

# Valószínűségszámítás

## Kiskérdések kidolgozása

### 1. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget!

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$$

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_i)$$

### 2. Bizonyítsa be, hogy ha $A \subseteq B$ , akkor $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ !

$B = A + \bar{A} \cdot B$  és  $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$ , így  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$ . Mivel  $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$ , már következik az állítás.

### 3. Bizonyítsa be, hogyha $A$ és $B$ függetlenek, akkor $A$ és $\bar{B}$ is függetlenek!

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) \Rightarrow \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) =$$

$$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow A, \bar{B} \text{ függetlenek.}$$

### 4. Bizonyítsa be, hogyha $A$ és $B$ függetlenek, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek!

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bar{A})(1 - \mathbf{P}(B)) =$$

$$= \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ függetlenek.}$$

### 5. Bizonyítsa be, ha $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$ , akkor $A$ minden eseménytől független!

Ha  $\mathbf{P}(A) = 0$ , akkor  $A = \emptyset \Rightarrow$  lásd 6. kérdés.

Ha  $\mathbf{P}(A) = 1$ , akkor  $A = \Omega \Rightarrow$  lásd 7. kérdés.

### 6. Bizonyítsa be, hogy a lehetetlen esemény minden eseménytől független!

$$\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \emptyset \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

### 7. Bizonyítsa be, hogy a biztos esemény minden eseménytől független!

$$\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(A) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \Omega \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

### 8. Mit nevezünk eseménytérnek?

Az eseménytér ( $\Omega$ ) a  $\mathcal{K}$  véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

### 9. Mit nevezünk elemi eseménynek?

Az elemi események ( $\omega$ ) a  $\mathcal{K}$  véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

### 10. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A + B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ !

Ez az 1. Boole-egyenlőtlenség.

$A + B = A + A \setminus B$ . Ez egy diszjunkt felbontás, és  $A \setminus B \subseteq A \Rightarrow \mathbf{P}(A \setminus B) \leq \mathbf{P}(A)$ .

A valószínűség  $\sigma$ -additivitása miatt:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A \setminus B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

### 11. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(AB) \geq 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{B})$ !

Ez a 2. Boole-egyenlőtlenség. A De Morgan azonosságból következik, hogy

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\overline{\bar{A} + \bar{B}}) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A} + \bar{B}) \geq 1 - (\mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(\bar{B}))$$

Ezt átalakítva az első Boole-egyenlőtlenséget kapjuk, tehát az állítás igaz.

### 12. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ !

Könnyen belátható, hogy  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ ,

illetve hogy  $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B)$

Ebből már kijön, hogy  $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

**13. Mi az esemény?**

Az esemény elemi események halmaza, az eseménytér részhalmaza.

**14.  $P(A + B + C) = ?$**

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

**15. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!**

Az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ha  $\forall i, j$ -re:

- 1)  $A_i \cdot A_j = \emptyset$
- 2)  $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$

**16. Mikor páronként független egy eseményrendszer?**

Az  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  események páronként függetlenek, ha  $\forall i \neq j$ -re:

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

**17. Mik az axiómái az  $\mathcal{F}$ -eseményrendszernek? (A  $\sigma$ -algebra definíciója.)**

A  $\mathcal{K}$  véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események  $\mathcal{F}$  rendszere a  $\sigma$ -algebra (eseményalgebra), ami kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1)  $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
- 3)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

**18. Mikor zárja ki az A esemény a B eseményt?**

Az A és B esemény egymást kizáróak, ha  $A \cdot B = \emptyset$ .

**19. Mondja ki a Bayes-tételt!**

Ha  $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  teljes eseményrendszer,  $P(A_i) > 0$  és  $B \in \mathcal{F}$ ,  $P(B) > 0$ , akkor:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k) P(A_k)}$$

**20. Definiálja az események teljes függetlenségének fogalmát!**

Az  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  események teljesen függetlenek, ha  $\forall k \in \{2, \dots, n\}$  és  $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  indexkombinációra  $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$ .

**21. Adja meg a valószínűség axiómáit!**

A valószínűség egy  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  halmazfüggvény, mely kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1)  $P(\Omega) = 1$
- 2) Ha  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  páronként egymást kizárják, akkor  $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

**22. Mikor vonja maga után az A esemény bekövetkezése a B eseményt?**

Az A esemény maga után vonja B eseményt, ha az A esemény részhalmaza a B eseménynek. Jelölés:  $A \subseteq B$

**23. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik minden eseménytől független!**

Az  $\emptyset$  és  $\Omega$  események minden  $A \in \mathcal{F}$  eseménytől függetlenek.

**24. Mondja ki a Poincare-formulát!**

Ha  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  tetszőlegesen, akkor:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \left( (-1)^{i+1} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \dots \cdot A_{j_i}) \right)$$

**25. Mondja ki a folytonossági tételt!**

- 1) Ha  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  olyan események, hogy:  $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , akkor:  

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$
- 2) Ha  $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , akkor:  $P(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$

**26. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik független a komplementétől!**

Az  $\emptyset$  és  $\Omega$  események minden  $A \in \mathcal{F}$  eseménytől függetlenek, és mivel ezek egymás komplementesei, ezért egymástól is.

**27. Definiálja az események függetlenségének fogalmát!**

Az  $A, B \in \mathcal{F}$  tetszőleges események függetlenek, ha  $P(AB) = P(A) \cdot P(B).$

**28. Bizonyítsa be, hogy  $P(ABC) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | AB)$ !**

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | AB) = P(A) \cdot \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(ABC)}{P(AB)} = P(ABC)$$

**29. Bizonyítsa be, hogy  $P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$ !**

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\begin{aligned} \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})} &= \frac{\frac{P(AB)}{P(A)} \cdot P(A)}{\frac{P(AB)}{P(A)} \cdot P(A) + \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} \cdot P(\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(AB) + P(\bar{A}B)} = \\ &= \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A | B) \end{aligned}$$

**30. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!**

Legyen  $A, B \in \mathcal{F}$  olyan események, hogy  $A$  tetszőleges és  $P(B) > 0$ . Akkor az  $A$  eseménynek a  $B$ -re vonatkoztatott feltételes valószínűségén a  $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$  számot értjük.

**31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!**

Az  $F_X(x) = Q_X((-\infty, x)) = P(A = \{\omega : X(\omega) < x\})$ ,  $x \in \mathbb{R}$  függvényt az  $X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.  $F_X$  értéke  $x$ -ben az  $x$ -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

**32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?**

Az  $F_X$  eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- 1)  $F_X$  monoton nő, azaz  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , ha  $x < y$ .
- 2)  $F_X$  balról folytonos, azaz  $\lim_{x \rightarrow y^-} F_X(x) = F_X(y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ -re,
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$  és  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

**33. Mi a binomiális eloszlás képlete?**

$X \in B(n, p)$

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

**34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?**

Ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  és  $np$  állandó, akkor  $B(n, p) \rightarrow Po(np)$ , vagyis a binomiális eloszlás  $k$ -adik tagja tart a Poisson-eloszlás  $k$ -adik tagjához.

**35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?**

A geometriai eloszlás ( $X \in G(p)$ ), mert  $P(X = m + k | X > m) = P(X = k) \forall k, m$ -re.

**36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?**

Az exponenciális eloszlás ( $X \in E(\lambda)$ ), mert  $P(X < x + t | X \geq x) = P(X < t) \forall 0 < x, t$ -re.

**37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?**

A binomiális eloszlással ( $X \in B(n, p)$ ).

**38. Ha  $X \in N(m, D)$ , akkor milyen eloszlást követ  $\frac{X-m}{D}$  ?**

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$ , azaz standard normális eloszlást követ.

**39. Ha  $Y \in U(0, 1)$ ,  $F$  invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz  $F^{-1}(Y)$  eloszlásfüggvénye?**

$F(y)$ , hiszen  $\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}(F(F^{-1}(U)) < F(y)) = \mathbf{P}(U < F(y)) = F(y)$ .

**40. Ha  $X$  folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor  $F_X(X)$  milyen eloszlású lesz?**

Egyenletes eloszlású ( $X \in U([a, b])$ ).

**41. Fejezze ki  $F_X$  eloszlásfüggvénnyel:  $\mathbf{P}(a < X \leq b) = ?$**

$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a + 0)$

**42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?**

$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$ , másrészt  $p_i = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i)$ .

Azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, melynek az ugróhelyei az  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  helyeken vannak és az ugrás nagysága rendre  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

**43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!**

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!**

Legyen  $X$  az  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett valószínűségi változó. Az  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $X$  sűrűségfüggvényének nevezzük, ha  $X$ -nek az  $F_X$  eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

**45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?**

Legyen  $X$  az  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

- 1)  $f_X(x) \geq 0$ ,
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$ .

**46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!**

$X \in U([a, b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

**47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!**

$X \in U([a, b])$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

**48. Mi a binomiális eloszlás módusza?**

Eloszlás móduszának nevezzük azt a  $k$ . tagot, amire  $p_k$  a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz  $[(n + 1)p]$ . (Ha egész, akkor a módusz egyenlő  $k = (n + 1)p - 1$  értékével, így két módusz van.)

**49. Fejezze ki  $F_X$  eloszlásfüggvénnyel:  $P(a < X < b) = ?$**

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a + 0)$$

**50. Mi a geometriai eloszlás képlete?**

$$X \in G(p)$$

$$p_k = P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1}p$$

**51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?**

Az  $X$  valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis  $\forall \omega \in \Omega$ -ra  $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ .

**52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?**

$$X \in E(\lambda)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

**53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?**

$$X \in E(\lambda)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

**54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?**

A tétel szerint  $P(X < x + t \mid X \geq x) = P(X < t) \forall 0 < x, t$ -re.

$X$  azért „örökifjú”, mert annak feltételes valószínűsége, hogy  $X$  legfeljebb  $x + t$ -ig él, (ha már  $x$ -et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy  $X$  legfeljebb  $t$  ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és  $t$  között ugyanaz a túlélési esély, mint  $x$  és  $x + t$  között.

**55. Fejezze ki  $F_X$  eloszlásfüggvénnyel:  $P(a \leq X \leq b) = ?$**

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a)$$

**56. Mi a Poisson eloszlás képlete?**

$$X \in Po(\lambda)$$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0$$

**57.  $P(X = a) = ?$**

Folytonos esetben  $\forall P(X = a) = 0$ .

**58. Ha  $X \in N(0, 1)$ , akkor milyen eloszlást követ  $aX + b$  ?**

Ha  $X$  folytonos valószínűségi változó, és  $t(x) = ax + b, a \neq 0$ , akkor az  $Y = t(X) = aX + b$  lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

**59. Fejezze ki az  $X \in N(m, D)$  eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlás-függvénnyel!**

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

**61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!**

Legyen  $X$  olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ( $\sigma^2 X < \infty$ ).

Ekkor minden  $\epsilon > 0$  esetén  $P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$ .

**62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!**

( $EX$ : várható érték,  $\sigma X$ : szórási)

$$\text{Ha } X \in B(n, p), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= np \\ \sigma X &= \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

**63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!**

$$\text{Ha } X \in G(p), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{1}{p} \\ \sigma X &= \frac{\sqrt{1-p}}{p} \end{aligned}$$

**64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!**

$$\text{Ha } X \in Po(\lambda), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \lambda \\ \sigma X &= \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

**65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!**

$$\text{Ha } X \in U(a, b), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{b+a}{2} \\ \sigma X &= \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

**66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!**

$$\text{Ha } X \in N(\mu, \sigma), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \mu \\ \sigma X &= \sigma \end{aligned}$$

**67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!**

$$\text{Ha } X \in E(\lambda), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{1}{\lambda} \\ \sigma X &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

**68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!**

Az  $X_1, X_2, \dots, X_p$  valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az  $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1]$  skálárvektor függvény, ahol  $F_{\underline{X}}(\underline{t}) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i, \forall i\})$ , azaz  $F_{\underline{X}}$  értéke  $\underline{t}$ -ben a  $\underline{t}$ -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

**69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?**

- 1)  $F_{\underline{X}}$  minden változójában monoton nő,
- 2)  $F_{\underline{X}}$  minden változójában balról folytonos,
- 3) Ha  $\underline{X}$ -nek *legalább* egyik komponensével a  $-\infty$ -be tartunk, akkor  $F_{\underline{X}}$  értéke 0 lesz.
- 4) Ha  $\underline{X}$ -nek *minden* komponensével a  $+\infty$ -be tartunk, akkor  $F_{\underline{X}}$  értéke 1 lesz.
- 5) Legyen  $T : [\underline{a}, \underline{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$   $p$ -dimenziós téglalap és  $\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^p$   $p$ -dimenziós bináris vektor. Ekkor:

$$P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\epsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}(\underline{a}\underline{\epsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\epsilon})) > 0; \quad j = \sum_{i=1}^p \epsilon_i$$

**70. Mondja ki a Steiner-tételt!**

$$\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a\text{-ra.}$$

**71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?**

Ha  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$  valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye  $F_{\underline{X}}$ , és  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p$  egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó  $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}$  komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az  $F_{\underline{X}}$  egy k-dimenziós peremvagy vetületi eloszlásfüggvénye.

**72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?**

Az  $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$  együttes sűrűségfüggvény egy k-dimenziós ( $2 \leq k < p - 1$ ) vetületi sűrűségfüggvényén valamely  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$  index-kombinációra az  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$  valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

**73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!**

- 1)  $\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \forall a$ -ra (Steiner-tétel),
- 2)  $E(X - a)^2 \geq \sigma^2(X) = E(X - EX)^2 \forall a \in \mathbb{R}$ ,
- 3)  $\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X) \forall a, b \in \mathbb{R}$ ,
- 4)  $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : P(X = c) = 1$  és  $c = EX$ .

**74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!**

- 1)  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ,
- 2)  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ,
- 3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x) dx$$

**75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!**

Ha a  $\sum |x_i|P(X = x_i)$  sor konvergens. akkor  $\exists$  várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

**76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!**

Ha a  $\int |x|f_X(x) dx < \infty$ , akkor  $\exists$  várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

**77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!**

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \cdot P(X = x_i)$$

**78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!**

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x) dx$$

**79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!**

Legyen  $Y \geq 0$  olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke:  $EY \geq 0$ . Ekkor  $\forall \delta > 0$  esetén  $P(Y > \delta) \leq \frac{EY}{\delta}$ .

**80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?**

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$  meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

Vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne  $\underline{Y}$ -ban.

**81. Hol veszi fel a minimumát az  $E(x - a)^2$  mennyiség?**

$$\sigma^2(x)$$

**82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással  $E(X^2)$ ?**

$$E(X^2) = E^2(X) + \sigma^2(X)$$

**83.  $E(aX + bY) = ?$**

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

**84.  $\sigma(aX + b) = ?$**

$$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$$

**85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel  $P(a \leq X < b; c \leq Y < d)$ ?**

$$P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F_{X,Y}(a, c) + F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c)$$

**86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!**

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a  $\sum |x_i|P(X = x_i)$  sor konvergens. akkor  $\exists$  várható érték.

**87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!**

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a  $\int |x|f_X(x) dx < \infty$ , akkor  $\exists$  várható érték.

**88. Milyen képlettel számoljuk az  $Y = g(X)$  transzformált változó várható értékét?**

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y) dy$$

**89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)**

Nem.  $F_{\underline{X}}(\underline{t})$  meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz. Ellenpélda:

Legyenek  $X_1$  és  $X_2$  olyan valószínűségi változók, melyek csak a  $-1, 0, +1$  értékeket vehetik fel az alábbi eloszlási táblázat szerint:

$X_1/X_2$	-1	0	+1	$X_1$ perem
-1	$0,125 + \epsilon$	0	$0,125 - \epsilon$	0,25
0	0	0,5	0	0,5
+1	$0,125 - \epsilon$	0	$0,125 + \epsilon$	0,25
$X_2$ perem	0,25	0,5	0,25	1

ahol  $0 < \epsilon < 0,125$  tetszőleges.

$$\text{Ekkor } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -1 \\ 0,25, & \text{ha } -1 < x \leq 0 \\ 0,75, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

**90.  $\sigma^2(aX + b) = ?$**

$$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$$

**91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűségfüggvényből?**

Az  $f_{\underline{X}}(\underline{t})$  együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig kiintegráljuk.

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

**92. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlásokat az együttes eloszlásból?**

(Ez ugyanaz, mint a 80-as.)

**93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?**

- 1)  $f_X(t) \geq 0, \forall t$
- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt_1 \dots dt_n = 1$   $(\lim_{\forall t_i \rightarrow \infty} F_X(t) = 1)$

**94. Adja meg a konvolúciós képletet diszkrét esetben!**

$X, Y$  függetlenek,  $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z}, Z = X + Y, R_z \subseteq \mathbb{Z}$  és tegyük fel, hogy  $X, Y \geq 0 (\Rightarrow Z \geq 0)$ .

$$P(Z = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l)$$

**95. Ha  $X, Y \in Po(\lambda)$  függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz  $X + Y$ ?**

Legyen  $X \in Po(\lambda), Y \in Po(\mu), k = 0, 1, 2, \dots$ , ekkor:

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\mu} = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda + \mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X + Y \in Po(\lambda + \mu)$$

Tehát jelen esetben  $X + Y \in Po(2\lambda)$ .

**96. Ha  $X, Y \in N(0, 1)$  függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz  $X + Y$ ?**

Ha  $X \in N(\mu_1, \sigma_1), Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$ , akkor  $X + Y \in N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ .

Jelen esetben  $X + Y \in N(0, \sqrt{2})$ .

**97. Mikor teljesen független egy  $n$  elemű valószínűségi változó rendszer?**

Az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha  $\forall 2 \leq k \leq n$ -re és  $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  esetén

$$P(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \prod_{i=1}^k P(X_{j_i} = x_{j_i})$$

**98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?**

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

**99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?**

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

**100. Mik a polinomiális eloszlás peremeloszlásai?**

A polinomiális eloszlás egydimenziós peremeloszlásai binomiális eloszlások.

**101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?**

$X \in N(\mu_1, \sigma_1)$  és  $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$

**102. Adja meg a konvolúciós képletet folytonos esetben!**

$X, Y$  folytonos, függetlenek,  $f_{X,Y}(t, s) = f_X(t) \cdot f_Y(s) \forall t, s$ -re.

$$Z = X + Y : f_Z(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u - s) ds$$

**103. Mikor független két valószínűségi változó?**

$X$  és  $Y$  valószínűségi változók függetlenek, ha  $\forall i, j$ -re

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

**104. Egy  $n$ -dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?**

$$2^n - 1$$

**105. Hogyan számoljuk a vetületi sűrűségfüggvényeket az  $f_{X,Y}$  együttes sűrűségfüggvényből?**

(Ez ugyanaz, mint a 91-es.)

**106. Hogyan számoljuk a vetületi eloszlásfüggvényeket az  $F_{X,Y}$  együttes eloszlásfüggvényből?**

(Ez ugyanaz, mint a 80-as és a 92-es.)

**107. Mi a konvolúciós sűrűségfüggvény  $X, Y \in U(0, 1)$  esetben?**

$X + Y = Z \in (0, 2)$ , mert tetszőleges  $z$  esetén:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x)f_Y(x) dx = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1 \cdot 1 dx = \begin{cases} \int_0^z 1 dx = z, & \text{ha } z \in (0,1) \\ \int_{z-1}^1 1 dx = z, & \text{ha } z \in (1,2) \\ 0, & \text{ha } z \notin (0,2) \end{cases}$$

**108. Ha  $X, Y$  függetlenek és létezik várható értékük, mi  $X + Y$  és  $X \cdot Y$  várható értéke?**

Ha  $Z_1 = X + Y$ , akkor  $EZ_1 = EX + EY$ .

Ha  $Z_2 = XY$ , akkor  $EZ_2 = EX \cdot EY$ .

**109. Az egészértékű diszkrét változókra adja meg a konvolúciós képletet!**

Ha  $\{p_i\}$  az  $X$  és  $\{q_j\}$  az  $Y$  független valószínűségi változók eloszlásai, akkor a  $Z = X + Y$  valószínűségi változó  $\{r_k\}$  eloszlása:

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i} = \sum_{j=0}^k p_{k-j} \cdot q_j$$

**110. Ha  $X, Y \in B(n, p)$  függetlenek, akkor mi az eloszlása  $X + Y$ -nak?**

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1 - p)^{n-l} \cdot \binom{n}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1 - p)^{n-k+l}$$

**111. Ha  $X, Y \in G(p)$  függetlenek, akkor mi az eloszlása  $X + Y$ -nak?**

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k p \cdot (1 - p)^{l-1} \cdot p \cdot (1 - p)^{k-l-1} = \\ = (k + 1) \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{k-2}$$

**112. Ha  $X, Y \in N(0, 1)$  függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!**

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

**113. Ha  $X, Y \in E(\lambda)$  függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!**

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$$

**114. Ha  $X, Y \in U(0, 1)$  függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!**

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1$$

**115. Ha  $X, Y \in N(0, 1)$  függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét  $\Phi(x)$ -el!**

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \cdot \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

**116. Ha  $X, Y \in U(0, 1)$  függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!**

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = xy$$

**117. Ha  $X, Y \in E(\lambda)$  függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!**

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda(x+y)}$$

**118. Mivel egyenlő  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du$  ?**

Az  $f_Y(v)$  sűrűségfüggvénnyel.

**119. Mivel egyenlő  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv$ ?**

Az  $F_{X,Y}$  eloszlásfüggvénnyel.

**120. Mivel egyenlő  $\lim_{v \rightarrow \infty} F_{X,Y}(u, v)$ ?**

$F_X(u)$

**121. Mik a kovariancia tulajdonságai?**

**122. Mi a feltételes eloszlásfüggvény definíciója?**

**123. Mi a feltételes sűrűségfüggvény definíciója?**

**124. Mi a lineáris regresszió képlete?**

**125. Mi a feltételes várható érték definíciója diszkrét esetben?**

**126. Mi a feltételes várható érték definíciója folytonos esetben?**

**127. Mik a korrelációs együttható tulajdonságai?**

**128. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között?**

**129. Mikor korrelálatlan két valószínűségi változó?**

**130. Mik a feltételes várhatóérték tulajdonságai?**

**131. Ha  $X, Y$  együttes eloszlása normális, akkor mi az  $X$ -nek az  $Y$ -ra vett regressziós összefüggése?**

**132. Mi a kapcsolat a függetlenség és korrelálatlanság között kétdimenziós normális esetben?**

**133. Mik a kovariancia-mátrix tulajdonságai?**

**134. Ha  $X, Y$  függetlenek, akkor  $E(X | Y) = ?$**

**135. Ha  $X = \alpha Y + \beta$ , akkor  $R(X, Y) = ?$**

**136. Mi a kritériuma annak, hogy egy valószínűségi változó szórása 0 legyen?**

**137. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke 1 legyen?**

**138. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke  $-1$  legyen?**

**139. Mondjon példát olyan valószínűségi változókra, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek!**

140. Milyen eloszlásnál lesz a regresszió lineáris?
141. Adja meg az  $Y$ -nak az  $X$ -re vonatkozó lineáris regresszió képletét, amikor  $X$  és  $Y$  függetlenek!
142. Mondjon példát Markov-láncre!
143. Mivel egyenlő  $\text{cov}(X - Y, X + Y)$ ?
144. Mivel egyenlő  $\text{cov}(X, X)$ ?
145. Mondja ki a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakját!
146. Mondja ki a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját!
147. Mondja ki a nagy számok törvényének Kolmogorov-féle alakját!
148. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!
149. Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!
150. Adja meg a karakterisztikus függvény fogalmát!