A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2011.11.29.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellett, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.

   A feltétel szerint egy hallgató 37 féle pontszámot szerezhetett SzA-ból, és ötféle osztályzatot analízisből, (2 pont)
   így legfeljebb $5 \cdot 37 = 185$-féle lehet e két eredmény. (2 pont)
   Ha egyetlne olyan eredménypár sem lenne, amit háromnál több hallgató ért el, akkor a hallgatók száma legfeljebb $3 \cdot 185 = 555$, volna, de tudjuk, hogy 556 a hallgatók száma. (5 pont)
   Ezért van négy olyan hallgató, akik azonos SzA pontszámot és Analízis érdemjegyet szereztek, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

2. Adjunk olyan eljárást, ami $2^{n-1} - 1$ összehasonlítással meghatározza egy $2^n - 1$ különböző rekordot tartalmazó kupacban a legnagyobb elemet.

   A kupacban tárolt legnagyobb rekord biztosan levél, hiszen ha lenne leszármazottja a bináris fában, az nagyobb lenne, egész pontosan nem lehetne nála kisebb. (3 pont)
   Elegendő tehát a kupachoz tartozó bináris fa leveleiben tárolt rekordok között megkeresni a legnagyobbat. (1 pont)
   Ezek a levelek egyébként a tömb második felében helyezkednek el. (0 pont)
   A $2^n - 1$ rekordot tartalmazó kupachoz tartozó bináris fának n szintje van, az egyes szinteken $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ rekorddal, tehát a fának pontosan 2^{n-1} levele van. (3 pont)
   Az órán tanultak szerint 2^{n-1} rekord közül a legnagyobb meghatározásához elegendő $2^{n-1} - 1$ összehasonlítás. (3 pont)

   Megjegyzés: ha a kupacban eggyel több, azaz 2^n rekord lenne, a hozzá tartozó bináris fának akkor is 2^{n-1} levele volna, így ugyanennyi összehasonlításra volna szükség a legnagyobb rekord meghatározásához.

3. A $\boxed{\sqrt{5}\,|\,2\,|\,\pi\,|\,8\,|\,5\,|\,\sqrt{3}\,|\,6\,|\,\sqrt{7}}$ tömb összefésüléses rendezéséhez pontosan hány páronkénti összehasonlításra van szükség?

   A rendezés a $\boxed{\sqrt{5}\,|\,2\,|\,\pi\,|\,8}$ résztömb összefésüléses rendezésével kezdődik. (1 pont)
   Ebben először egy-egy összehasonlítással rendezzük az első két ill. harmadik és negyedik elemeket, majd összefésüljük a kapott $\boxed{2\,|\,\sqrt{5}}$ és $\boxed{\pi\,|\,8}$ tömböket, amihez két összehasonlítás kell. (2 pont)
   A másodiknak rendezett $\boxed{5\,|\,\sqrt{3}\,|\,6\,|\,\sqrt{7}}$ tömb esetében két összehasonlítás után a $\boxed{\sqrt{3}\,|\,5}$ és $\boxed{\sqrt{7}\,|\,6}$ tömböket fésüljük össze a $\boxed{\sqrt{3}\,|\,\sqrt{7}\,|\,5\,|\,6}$ tömbbé 3 összehasonlítással. (3 pont)
   Végül a kapott $\boxed{2\,|\,\sqrt{5}\,|\,\pi\,|\,8}$ és $\boxed{\sqrt{3}\,|\,\sqrt{7}\,|\,5\,|\,6}$ tömböket fésüljük össze, amihez legvégül a 6 és 8 elemeket kell összehasonlítani, tehát „egyszerre" fogynak el a tömbök, így ehhez 7 összehasonlítás kell. (3 pont)
   A teljes eljárás tehát $2 + 2 + 2 + 3 + 7 = 16$ páronkénti összehasonlítást használ. (1 pont)

   Ha a leírásból látszik, hogy a hallgató pontosan érti, hogyan működik az összefésüléses rendezés, de úgy számol, hogy két k méretű tömb összefésüléséhez $2k - 1$ összehasonlítás kell (még ha az egyik tömb hamarabb el is fogy), akkor a megoldás legfeljebb 7 pontot ér.

4. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, egyszerű, 7 pontú gráf adható meg, amelynek minden csúcsa 4-edfokú?

   Egy egyszerű G gráf komplementere az a $\overline{G}$ gráf, amiben két pont pontosan akkor szomszédos, ha G-ben nem szomszédosak. Az izomorfia definíciójából azonnal adódik, hogy két gráf pontosan akkor izomorf, ha komplementereik izomorfak. (1 pont)
   Ezek szerint nekünk elegendő megszámolni, hányféle nemizomorf módon adható meg a kérdezett gráfok komplementere. (2 pont)
   E komplementerben minden csúcs fokszáma pontosan 2 lesz, (1 pont)
   tehát a komplementer gráf diszjunkt körök uniója. (2 pont)
   Azt kell tehát leszámlálnunk, hogy hányféleképpen adható meg néhány diszjunkt kör 7 ponton, (2 pont)
   azaz, hányféleképpen lehet a 7-et előállítani olyan pozitív egészek összegeként, amelyek mindegyike legalább 3. (1 pont)
   Erre pontosan két leehtőségünk van: 7 ill. $3+4$. Eszerint a feladatbeli kérdésre a válasz pontosan kettő, (1 pont)
   konkrétan a C_7 komplementre ill. az a G gráf, amit a $K_{3,4}$ teljes páros gráfból úgy kapunk, hogy behúzunk két diszjunkt élt a 4 pontú színosztályba. (0 pont)

5. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3-élű van részgráfja G-nek, ami út?

   A G gráf minden 3-élű sétája út, mivel G egyszerű és nincs benne háromszög. (1 pont)
   Ezért elegendő megszámolni, hány 3-élű séta van G-ben: a kérdezett utak száma ennek pontosan a fele lesz, hiszen minden útból pontosan két sétát lehet alkotni. (2 pont)
   A séta első csúcsa 100-féle lehet, hisz bármely csúcs szóba jön. A második csúcs a 4-regularitás miatt 4-féle lehet, (2 pont)
   míg a harmadik csúcs, az iménti három maradék szomszédjának valamelyike, így ez 3-féleképp választható, hasonlóan a 4-dikhez. (3 pont)
   A 3-élű séták száma tehát pontosan $100 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 3600$-nak adódik, így kérdezett részgráfok száma kereken $\frac{3600}{2} = 1800$. (2 pont)

6. Legyen F az a fa, aminek Prüfer-kódja $(1, 3, 2, 3, 9, 3, 4, 4, 5, 5)$. Hány komponensre esik szét F, ha töröljük a 3-as címkéjű csúcsát?

   Tanultuk, hogy minden csúcs foka 1-gyel több, mint ahányszor a Prüfer-kódban szerepel. (3 pont)
   A 3-as címkéjű csúcs a kódban 3-szor fordul elő, így a fokszáma 4 (2 pont)
   Ha tehát a 3-as címkéjű csúcsot elhagyjuk F-ből, akkor a maradék gráfnak pontosan 4 komponense lesz (5 pont)

   Nem tilos persze F meghatározása sem. Járjon 7 pont a fa helyes felrajzolásáért, 3 pont pedig a 3-as csúcs fokának megszámálásáért és a válaszért.