartheta}\right) = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$. Határozzuk meg a jel sávszélességét, ha $\sigma = 0,1$.

Az amplitúdóspektrum maximuma a $\vartheta = 0$-ban van, ahol $X_{\max} = \left|X\left(e^{j\vartheta}\right)\right|\Big|_{\vartheta=0} = |\cos(0)| = 1$. Ebből következik, hogy az alsó határfrekvencia, $\vartheta_1 = 0$. A sávszélességet a $[0\dots\pi]$ intervallumon definiáltuk, ahol a fenti függvény abszolút értéke nem negatív. Ebből kifolyólag a felső határfrekvenciát az alábbi módon meghatározhatjuk:

$$
\begin{aligned}
\sigma X_{\max} &= \left|X\left(e^{j\vartheta}\right)\right| \\
\sigma \cdot 1 &= \cos\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right) \\
\cos^{-1}(\sigma) &= \frac{\vartheta_2}{2} \\
\vartheta_2 &= 2\cos^{-1}(0{,}1) \\
\vartheta_2 &= 2{,}941
\end{aligned}
$$

A sávszélesség tehát $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 2{,}941 - 0 = 2{,}941$.

2. feladat

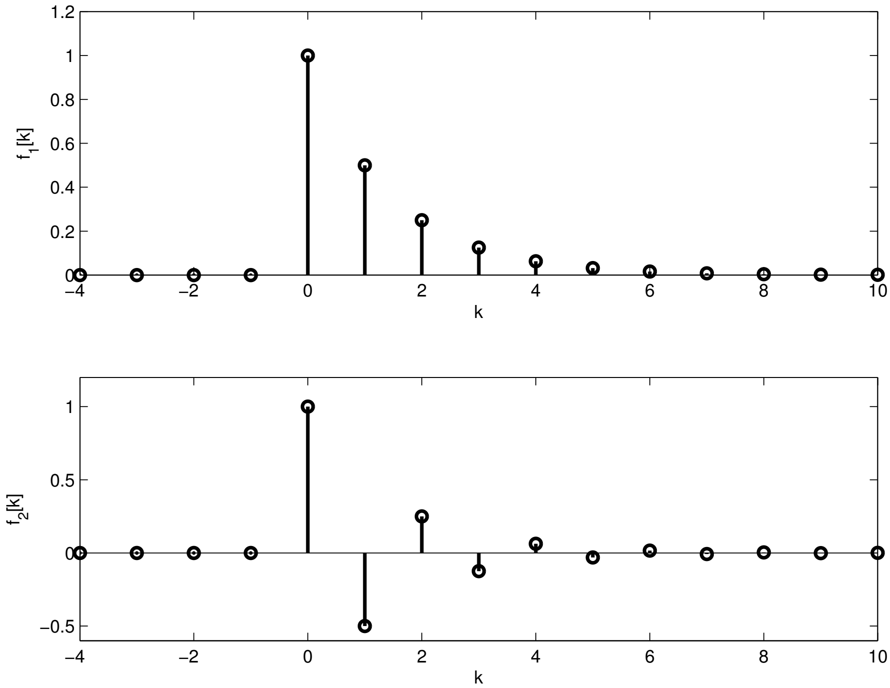
Hasonlítsuk össze az

$$f_1[k] = \varepsilon[k](0{,}5)^k$$

és az

$$f_2[k] = \varepsilon[k](-0{,}5)^k$$

DI jelek amplitúdóspektrumát!



1. ábra. Az $f_1[k]$ és az $f_2[k]$ DI jelek

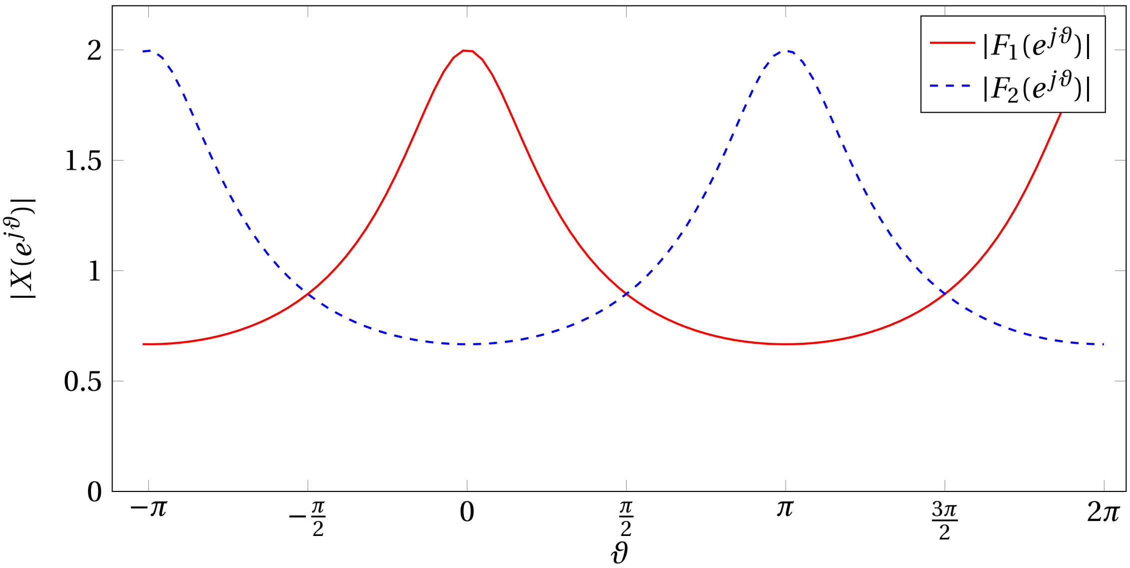
A transzformált kiszámítására vonatkozó összefüggés alapján

$$\mathscr{F}\{\varepsilon[k]q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(qe^{-j\vartheta}\right)^k = \frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}},$$

ha $|q| < 1$. Az első esetben $q = 0{,}5$; a második esetben $q = -0{,}5$.

$$|F_1(e^{j\vartheta})| = \left|\frac{1}{1-0{,}5\cos\vartheta + j0{,}5\sin\vartheta}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-0{,}5\cos\vartheta)^2 + (0{,}5\sin\vartheta)^2}}$$

$$|F_2(e^{j\vartheta})| = \left|\frac{1}{1+0{,}5\cos\vartheta - j0{,}5\sin\vartheta}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+0{,}5\cos\vartheta)^2 + (0{,}5\sin\vartheta)^2}}$$



Az eredmény szemléletesen következik abból a megfigyelésből is, hogy

$$f_2[k] = f_1[k] \cdot (-1)^k = f_1[k] \cdot \cos k\pi = f_1[k] \frac{e^{jk\pi} + e^{-jk\pi}}{2}.$$

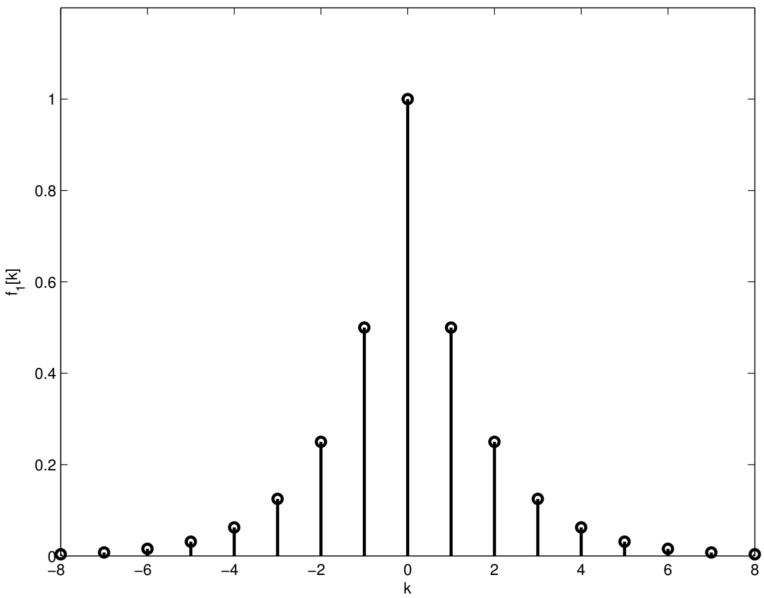
A modulációs tételből következik, hogy a piros görbe $\pm\pi$ körfrekvenciával való eltolása adja a kék görbét.

3. feladat

Határozzuk meg az

$$x[k] = q^{|k|}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad |q| < 1$$

nem belépő DI exponenciális jel spektrumát!



2. ábra. Az $x[k]$ DI jel

Az előző feladat eredményét használhatjuk, ha a jelet

$$x[k] = \varepsilon[-k]q^{-k} + \varepsilon[k]q^{k} - \delta[k],$$

alakban írjuk, ahol a harmadik tag korrekció, mivel a $k = 0$ mindkét előző tagban megjelenik. Az első tag transzformáltja $l = -m$ változócserével

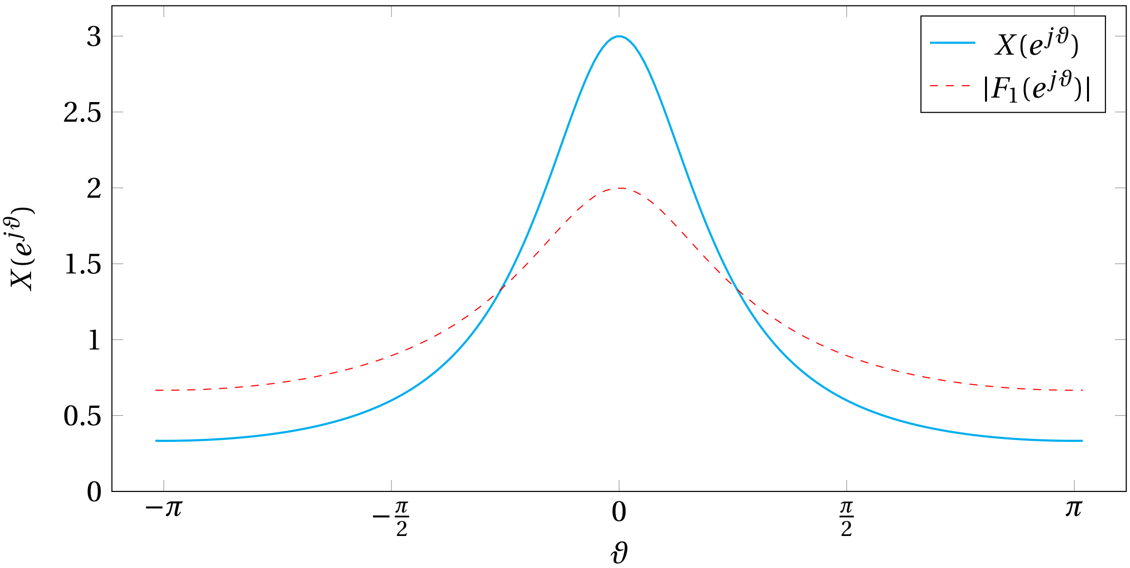
$$\mathscr{F}\{\varepsilon[-k]q^{-k}\} = \sum_{k=-\infty}^{0} q^{-k}e^{-j\vartheta k} = \sum_{l=0}^{\infty} q^{l}e^{j\vartheta l} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(qe^{j\vartheta}\right)^{l} = \frac{1}{1-qe^{j\vartheta}},$$

Az előző pont eredményét felhasználva

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1-qe^{j\vartheta}} + \frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}} - 1 = \frac{1-qe^{-j\vartheta}+1-qe^{j\vartheta}-(1-qe^{j\vartheta}-qe^{-j\vartheta}+q^2)}{1-qe^{j\vartheta}-qe^{-j\vartheta}+q^2}$$

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos\vartheta}.$$

A jel valós és páros, a spektrum tisztán valós és páros.


$X(e^{j\vartheta})$
$|F_1(e^{j\vartheta})|$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
ϑ
$X(e^{j\vartheta})$