

Valószínűségszámítás

Kiskérdések kidolgozása

1. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget!

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$$

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_i)$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$!

$B = A + \bar{A} \cdot B$ és $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$, így $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$. Mivel $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$, már következik az állítás.

3. Bizonyítsa be, hogyha A és B függetlenek, akkor A és \bar{B} is függetlenek!

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) \Rightarrow \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \\ &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow A, \bar{B} \text{ függetlenek.} \end{aligned}$$

4. Bizonyítsa be, hogyha A és B függetlenek, akkor \bar{A} és \bar{B} is függetlenek!

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{A}) &= \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bar{A})(1 - \mathbf{P}(B)) = \\ &= \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ függetlenek.} \end{aligned}$$

5. Bizonyítsa be, ha $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$, akkor A minden eseménytől független!

Ha $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $A = \emptyset \Rightarrow$ lásd 6. kérdés.

Ha $\mathbf{P}(A) = 1$, akkor $A = \Omega \Rightarrow$ lásd 7. kérdés.

6. Bizonyítsa be, hogy a lehetetlen esemény minden eseménytől független!

$$\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \emptyset \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

7. Bizonyítsa be, hogy a biztos esemény minden eseménytől független!

$$\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(A) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \Omega \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

8. Mit nevezünk eseménytérnek?

Az eseménytér (Ω) a \mathcal{K} véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

9. Mit nevezünk elemi eseménynek?

Az elemi események (ω) a \mathcal{K} véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

10. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A + B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$!

Ez az 1. Boole-egyenlőtlenség.

$A + B = A + A \setminus B$. Ez egy diszjunkt felbontás, és $A \setminus B \subseteq A \Rightarrow \mathbf{P}(A \setminus B) \leq \mathbf{P}(A)$.

A valószínűség σ -additivitása miatt:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A \setminus B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

11. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(AB) \geq 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{B})$!

Ez a 2. Boole-egyenlőtlenség. A De Morgan azonosságból következik, hogy

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\overline{\bar{A} + \bar{B}}) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A} + \bar{B}) \geq 1 - (\mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(\bar{B}))$$

Ezt átalakítva az első Boole-egyenlőtlenséget kapjuk, tehát az állítás igaz.

12. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$!

Könnyen belátható, hogy $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$,

illetve hogy $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B)$

Ebből már kijön, hogy $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

13. Mi az esemény?

Az esemény elemi események halmaza, az eseménytér részhalmaza.

14. $P(A + B + C) = ?$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

15. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!

Az A_1, A_2, \dots, A_n események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ha $\forall i, j$ -re:

- 1) $A_i \cdot A_j = \emptyset$
- 2) $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$

16. Mikor páronként független egy eseményrendszer?

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események páronként függetlenek, ha $\forall i \neq j$ -re:

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

17. Mik az axiómái az \mathcal{F} -eseményrendszernek? (A σ -algebra definíciója.)

A \mathcal{K} véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események \mathcal{F} rendszere a σ -algebra (eseményalgebra), ami kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
- 3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

18. Mikor zárja ki az A esemény a B eseményt?

Az A és B esemény egymást kizáróak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

19. Mondja ki a Bayes-tételt!

Ha $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, $P(A_i) > 0$ és $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$, akkor:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k) P(A_k)}$$

20. Definiálja az események teljes függetlenségének fogalmát!

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események teljesen függetlenek, ha $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ és $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ indexkombinációra $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$.

21. Adja meg a valószínűség axiómáit!

A valószínűség egy $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény, mely kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1) $P(\Omega) = 1$
- 2) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ páronként egymást kizárják, akkor $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

22. Mikor vonja maga után az A esemény bekövetkezése a B eseményt?

Az A esemény maga után vonja B eseményt, ha az A esemény részhalmaza a B eseménynek.
Jelölés: $A \subseteq B$

23. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik minden eseménytől független!

Az \emptyset és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek.

24. Mondja ki a Poincare-formulát!

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tetszőlegesen, akkor:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \left((-1)^{i+1} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \dots \cdot A_{j_i}) \right)$$

25. Mondja ki a folytonossági tételt!

- 1) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ olyan események, hogy: $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, akkor:
 $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
- 2) Ha $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, akkor: $P(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

26. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik független a komplementétől!

Az \emptyset és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek, és mivel ezek egymás komplementesei, ezért egymástól is.

27. Definiálja az események függetlenségének fogalmát!

Az $A, B \in \mathcal{F}$ tetszőleges események függetlenek, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

28. Bizonyítsa be, hogy $P(ABC) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | AB)$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | AB) = P(A) \cdot \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(ABC)}{P(AB)} = P(ABC)$$

29. Bizonyítsa be, hogy $P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})} = \frac{\frac{P(AB)}{P(A)} \cdot P(A)}{\frac{P(AB)}{P(A)} \cdot P(A) + \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} \cdot P(\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(AB) + P(\bar{A}B)} =$$

$$= \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A | B)$$

30. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!

Legyen $A, B \in \mathcal{F}$ olyan események, hogy A tetszőleges és $P(B) > 0$. Akkor az A eseménynek a B -re vonatkoztatott feltételes valószínűségén a $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ számot értjük.

31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!

Az $F_X(x) = Q_X((-\infty, x)) = P(A = \{\omega : X(\omega) < x\})$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. F_X értéke x -ben az x -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- 1) F_X monoton nő, azaz $F_X(x) \leq F_X(y)$, ha $x < y$.
- 2) F_X balról folytonos, azaz $\lim_{x \rightarrow y^-} F_X(x) = F_X(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ -re,
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

33. Mi a binomiális eloszlás képlete?

$X \in B(n, p)$

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?

Ha $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ és np állandó, akkor $B(n, p) \rightarrow Po(np)$, vagyis a binomiális eloszlás k -edik tagja tart a Poisson-eloszlás k -edik tagjához.

35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?

A geometriai eloszlás ($X \in G(p)$), mert $P(X = m + k | X > m) = P(X = k) \forall k, m$ -re.

36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?

Az exponenciális eloszlás ($X \in E(\lambda)$), mert $P(X < x + t | X \geq x) = P(X < t) \forall 0 < x, t$ -re.

37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?

A binomiális eloszlással ($X \in B(n, p)$).

38. Ha $X \in N(m, D)$, akkor milyen eloszlást követ $\frac{X-m}{D}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

39. Ha $Y \in U(0, 1)$, F invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz $F^{-1}(Y)$ eloszlásfüggvénye?

$F(y)$, hiszen $\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}(F(F^{-1}(U)) < F(y)) = \mathbf{P}(U < F(y)) = F(y)$.

40. Ha X folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor $F_X(X)$ milyen eloszlású lesz?

Egyenletes eloszlású ($X \in U([a, b])$).

41. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a < X \leq b) = ?$

$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a + 0)$

42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, másrészt $p_i = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i)$.

Azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, melynek az ugróhelyei az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ helyeken vannak és az ugrás nagysága rendre $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett valószínűségi változó. Az $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az X sűrűségfüggvényének nevezzük, ha X -nek az F_X eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

- 1) $f_X(x) \geq 0$,
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$.

46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in U([a, b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!

$X \in U([a, b])$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

48. Mi a binomiális eloszlás módusza?

Eloszlás móduszának nevezzük azt a k . tagot, amire p_k a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz $[(n+1)p]$. (Ha egész, akkor a módusz egyenlő $k = (n+1)p - 1$ értékével, így két módusz van.)

49. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $P(a < X < b) = ?$

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a + 0)$$

50. Mi a geometriai eloszlás képlete?

$$X \in G(p)$$

$$p_k = P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1}p$$

51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?

Az X valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis $\forall \omega \in \Omega$ -ra $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?

$$X \in E(\lambda)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?

$$X \in E(\lambda)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?

A tétel szerint $P(X < x + t \mid X \geq x) = P(X < t) \forall 0 < x, t$ -re.

X azért „örökifjú”, mert annak feltételes valószínűsége, hogy X legfeljebb $x + t$ -ig él, (ha már x -et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy X legfeljebb t ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és t között ugyanaz a túlélési esély, mint x és $x + t$ között.

55. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $P(a \leq X \leq b) = ?$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a)$$

56. Mi a Poisson eloszlás képlete?

$$X \in Po(\lambda)$$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0$$

57. $P(X = a) = ?$

Folytonos esetben $\forall P(X = a) = 0$.

58. Ha $X \in N(0, 1)$, akkor milyen eloszlást követ $aX + b$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

59. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlás-függvénnyel!

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX : várható érték, σX : szórási)

$$\text{Ha } X \in B(n, p), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= np \\ \sigma X &= \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in G(p), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{1}{p} \\ \sigma X &= \frac{\sqrt{1-p}}{p} \end{aligned}$$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in Po(\lambda), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \lambda \\ \sigma X &= \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in U(a, b), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{b+a}{2} \\ \sigma X &= \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in N(\mu, \sigma), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \mu \\ \sigma X &= \sigma \end{aligned}$$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

$$\text{Ha } X \in E(\lambda), \text{ akkor } \begin{aligned} EX &= \frac{1}{\lambda} \\ \sigma X &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!

Az X_1, X_2, \dots, X_p valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1]$ skálárvektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(\underline{t}) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i, \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke \underline{t} -ben a \underline{t} -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

- 1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
- 2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
- 3) Ha \underline{X} -nek *legalább* egyik komponensével a $-\infty$ -be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
- 4) Ha \underline{X} -nek *minden* komponensével a $+\infty$ -be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
- 5) Legyen $T : [\underline{a}, \underline{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$ p -dimenziós téglalap és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p -dimenziós bináris vektor. Ekkor:

$$P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}(\underline{a}\underline{\varepsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\varepsilon})) > 0; \quad j = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i$$

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$$\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a\text{-ra.}$$

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k -dimenziós peremvagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k -dimenziós ($2 \leq k < p - 1$) vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$ index-kombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

- 1) $\sigma^2(X) = E[(X - a)^2] - (E(X - a))^2 = EX^2 - (EX)^2 \forall a$ -ra (Steiner-tétel),
- 2) $E(X - a)^2 \geq \sigma^2(X) = E(X - EX)^2 \forall a \in \mathbb{R}$,
- 3) $\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X) \forall a, b \in \mathbb{R}$,
- 4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : P(X = c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

- 1) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$,
- 2) $E(XY) = E(X)E(Y)$,
- 3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x) dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i|P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x|f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - EX)^2 \cdot P(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x) dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke: $EY \geq 0$. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $P(Y > \delta) \leq \frac{EY}{\delta}$.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

Vagyis az összes olyan komponenssel tartunk a végtelenbe, amelyik nincs benne \underline{Y} -ban.

81. Hol veszi fel a minimumát az $E(x - a)^2$ mennyiség?

$$\sigma^2(x)$$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $E(X^2)$?

$$E(X^2) = E^2(X) + \sigma^2(X)$$

83. $E(aX + bY) = ?$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

84. $\sigma(aX + b) = ?$

$$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$$

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $P(a \leq X < b; c \leq Y < d)$?

$$P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F_{X,Y}(a, c) + F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c)$$

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i|P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor \exists várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a

várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x|f_X(x) dx < \infty$, akkor \exists várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $Y = g(X)$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y) dy$$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz. Ellenpélda:

Legyenek X_1 és X_2 olyan valószínűségi változók, melyek csak a $-1, 0, +1$ értékeket vehetik fel az alábbi eloszlási táblázat szerint:

X_1/X_2	-1	0	+1	X_1 perem
-1	$0,125 + \epsilon$	0	$0,125 - \epsilon$	0,25
0	0	0,5	0	0,5
+1	$0,125 - \epsilon$	0	$0,125 + \epsilon$	0,25
X_2 perem	0,25	0,5	0,25	1

ahol $0 < \epsilon < 0,125$ tetszőleges.

$$\text{Ekkor } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -1 \\ 0,25, & \text{ha } -1 < x \leq 0 \\ 0,75, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

90. $\sigma^2(aX + b) = ?$

$$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$$

91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűségfüggvényből?

Az $f_{\underline{X}}(\underline{t})$ együttes sűrűségfüggvényt a peremeloszlás által nem tartalmazott komponensek szerint $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig kiintegráljuk.

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \rightarrow \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

92. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlásokat az együttes eloszlásból?

(Ez ugyanaz, mint a 80-as.)

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

1) $f_X(t) \geq 0, \forall t$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt_1 \dots dt_n = 1$ $(\lim_{\forall t_i \rightarrow \infty} F_X(t) = 1)$

94. Adja meg a konvolúciós képletet diszkrét esetben! X, Y függetlenek, $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z}, Z = X + Y, R_z \subseteq \mathbb{Z}$ és tegyük fel, hogy $X, Y \geq 0 (\Rightarrow Z \geq 0)$.

$$P(Z = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l)$$

95. Ha $X, Y \in Po(\lambda)$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $X + Y$?Legyen $X \in Po(\lambda), Y \in Po(\mu), k = 0, 1, 2, \dots$, ekkor:

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\mu} = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda + \mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X + Y \in Po(\lambda + \mu)$$

Tehát jelen esetben $X + Y \in Po(2\lambda)$.**96. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $X + Y$?**Ha $X \in N(\mu_1, \sigma_1), Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor $X + Y \in N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.Jelen esetben $X + Y \in N(0, \sqrt{2})$.**97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?**Az X_1, X_2, \dots, X_n diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall 2 \leq k \leq n$ -re és $\forall \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ esetén

$$P(X_{j_1} = x_{j_1}, \dots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \prod_{i=1}^k P(X_{j_i} = x_{j_i})$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

100. Mik a polinomiális eloszlás peremeloszlásai?

A polinomiális eloszlás egydimenziós peremeloszlásai binomiális eloszlások.

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai? $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$ és $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$ **102. Adja meg a konvolúciós képletet folytonos esetben!** X, Y folytonos, függetlenek, $f_{X,Y}(t, s) = f_X(t) \cdot f_Y(s) \forall t, s$ -re.

$$Z = X + Y : f_Z(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u - s) ds$$

103. Mikor független két valószínűségi változó? X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall i, j$ -re

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

104. Egy n -dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van? $n - 1$

105. Hogyan számoljuk a vetületi sűrűségfüggvényeket az $f_{X,Y}$ együttes sűrűségfüggvényből?

(Ez ugyanaz, mint a 91-es.)

106. Hogyan számoljuk a vetületi eloszlásfüggvényeket az $F_{X,Y}$ együttes eloszlásfüggvényből?

(Ez ugyanaz, mint a 80-as és a 92-es.)

107. Mi a konvolúciós sűrűségfüggvény $X, Y \in U(0, 1)$ esetben?

$X + Y = Z \in (0, 2)$, mert tetszőleges z esetén:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x)f_Y(x) dx = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1 \cdot 1 dx = \begin{cases} \int_0^z 1 dx = z, & \text{ha } z \in (0,1) \\ \int_{z-1}^1 1 dx = z, & \text{ha } z \in (1,2) \\ 0, & \text{ha } z \notin (0,2) \end{cases}$$

108. Ha X, Y függetlenek és létezik várható értékük, mi $X + Y$ és $X \cdot Y$ várható értéke?

Ha $Z_1 = X + Y$, akkor $EZ_1 = EX + EY$.

Ha $Z_2 = XY$, akkor $EZ_2 = EX \cdot EY$.

109. Az egészértékű diszkrét változókra adja meg a konvolúciós képletet!

Ha $\{p_i\}$ az X és $\{q_j\}$ az Y független valószínűségi változók eloszlásai, akkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változó $\{r_k\}$ eloszlása:

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i \cdot q_{k-i} = \sum_{j=0}^k p_{k-j} \cdot q_j$$

110. Ha $X, Y \in B(n, p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X + Y$ -nak?

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n-l} \cdot \binom{n}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n-k+l}$$

111. Ha $X, Y \in G(p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X + Y$ -nak?

$$P(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k P(X = l) \cdot P(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k p \cdot (1-p)^{l-1} \cdot p \cdot (1-p)^{k-l-1} = \\ = (k+1) \cdot p^2 \cdot (1-p)^{k-2}$$

112. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

113. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$$

114. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1$$

115. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(x)$ -el!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \cdot \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

116. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = xy$$

117. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda(x+y)}$$

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du$?

Az $f_Y(v)$ sűrűségfüggvénnyel.

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv$?

Az $F_{X,Y}$ eloszlásfüggvénnyel.

120. Mivel egyenlő $\lim_{v \rightarrow \infty} F_{X,Y}(u, v)$?

$F_X(u)$

121. Mik a kovariancia tulajdonságai?

122. Mi a feltételes eloszlásfüggvény definíciója?

123. Mi a feltételes sűrűségfüggvény definíciója?

124. Mi a lineáris regresszió képlete?

125. Mi a feltételes várható érték definíciója diszkrét esetben?

126. Mi a feltételes várható érték definíciója folytonos esetben?

127. Mik a korrelációs együttható tulajdonságai?

128. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között?

129. Mikor korrelálatlan két valószínűségi változó?

130. Mik a feltételes várhatóérték tulajdonságai?

131. Ha X, Y együttes eloszlása normális, akkor mi az X -nek az Y -ra vett regressziós összefüggése?

132. Mi a kapcsolat a függetlenség és korrelálatlanság között kétdimenziós normális esetben?

133. Mik a kovariancia-mátrix tulajdonságai?

134. Ha X, Y függetlenek, akkor $E(X | Y) = ?$

135. Ha $X = \alpha Y + \beta$, akkor $R(X, Y) = ?$

136. Mi a kritériuma annak, hogy egy valószínűségi változó szórása 0 legyen?

137. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke 1 legyen?

138. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke -1 legyen?

139. Mondjon példát olyan valószínűségi változókra, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek!

140. Milyen eloszlásnál lesz a regresszió lineáris?

141. Adja meg az Y -nak az X -re vonatkozó lineáris regresszió képletét, amikor X és Y függetlenek!

142. Mondjon példát Markov-láncre!

143. Mivel egyenlő $\text{cov}(X - Y, X + Y)$?

144. Mivel egyenlő $\text{cov}(X, X)$?

145. Mondja ki a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakját!

146. Mondja ki a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját!

147. Mondja ki a nagy számok törvényének Kolmogorov-féle alakját!

148. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!

149. Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!

150. Adja meg a karakterisztikus függvény fogalmát!