Valószínűségszámítás
Kiskérdések kidolgozása

1. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget!

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\bar{A_i})$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, akkor $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbf{P}(\boldsymbol{B})$!

$B = A + \bar{A} \cdot B$ és $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$, így $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$**.** Mivel $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$, már következik az állítás.

3. Bizonyítsa be, hogyha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ függetlenek, akkor $\boldsymbol{A}$ és $\overline{\boldsymbol{B}}$ is függetlenek!

$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) \Longrightarrow \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\big(1 - \mathbf{P}(B)\big) =$
$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Longrightarrow A, \bar{B}$ függetlenek.

4. Bizonyítsa be, hogyha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ függetlenek, akkor $\overline{\boldsymbol{A}}$ és $\overline{\boldsymbol{B}}$ is függetlenek!

$\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Longrightarrow \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bar{A})\big(1 - \mathbf{P}(B)\big) =$
$= \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Longrightarrow \bar{A}, \bar{B}$ függetlenek.

5. Bizonyítsa be, ha $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, akkor *A* minden eseménytől független!

Ha $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $A = \emptyset \Longrightarrow$ lásd 6. kérdés.
Ha $\mathbf{P}(A) = 1$, akkor $A = \Omega \Longrightarrow$ lásd 7. kérdés.

6. Bizonyítsa be, hogy a lehetetlen esemény minden eseménytől független!

$\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Longrightarrow \emptyset$ és A függetlenek.

7. Bizonyítsa be, hogy a biztos esemény minden eseménytől független!

$\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Longrightarrow \Omega$ és A függetlenek.

8. Mit nevezünk eseménytérnek?

Az eseménytér (Ω) a $\mathcal{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

9. Mit nevezünk elemi eseménynek?

Az elemi események (ω) a $\mathcal{K}$ véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

10. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B})$!

Ez az 1. Boole-egyenlőtlenség.
$A + B = A + A \backslash B$. Ez egy diszjunkt felbontás, és $A \backslash B \subseteq A \Longrightarrow \mathbf{P}(A \backslash B) \leq \mathbf{P}(A)$.
A valószínűség σ-additivitása miatt:
$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A \backslash B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

11. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{AB}) \geq \mathbf{1} - \mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{A}}) - \mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{B}})$!

Ez a 2. Boole-egyenlőtlenség. A De Morgan azonosságból következik, hogy
$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}\big(\overline{\bar{A} + \bar{B}}\big) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A} + \bar{B}) \geq 1 - \big(\mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(\bar{B})\big)$
Ezt átalakítva az első Boole-egyenlőtlenséget kapjuk, tehát az állítás igaz.

12. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathbf{P}(\boldsymbol{A})+\mathbf{P}(\boldsymbol{B})-\mathbf{P}(\boldsymbol{AB})$!

Könnyen belátható, hogy $\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(\bar{A}B) \Longrightarrow \mathbf{P}(\bar{A}B)=\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB)$,
illetve hogy $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A}B)$
Ebből már kijön, hogy $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A}B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB)$

13. Mi az esemény?

Az esemény elemi események halmaza, az eseménytér részhalmaza.

14. $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=$?

$\mathbf{P}(A+B+C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC)$

15. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ha $\forall i, j$-re:

1) $A_i \cdot A_j = \emptyset$
2) $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

16. Mikor páronként független egy eseményrendszer?

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események páronként függetlenek, ha $\forall i \neq j$-re:
$\mathbf{P}\left(A_i \cdot A_j\right) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}\left(A_j\right)$

17. Mik az axiómái az $\mathcal{F}$-eseményrendszernek? (A σ-algebra definíciója.)

A $\mathcal{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események $\mathcal{F}$ rendszere a σ-algebra (eseményalgebra), ami kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

18. Mikor zárja ki az *A* esemény a *B* eseményt?

Az *A* és *B* esemény egymást kizáróak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

19. Mondja ki a Bayes-tételt!

Ha $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, $\mathbf{P}(A_i) > 0$ és $B \in \mathcal{F},\ \mathbf{P}(B) > 0$, akkor:

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B|A_k)\,\mathbf{P}(A_k)}$$

20. Definiálja az események teljes függetlenségének fogalmát!

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események teljesen függetlenek, ha $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ és $\forall 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ indexkombinációra $\mathbf{P}\left(A_{i_1} \cdots A_{i_k}\right) = \mathbf{P}\left(A_{i_1}\right) \cdots \mathbf{P}\left(A_{i_k}\right)$.

21. Adja meg a valószínűség axiómáit!

A valószínűség egy $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ halmazfüggvény, mely kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
2) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ páronként egymást kizárják, akkor $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

22. Mikor vonja maga után az *A* esemény bekövetkezése a *B* eseményt?

Az *A* esemény maga után vonja *B* eseményt, ha az *A* esemény részhalmaza a *B* eseménynek. Jelölés: $A \subseteq B$

23. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik minden eseménytől független!

Az $\emptyset$ és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek.

24. Mondja ki a Poincare-formulát!

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tetszőlegesek, akkor:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i+1} \cdot \sum_{1\le j_1<\dots<j_i\le n} \mathbf{P}\left(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \dots \cdot A_{j_i}\right)\right)$$

25. Mondja ki a folytonossági tételt!

1) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ olyan események, hogy: $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$, akkor: $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.
2) Ha $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$, akkor: $\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

26. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik független a komplemensétől!

Az $\emptyset$ és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek, és mivel ezek egymás komplemensei, ezért egymástól is.

27. Definiálja az események függetlenségének fogalmát!

Az $A, B \in \mathcal{F}$ tetszőleges események függetlenek, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

28. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{ABC}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{AB})$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B \mid A) \cdot \mathbf{P}(C \mid AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(AB)} = \mathbf{P}(ABC)$$

29. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{A})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \bar{\boldsymbol{A}}) \cdot \mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{A}})}$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\frac{\mathbf{P}(B \mid A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathbf{P}(B \mid \bar{A}) \cdot \mathrm{P}(\bar{A})} = \frac{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathbf{P}(A)}{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathrm{P}(A) + \frac{\mathbf{P}(\bar{A}B)}{\mathbf{P}(\bar{A})} \cdot \mathrm{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A \mid B)$$

30. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!

Legyen $A, B \in \mathcal{F}$ olyan események, hogy A tetszőleges és $\mathbf{P}(B) > 0$. Akkor az A eseménynek a B-re vonatkoztatott feltételes valószínűségén a $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ számot értjük.

31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!

Az $F_X(x) = Q_X\big((-\infty, x)\big) = \mathbf{P}(A = \{\omega\colon X(\omega) < x\})$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. F_X értéke x-ben az x-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1) F_X monoton nő, azaz $F_X(x) \le F_X(y)$, ha $x < y$.
2) F_X balról folytonos, azaz $\lim_{x\to y-} F_X(x) = F_X(y), \forall y \in \mathbb{R}$-re,
3) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

33. Mi a binomiális eloszlás képlete?

$X \in B(n, p)$

$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?

Ha $n \to \infty$, $p \to 0$ és np állandó, akkor $B(n,p) \to Po(np)$, vagyis a binomiális eloszlás k-adik tagja tart a Poisson-eloszlás k-adik tagjához.

35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?

A geometriai eloszlás ($X \in G(p)$), mert $\mathbf{P}(X = m + k \ | X > m) = \mathbf{P}(X = k)$ $\forall k, m$-re.

36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?

Az exponenciális eloszlás ($X \in E(\lambda)$), mert $\mathbf{P}(X < x + t \ | X \geq x) = \mathbf{P}(X < x)$ $\forall 0 < x, t$-re.

37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?

A binomiális eloszlással ($X \in B(n,p)$).

38. Ha $\boldsymbol{X \in N(m, D)}$, akkor milyen eloszlást követ $\boldsymbol{\frac{X-m}{D}}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

39. Ha $\boldsymbol{Y \in U(0,1)}$, $\boldsymbol{F}$ invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz $\boldsymbol{F^{-1}(Y)}$ eloszlásfüggvénye?

$F(y)$, hiszen $\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \ \mathbf{P}\left(F\left(F^{-1}(U)\right) < F(y)\right) = \mathbf{P}\left(U < F(y)\right) = F(y)$.

40. Ha *X* folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor $\boldsymbol{F_X(X)}$ milyen eloszlású lesz?

Egyenletes eloszlású ($X \in E(\lambda)$).

41. Fejezze ki $\boldsymbol{F_X}$ eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(\boldsymbol{a < X \leq b}) =$?

$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a + 0)$

42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, másrészt $p_i = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i)$.

Azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, melynek az ugróhelyei az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ helyeken vannak és az ugrás nagysága rendre $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.

43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett valószínűségi változó. Az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az X sűrűségfüggvényének nevezzük, ha X-nek az F_X eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

1) $f_X(x) \geq 0$,
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.

46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in U([a,b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!

$X \in U([a,b])$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

48. Mi a binomiális eloszlás módusza?

Eloszlás móduszának nevezzük azt a k. tagot, amire p_k a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz $[(n+1)p]$. (Ha egész, akkor a módusz egyenlő $k = (n+1)p - 1$ értékével, így két módusz van.)

49. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a < X < b) = ?$

$\mathbf{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a+0)$

50. Mi a geometriai eloszlás képlete?

$X \in G(p)$

$p_k = \mathbf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1}p$

51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?

Az X valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis $\forall\omega \in \Omega$-ra $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?

$X \in E(\lambda)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?

$X \in E(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?

A tétel szerint $\mathbf{P}(X < x + t \mid X \geq x) = \mathbf{P}(X < x)$ $\forall 0 < x, t$-re.

X azért „örökifjú", mert annak feltételes valószínűsége, hogy X legfeljebb $x + t$-ig él(, ha már x-et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy X legfeljebb t ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és t között ugyanaz a túlélési esély, mint x és $x + t$ között.

55. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = ?$

$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a)$

56. Mi a Poisson eloszlás képlete?

$X \in Po(\lambda)$

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0$$

57. $\mathbf{P}(X = a) = ?$

Folytonos esetben $\forall \mathbf{P}(X = a) = 0$.

58. Ha $X \in N(0, 1)$, akkor milyen eloszlást követ $aX + b$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

59. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlás-függvénnyel!

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

60. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűség-függvénnyel!

$$f_X(X) = \varphi_{m,D}(x) = \frac{1}{m}\varphi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

61. Mondja ki a Csebisev-egyenlőtlenséget!

Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete ($\sigma^2 X < \infty$).

Ekkor minden $\epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\epsilon}$.

62. Adja meg a binomiális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

(EX: várható érték, σX: szórás)

Ha $X \in B(n, p)$, akkor $EX = np$

$\sigma X = \sqrt{np(1-p)}$

63. Adja meg a geometriai eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $\mathrm{X} \in \mathrm{G(p)}$, akkor $\mathrm{EX} = \frac{1}{\mathrm{p}}$

$\sigma\mathrm{X} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{p}}}{\mathrm{p}}$

64. Adja meg a Poisson eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in Po(\lambda)$, akkor $EX = \lambda$

$\sigma X = \sqrt{\lambda}$

65. Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in U(a, b)$, akkor $EX = \frac{b+a}{2}$

$\sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

66. Adja meg az normális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in N(\mu, \sigma)$, akkor $EX = \mu$

$\sigma X = \sigma$

67. Adja meg exponenciális eloszlás várható értékének és szórásának képletét!

Ha $X \in E(\lambda)$, akkor $EX = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma X = \frac{1}{\lambda}$

68. Adja meg az együttes eloszlásfüggvény definícióját!

Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye (vagy más néven az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ valószínűségi változó-vektor eloszlásfüggvénye) az $F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ skalár-vektor függvény, ahol $F_{\underline{X}}(t) = P(A = \{\omega : X_i(\omega) < t_i,\ \forall i\})$, azaz $F_{\underline{X}}$ értéke $\underline{t}$-ben a $\underline{t}$-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

69. Mik a jellemzői az együttes eloszlásfüggvénynek?

1) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nő,
2) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos,
3) Ha $\underline{X}$-nek *legalább egyik* komponensével a $-\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 0 lesz.
4) Ha $\underline{X}$-nek *minden* komponensével a $+\infty$-be tartunk, akkor $F_{\underline{X}}$ értéke 1 lesz.
5) Legyen $T : [\underline{a}, \underline{b}) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ p-dimenziós téga és $\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^p$ p-dimenziós bináris vektor. Ekkor:

$$P(\underline{x} \in T) = \sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^j \cdot F_{\underline{X}}\left(\underline{a\varepsilon} + \underline{b}(1 - \underline{\varepsilon})\right) > 0\,;\ j = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$$

Vagyis a téglalap csúcsaihoz tartozó eloszlásértékek megfelelően előjelezett összege soha nem negatív.

70. Mondja ki a Steiner-tételt!

$\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \left(E(X-a)\right)^2 = EX^2 - (EX)^2\ \forall a$-ra.

71. Mi a perem eloszlásfüggvény definíciója?

Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$, és $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k-dimenziós perem- vagy vetületi eloszlásfüggvénye.

72. Mi a perem sűrűségfüggvény definíciója?

Az $f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy k-dimenziós ($2 \le k < p-1$) vetületi sűrűségfüggvényén valamely $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le p$ indexkombinációra az $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

73. Sorolja fel a szórás tulajdonságait!

1) $\sigma^2(X) = E[(X-a)^2] - \left(E(X-a)\right)^2 = EX^2 - (EX)^2\ \forall a$-ra (Steiner-tétel),
2) $\mathbf{E}(X-a)^2 \ge \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2\ \forall a \in \mathbb{R}$,
3) $\sigma^2(aX+b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)\ \forall a, b \in \mathbb{R}$,
4) $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = c) = 1$ és $c = EX$.

74. Sorolja fel a várható érték tulajdonságait!

1) $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$,
2) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$,
3) Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó és g mérhető függvény:

$$\mathbf{E}\big(g(X)\big) = \int_{\Omega} g(X)\,dP = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,d\,F_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

75. Adja meg a várható érték definícióját diszkrét esetben!

Ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor ∃ várható érték, ami:

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

76. Adja meg a várható érték definícióját folytonos esetben!

Ha a $\int |x| f_X(x)\,dx < \infty$, akkor ∃ várható érték, ami:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

77 Adja meg a szórás definícióját diszkrét esetben!

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbf{E}X)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$$

78. Adja meg a szórás definícióját folytonos esetben!

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \cdot f_X(x)\,dx$$

79. Mondja ki a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke:$\mathbf{E}Y \geq 0$. Ekkor $\forall \delta > 0$ esetén $\mathbf{P}(Y > \delta) \leq \frac{\mathbf{E}Y}{\delta}$.

80. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlás függvényeket az együttes eloszlás függvényből?

$F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét (fordítva általában ez nem igaz):

$$F_{\underline{Y}}(\forall X_i \in \underline{Y} : t_i) = \lim_{\forall X_i \notin \underline{Y} : t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t})$$

81. Hol veszi fel a minimumát az $\mathbf{E}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2$ mennyiség?

$\sigma^2(x)$

82. Hogyan fejezhető ki a várható értékkel és a szórással $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2)$?

$\sigma^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X)$

83. $\mathbf{E}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{bY}) = ?$

$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$

84. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{aX} + \mathbf{b}) = ?$

$\sigma(aX + b) = \sigma(aX) = a\sigma(X)$

85. Hogyan fejezhető ki az együttes eloszlásfüggvénnyel $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{X} < \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{Y} < \boldsymbol{d}$?

$P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$.

86. Adjon meg olyan diszkrét valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan sort kell megadni, ami nem konvergens, mert ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens. akkor $\exists$ várható érték.

87. Adjon meg olyan folytonos valószínűségi változót, aminek nem létezik a várható értéke!

Olyan függvényt kell megadni, aminek az integrálja nem létezik vagy nem véges, mert ha a $\int |x| f_X(x)\, dx < \infty$, akkor $\exists$ várható érték.

88. Milyen képlettel számoljuk az $Y = g(X)$ transzformált változó várható értékét?

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\, dy \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y)\, dy$$

89. Egyértelműen meghatározzák-e a perem eloszlásfüggvények az együttes eloszlásfüggvényt? (Ha nem, adjon ellenpéldát!)

Nem. $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ meghatározza az összes perem eloszlásfüggvényét, viszont ez fordítva általában nem igaz. Ellenpélda:

Legyenek X_1 és X_2 olyan valószínűségi változók, melyek csak a $-1, 0, +1$ értékeket vehetik fel az alábbi eloszlási táblázat szerint:

X_1/X_2	-1	0	$+1$	X_1 perem
-1	$0{,}125 + \epsilon$	0	$0{,}125 - \epsilon$	$0{,}25$
0	0	$0{,}5$	0	$0{,}5$
$+1$	$0{,}125 - \epsilon$	0	$0{,}125 + \epsilon$	$0{,}25$
X_2 perem	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}25$	1

ahol $0 < \epsilon < 0{,}125$ tetszőleges.

Ekkor $F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha} & x \leq -1 \\ 0{,}25, \text{ ha} & -1 < x \leq 0 \\ 0{,}75, \text{ ha} & 0 < x \leq 1 \\ 1, \text{ ha} & 1 < x \end{cases}$

90. $\boldsymbol{\sigma^2(aX + b) = ?}$

$\sigma^2(aX + b) = \sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$

91. Hogyan számoljuk ki a perem sűrűségfüggvényeket az együttes sűrűség-függvényből?

92. Hogyan számoljuk ki a perem eloszlásokat az együttes eloszlásból?

(Ez ugyanaz, mint a 80-as.)

93. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?

1) $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \geq 0, \forall \underline{t}$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{t})\, dt_1 \dots dt_n = 1$ $\qquad \left(\lim_{\forall t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1\right)$

94. Adja meg a konvolúciós képletet diszkrét esetben!

X, Y függetlenek, $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z}, Z = X + Y, R_z \subseteq \mathbb{Z}$ és tegyük fel, hogy $X, Y \geq 0$ ($\Rightarrow Z \geq 0$).

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l)$$

95. Ha $\boldsymbol{X, Y \in Po(\lambda)}$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\boldsymbol{X + Y}$?

Legyen $X \in Po(\lambda)$, $Y \in Po(\mu)$, ekkor:

$$\mathbf{P}(X+Y=k)=\sum_{l=0}^{k}\mathbf{P}(X=l)\cdot\mathbf{P}(Y=k-l)=\sum_{l=0}^{k}\frac{\lambda^l}{l!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!}\mathrm{e}^{-\mu}=\cdots=$$
$$=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)},\qquad k=0,1,2,\ldots\implies X+Y\in Po(\lambda+\mu)$$

Jelen esetben $X+Y\in Po(2\lambda)$.

96. Ha $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ függetlenek, akkor milyen eloszlású lesz $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$?

Ha $X\in N(\mu_1,\sigma_1)$, $Y\in N(\mu_2,\sigma_2)$, akkor $X+Y\in N\left(\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$.

Jelen esetben $X+Y\in N\left(0,\sqrt{2}\right)$.

97. Mikor teljesen független egy n elemű valószínűségi változó rendszer?

Az $X_1,X_2,\ldots,X_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall\ 2\le k\le n$-re és $\forall\le j_1<\cdots<j_k\le n$ esetén

$$\mathbf{P}\left(X_{j_1}=x_{j_1},\ldots,X_{j_k}=x_{j_k}\right)=\prod_{i=1}^{k}\mathbf{P}\left(X_{j_i}=x_{j_i}\right)$$

98. Mi a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete?

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\mathrm{e}^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\mathrm{e}^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

99. Mi a polinomiális eloszlás képlete?

$$\mathbf{P}(X_1=k_1,\ldots,X_r=k_r)=\frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}\,p_1^{k_1}\ldots p_r^{k_r}$$

101. Mik a kétdimenziós normális eloszlás vetületi (perem) eloszlásai?

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}}\cdot e^{\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-\varrho^2}}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

102. Adja meg a konvolúciós képletet folytonos esetben!

X és *Y* folytonos, függetlenek, $f_{X,Y}(t,s)=f_X(t)\cdot f_Y(s)\ \ \forall t,s$-re

$$Z=X+Y:f_Z(u)=f_{X+Y}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(s)\cdot f_Y(u-s)\,ds$$

103. Mikor független két valószínűségi változó?

X és *Y* valószínűségi változók függetlenek, ha

$$\mathbf{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)=\mathbf{P}(X=x_i)\cdot\mathbf{P}\left(Y=y_j\right),\qquad i,j=1,2,\ldots$$

104. Egy n-dimenziós együttes eloszlásfüggvénynek hány alacsonyabb dimenziós perem eloszlásfüggvénye van?

$n-1$

105. Hogyan számoljuk a vetületi sűrűségfüggvényeket az $\boldsymbol{f_{X,Y}}$ együttes sűrűség-függvényből?

106. Hogyan számoljuk a vetületi eloszlásfüggvényeket az $\boldsymbol{F_{X,Y}}$ együttes eloszlás-függvényből?

107. Mi a konvolúciós sűrűségfüggvény $\boldsymbol{X,Y\in U(0,1)}$ esetben?

108. Ha X, Y függetlenek és létezik várható értékük, mi $X + Y$ és $X \cdot Y$ várható értéke?

109. Az egészértékű diszkrét változókra adja meg a konvolúciós képletet!

110. Ha $X, Y \in B(n, p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X + Y$-nak?

111. Ha $X, Y \in G(p)$ függetlenek, akkor mi az eloszlása $X + Y$-nak?

112. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

113. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

114. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes sűrűségfüggvényük képletét!

115. Ha $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét $\Phi(x)$-szel!

116. Ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

117. Ha $X, Y \in U(0, 1)$ függetlenek, adja meg az együttes eloszlásfüggvényük képletét!

118. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v)\, du$?

119. Mivel egyenlő $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v)\, dudv$?

120. Mivel egyenlő $\lim_{v \to \infty} F_{X,Y}(u, v)$?

121. Mik a kovariancia tulajdonságai?

122. Mi a feltételes eloszlásfüggvény definíciója?

123. Mi a feltételes sűrűségfüggvény definíciója?

124. Mi a lineáris regresszió képlete?

125. Mi a feltételes várható érték definíciója diszkrét esetben?

126. Mi a feltételes várható érték definíciója folytonos esetben?

127. Mik a korrelációs együttható tulajdonságai?

128. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között?

129. Mikor korrelálatlan két valószínűségi változó?

130. Mik a feltételes várhatóérték tulajdonságai?

131. Ha X, Y együttes eloszlása normális, akkor mi az X-nek az Y-ra vett regressziós összefüggése?

132. Mi a kapcsolat a függetlenség és korrelálatlanság között kétdimenziós normális esetben?

133. Mik a kovariancia-mátrix tulajdonságai?

134. Ha X, Y függetlenek, akkor $\mathrm{E}(X \mid Y) =$?

135. Ha $X = \alpha Y + \beta$, akkor $R(X, Y) =$?

136. Mi a kritériuma annak, hogy egy valószínűségi változó szórása 0 legyen?

137. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke 1 legyen?

138. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke –1 legyen?

139. Mondjon példát olyan valószínűségi változókra, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek!

140. Milyen eloszlásnál lesz a regresszió lineáris?

141. Adja meg az Y-nak az X-re vonatkozó lineáris regresszió képletét, amikor X és Y függetlenek!

142. Mondjon példát Markov-láncra!

143. Mivel egyenlő $\mathrm{cov}(X - Y,\ X + Y)$?

144. Mivel egyenlő $\mathrm{cov}(X, X)$?

145. Mondja ki a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakját!

146. Mondja ki a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját!

147. Mondja ki a nagy számok törvényének Kolmogorov-féle alakját!

148. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!

149. Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!

150. Adja meg a karakterisztikus függvény fogalmát!