Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
11. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.05.29.

1. feladat

Adott DI jel időfüggvénye $f_1[k] = \frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k-1])$. Határozzuk meg és vázoljuk a Fourier-transzformáltját (spektrumát) $F_1(e^{j\vartheta})$-t!

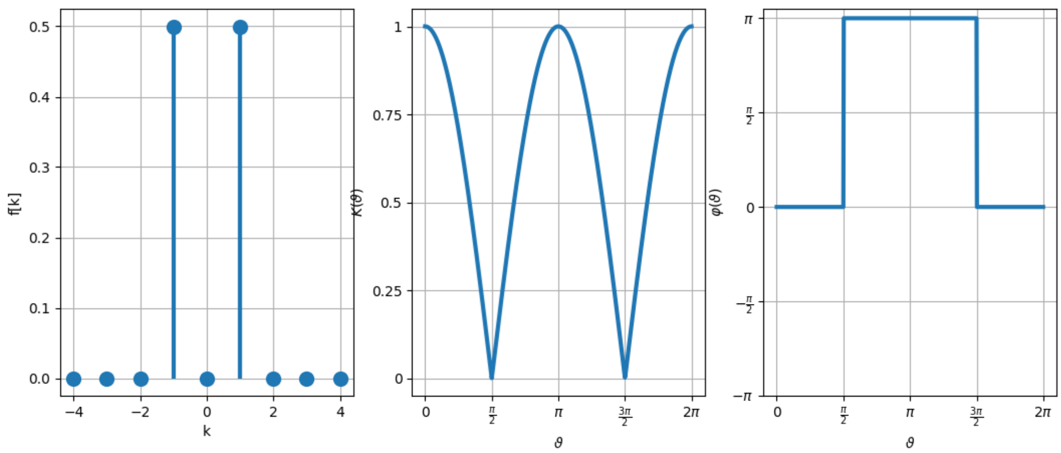
$$\begin{aligned} F_1(e^{j\vartheta}) &= \sum_{-\infty}^{\infty} f_1[k]e^{-j\vartheta k} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k-1])e^{-j\vartheta k} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k+1]e^{-j\vartheta k} + \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k-1]e^{-j\vartheta k}\right) = \frac{e^{-j\vartheta 1} + e^{j\vartheta 1}}{2} = \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

Amplitúdó-karakterisztika (amplitúdó spektrum):

$$\left|F_1(e^{j\vartheta})\right| = \left|\cos(\vartheta)\right|$$

Fázis-karakterisztika (fázis spektrum):

$$\arg\left(F_1(e^{j\vartheta})\right) = \arg\left(\cos(\vartheta)\right) = \begin{cases} 0, \text{ha } -\pi/2 < \vartheta < \pi/2 \\ \pi, \text{ha } \pi/2 < \vartheta < 3\pi/2 \end{cases}$$



1. ábra. $f_1[k]$ jel időfüggvénye és spektruma

2. feladat

Adott DI jel időfüggvénye $f_2[k] = \frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k])$. Határozzuk meg és vázoljuk a Fourier-transzformáltját (spektrumát) $F_2(e^{j\vartheta})$-t!

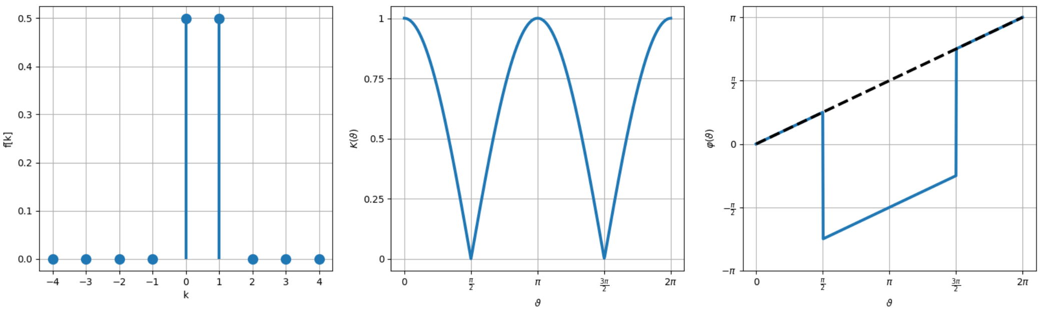
$$\begin{aligned} F_1(e^{j\vartheta}) &= \sum_{-\infty}^{\infty} f_1[k]e^{-j\vartheta k} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k])e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k+1]e^{-j\vartheta k} + \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k]e^{-j\vartheta k}\right) = \\ &= \frac{e^{j\vartheta 1} + e^{-j\vartheta 0}}{2} = e^{j\frac{\vartheta}{2}} \frac{e^{j\frac{\vartheta}{2}} + e^{-j\frac{\vartheta}{2}}}{2} = e^{j\frac{\vartheta}{2}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{aligned}$$

Amplitúdó-spektrum:

$$\left|F_2(e^{j\vartheta})\right| = \left|e^{-j\frac{\vartheta}{2}} \cos(\vartheta)\right| = |\cos(\vartheta)|$$

Fázis-spektrum:

$$\arg\left(F_2(e^{j\vartheta})\right) = \arg\left(e^{j\frac{\vartheta}{2}} \cos(\vartheta)\right) = \frac{\vartheta}{2}$$



2. ábra. $f_2[k]$ jel időfüggvénye és spektruma

3. feladat

Adott DI jel időfüggvénye $f_3[k] = \frac{1}{2}(\delta[k] + \delta[k-1])$. Határozzuk meg és vázoljuk a Fourier-transzformáltját (spektrumát) $F_3(e^{j\vartheta})$-t!

Eltolási tétellel az előző feladatból.

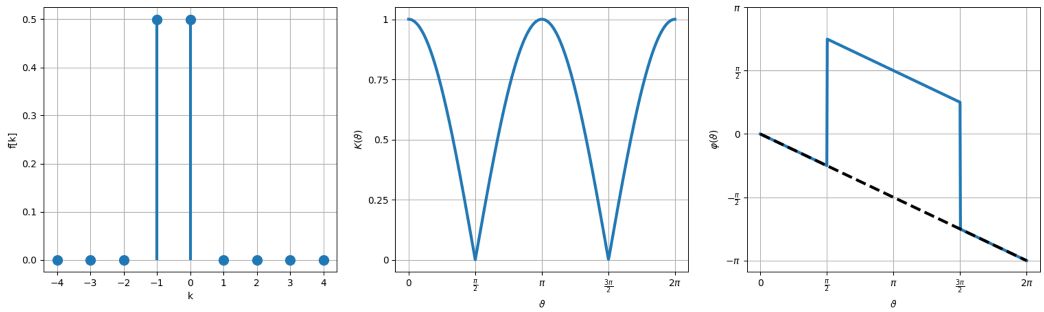
$$F_3(e^{j\vartheta}) = F_2(e^{j\vartheta})e^{-j\vartheta 1} = e^{-j\frac{\vartheta}{2}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Amplitúdó-spektrum:

$$\left|F_3(e^{j\vartheta})\right| = \left|e^{-j\frac{\vartheta}{2}} \cos(\vartheta)\right| = |\cos(\vartheta)|$$

Fázis-spektrum:

$$\arg\left(F_3(e^{j\vartheta})\right) = \arg\left(e^{-j\frac{\vartheta}{2}} \cos(\vartheta)\right) = -\frac{\vartheta}{2}$$



3. ábra. $f_3[k]$ jel időfüggvénye és spektruma

4. feladat

Adott DI jel időfüggvénye $f_4[k] = \frac{1}{2}(\delta[k+1] - \delta[k-1])$. Határozzuk meg és vázoljuk a Fourier-transzformáltját (spektrumát) $F_4(e^{j\vartheta})$-t!

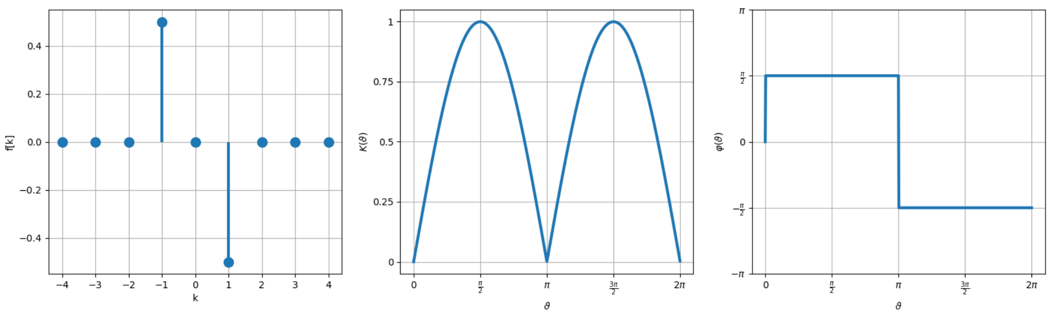
$$
\begin{aligned}
F_(e^{j\vartheta}) &= \sum_{-\infty}^{\infty} f_3[k]e^{-j\vartheta k} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta[k+1] - \delta[k-1])e^{-j\vartheta k} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k+1]e^{-j\vartheta k} - \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k-1]e^{-j\vartheta k}\right) = \frac{e^{j\vartheta 1} - e^{-j\vartheta 1}}{2} = j\frac{e^{j\vartheta 1} - e^{-j\vartheta 1}}{j2} = j\sin(\vartheta)
\end{aligned}
$$

Amplitúdó-spektrum:

$$\left|F_4(e^{j\vartheta})\right| = |j\sin(\vartheta)| = |\sin(\vartheta)|$$

Fázis-spektrum:

$$\arg\left(F_4(e^{j\vartheta})\right) = \arg\left(j\sin(\vartheta)\right) = \pi/2$$

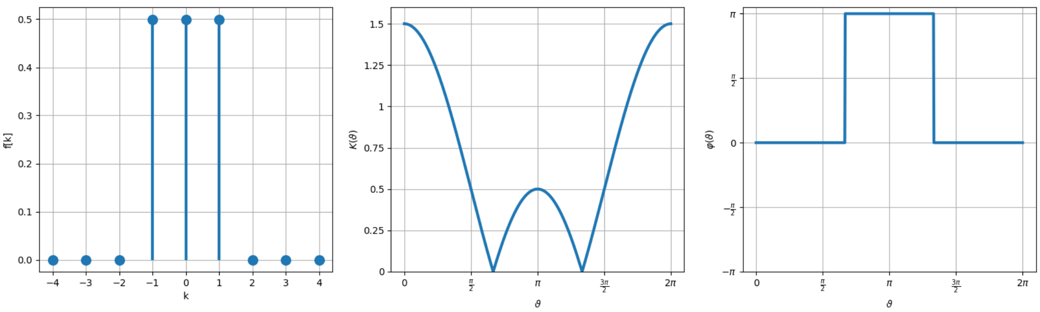


4. ábra. $f_4[k]$ jel időfüggvénye és spektruma

5. feladat

Adott DI jel időfüggvénye $f_5[k] = \frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k] + \delta[k-1])$. Határozzuk meg és vázoljuk a Fourier-transzformáltját (spektrumát) $F_5(e^{j\vartheta})$-t!

$$\frac{1}{2}\left(e^{j\vartheta} + 1 + e^{-j\vartheta}\right) = \frac{1}{2} + \cos(\vartheta)$$



5. ábra. $f_5[k]$ jel időfüggvénye és spektruma

6. feladat

Határozzuk meg a DI egységugrás spektrumát!

A $\varepsilon[k]$ jel nem abszolút összegezhető, így spektruma közvetlenül a formulából nem számítható. Viszont az FI egységugrás spektrumának kiszámításánál alkalmazott trükkel analóg módon definiálhatjuk az alábbi jelet:

$$u_2[k] = \begin{cases} 1/2, & k \geq 0 \\ -1/2, & k < 0 \end{cases}$$

Vegyük részre, hogy

$$u_2[k] - u_2[k-1] = \delta[k],$$

ezért

$$U_2\left(e^{j\vartheta}\right) - U_2\left(e^{j\vartheta}\right)e^{-j\vartheta} = 1,$$

$$U_2\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{1}{1-e^{-j\vartheta}}.$$

Mivel

$$u_2[k] = \frac{1}{2}(\varepsilon[k] - 1),$$

ezért

$$\varepsilon[k] = \frac{1}{2} + u_2[k],$$

a spektruma a Fourier-transzformáció linearitása miatt a $(-\pi, \pi)$ intervallumon

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \pi\delta(\vartheta) + \frac{1}{1-e^{-j\vartheta}}, \quad -\pi < \vartheta < \pi,$$

illetve általánosan érvényes alakban

$$\boxed{\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p2\pi) + \frac{1}{1-e^{-j\vartheta}}}$$

7. feladat

Határozzuk meg a $2L$ szélességű szimmetrikus DI négyszögimpulzus spektrumát! Az előző feladat eredményét és az eltolási tételt felhasználva:

a spektruma a Fourier-transzformáció linearitása miatt a $(-\pi, \pi)$ intervallumon

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L]\} = \left(e^{j\vartheta L} - e^{j\vartheta L}\right)\left(\pi\delta(\vartheta) + \frac{1}{1-e^{-j\vartheta}}\right) =$$

$$2j\sin(\vartheta L)\left(\pi\delta(\vartheta) + \frac{1}{1-e^{-j\vartheta}}\right), \quad -\pi < \vartheta < \pi,$$

Lássuk be, hogy ha L tart 1-hez, akkor az ablakfüggvény egy $\delta[k]$-hoz közelít, mígy ha L tart végtelenhez, akkor egy konstanshoz. Figyeljük meg, milyen hatása van ezen szélsőértékeknek a spektrumra.

8. feladat

Egy DI jel Fourier-transzformáltja

$$F\left(e^{j\vartheta}\right) = \cos\vartheta.$$

Határozza meg a jelet!

$$F\left(e^{j\vartheta}\right) = \cos\vartheta = \frac{1}{2}e^{j\vartheta} + \frac{1}{2}e^{-j\vartheta},$$

amihez a Fourier-transzformáció eltolási tétele értelmében az

$$f[k] = \frac{1}{2}\delta[k+1] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$$

nem belépő jel tartozik.

Visszafordítva a feladatot, egy rendszer impulzusválasza

$$h[k] = \frac{1}{2}\delta[k+1] + \frac{1}{2}\delta[k-1],$$

jellemezzük a rendszert!

A rendszer véges impulzusválaszú, rendszeregyenlete pedig nyilvánvalóan

$$y[k] = \frac{1}{2}(u[k+1] + u[k-1]).$$

Akár a rendszeregyenlet alapján, akár az impulzusválasz nem belépő voltából látható, hogy a rendszer *nem kauzális* (valós időben nem is valósítható meg pl. jelfolyamhálózattal), mert a k. ütembeli válaszhoz a $k+1$. ütembeli gerjesztést is ismernünk kell[1]. A rendszer gerjesztés-válasz stabil (mert impulzusválasza véges), átviteli karakterisztikája pedig az előbbiek alapján

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \cos\vartheta,$$

amplitúdókarakterisztikája

$$K(\vartheta) = \left|H\left(e^{j\vartheta}\right)\right| = |\cos\vartheta|.$$

[1] A rendszer egy ütem késleltetéssel kauzálissá tehető.