# 2. Vizsgazárthelyi

2009 nyár A2

**1.** Adja meg az alábbi $\mathbf{R}^3$-beli vektorok által kifeszített altér egy bázisát és az összes vektor oszlopvektorait (azaz koordináta-vektorait) ebben a bázisban!

$$v_1 = (-1,1,0),\ v_2 = (-1,0,-1),\ v_3 = (1,1,2),\ v_4 = (2,-1,1)$$

**2.** Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Döntse el, hogy invertálható-e $\underline{\underline{A}}^{100}$. Ha igen, határozza meg az $(\underline{\underline{A}}^{100})^{-1}$ sajátértékeit!

**3.** Van-e lokális minimuma és lokális maximuma az $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-0,5(x^2+y^2)}$ függvénynek a $K = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ körlapon? Ha igen, határozza meg ezek helyét és értékét!

**4.** Konvergensek-e a következő numerikus sorok ? **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{1}{n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{2^n}}$

**5.** Számítsa ki az $\operatorname{arctg}(0,5)$ értékét $0,01$ pontossággal! (Számítását indokolja részletesen!)

**6.**

**(a)** Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges véges dimenziós lineáris tér, továbbá legyen **A** és **B** két $\mathcal{L}$-ből $\mathcal{L}$-be képező lineáris operátor. Igaz-e, hogy

- **(a1)** **A** magtere dimenziójának és képtere dimenziójának összege megegyezik **B** magtere dimenziójának és képtere dimenziójának összegével
- **(a2)** Ha **A** magtere azonos **B** magterével és **A** képtere azonos **B** képterével, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

**(b)** Legyen $f$ a síkon mindenütt értelmezett kétváltozós függvény, $a \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges. Igaz-e hogy

- **(b1)** Ha $\operatorname{grad} f$ létezik az $a$-ban, akkor tetszőleges $e$ egységvektor esetén $f$-nek létezik az $e$ irányú iránymenti deriváltja $a$-ban
- **(b2)** Ha $f$-nek mind $x$ mind $y$ szerinti parciális deriváltjai léteznek az $a$-ban, akkor létezik $a$-ban a $\operatorname{grad} f$ is.

**(c)** Legyen $a_n \ge 0$ minden $n$-re. Igaz-e hogy

- **(c1)** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens és minden $n \ge 1$-re $a_n \ge b_n$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens
- **(c2)** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $a_n < \frac{1}{n}$ elegendően nagy $n$-ekre (azaz valamely $N$ esetén minden $n \ge N$-re).