

**1. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget!**

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$$

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{A}_i)$$

**2. Bizonyítsa be, hogy ha  $A \subseteq B$ , akkor  $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ !**

$B = A + \bar{A} \cdot B$  és  $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$ , így  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$ . Mivel  $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$ , már következik az állítás.

**3. Bizonyítsa be, hogyha  $A$  és  $B$  függetlenek, akkor  $A$  és  $\bar{B}$  is függetlenek!**

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) \Rightarrow \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow A, \bar{B} \text{ függetlenek.}$$

**4. Bizonyítsa be, hogyha  $A$  és  $B$  függetlenek, akkor  $\bar{A}$  és  $\bar{B}$  is függetlenek!**

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bar{A})(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ függetlenek.}$$

**5. Bizonyítsa be, ha  $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$ , akkor  $A$  minden eseménytől független!**

Ha  $\mathbf{P}(A) = 0$ , akkor  $A = \emptyset \Rightarrow$  lásd 6. kérdés.

Ha  $\mathbf{P}(A) = 1$ , akkor  $A = \Omega \Rightarrow$  lásd 7. kérdés.

**6. Bizonyítsa be, hogy a lehetetlen esemény minden eseménytől független!**

$$\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \emptyset \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

**7. Bizonyítsa be, hogy a biztos esemény minden eseménytől független!**

$$\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(\Omega) = 1 = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \Omega \text{ és } A \text{ függetlenek.}$$

**8. Mit nevezünk eseménytérnek?**

Az eseménytér ( $\Omega$ ) a  $\mathcal{K}$  véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

**9. Mit nevezünk elemi eseménynek?**

Az elemi események ( $\omega$ ) a  $\mathcal{K}$  véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

**10. Bizonyítsa be, hogy  $\mathbf{P}(A + B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{B})$ !****11. Bizonyítsa be, hogy  $\mathbf{P}(AB) \geq 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(\bar{B})$ !****12. Bizonyítsa be, hogy  $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ !****13. Mi az esemény?**

Az esemény elemi események halmaza, az eseménytér részhalmaza.

**14.  $\mathbf{P}(A + B + C) = ?$** 

$$\mathbf{P}(A + B + C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC)$$

**15. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!**

Az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ha  $\forall i, j$ -re:

- 1)  $A_i \cdot A_j = \emptyset$
- 2)  $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$

**16. Mikor páronként független egy eseményrendszer?**

Az  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  események páronként függetlenek, ha  $\forall i \neq j$ -re:

$$\mathbf{P}(A_i \cdot A_j) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}(A_j)$$

**17. Mik az axiómái az  $\mathcal{F}$ -eseményrendszernek? (A  $\sigma$ -algebra definíciója.)**

A  $\mathcal{K}$  véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események  $\mathcal{F}$  rendszere a  $\sigma$ -algebra (eseményalgebra), ami kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1)  $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
- 3)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

**18. Mikor zárja ki az  $A$  esemény a  $B$  eseményt?**

Az  $A$  és  $B$  esemény egymást kizáróak, ha  $A \cdot B = \emptyset$ .

**19. Mondja ki a Bayes-tételt!**

Ha  $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  teljes eseményrendszer,  $\mathbf{P}(A_i) > 0$  és  $B \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{P}(B) > 0$ , akkor:

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i) \mathbf{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(B|A_k) \mathbf{P}(A_k)}$$

**20. Definiálja az események teljes függetlenségének fogalmát!**

Az  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  események teljesen függetlenek, ha  $\forall k \in \{2, \dots, n\}$  és  $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  indexkombinációra  $\mathbf{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k})$ .

**21. Adja meg a valószínűség axiómáit!**

A valószínűség egy  $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  halmazfüggvény, mely kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1)  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- 2) Ha  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  páronként egymást kizárják, akkor  $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$ .

**22. Mikor vonja maga után az  $A$  esemény bekövetkezése a  $B$  eseményt?**

Az  $A$  esemény maga után vonja  $B$  eseményt, ha az  $A$  esemény részhalmaza a  $B$  eseménynek.  
Jelölés:  $A \subseteq B$

**23. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik minden eseménytől független!**

Az  $\emptyset$  és  $\Omega$  események minden  $A \in \mathcal{F}$  eseménytől függetlenek.

**24. Mondja ki a Poincare-formulát!**

Ha  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  tetszőlegesek, akkor:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \left( (-1)^{n+1} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \dots \cdot A_{j_i}) \right)$$

**25. Mondja ki a folytonossági tételt!**

- 1) Ha  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  olyan események, hogy:  $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , akkor:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n).$$

2) Ha  $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , akkor:  $\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n)$ .

**26. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik független a komplementétől!**

Az  $\emptyset$  és  $\Omega$  események minden  $A \in \mathcal{F}$  eseménytől függetlenek, és mivel ezek egymás komplementesei, ezért egymástól is.

**27. Definiálja az események függetlenségének fogalmát!**

Az  $A, B \in \mathcal{F}$  tetszőleges események függetlenek, ha  $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ .

**28. Bizonyítsa be, hogy  $\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(C | AB)$ !**

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(C | AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(AB)} = \mathbf{P}(ABC)$$

**29. Bizonyítsa be, hogy  $\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B | \bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{A})}$ !**

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B | A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B | \bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{A})} &= \frac{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathbf{P}(A)}{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathbf{P}(A) + \frac{\mathbf{P}(\bar{A}B)}{\mathbf{P}(\bar{A})} \cdot \mathbf{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B)} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A | B) \end{aligned}$$

**30. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!**

Legyen  $A, B \in \mathcal{F}$  olyan események, hogy  $A$  tetszőleges és  $\mathbf{P}(B) > 0$ . Akkor az  $A$  eseménynek a  $B$ -re vonatkoztatott feltételes valószínűségén a  $\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$  számot értjük.