I. A Maxwell-egyenletek teljes rendszere:

1. Kiegészítés:

a, Operátorok:

i, rotáció: rot $\vec v$: vektorból vektort, örvényesség dönthető el vele.
↳ forgat: 90°-kal forgat jellegének szerint

$$\text{rot}\,\vec v = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec e_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \vec e_y\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \vec e_z\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

ii, divergencia: div $\vec v$: vektorból skalárt, egy pontba befutó érintők mennyisége
↳ deriválást jelent

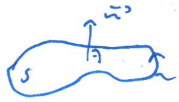
$$\text{div}\,\vec v = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

iii, gradiens: grad u: skalárból vektort, egy pontba futó érintő mennyisége, legnagyobb meredekség irányába mutat
↳ ez is deriválás

$$\text{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec e_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec e_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec e_z$$

b, Integráltételek:

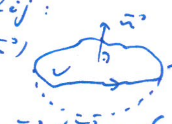
i, Stokes-tétel:



($\vec n$) elforgatással — L(S) peremgörbe

$$\int_S \text{rot}\,\vec a\, d\vec S = \oint_{L(S)} \vec a\, d\vec l$$

ii, Gauss-Osztrogradszkij:



($\vec n$) — S(V)

$$\int_V \text{div}\,\vec a\, dV = \oint_{S(V)} \vec a\, d\vec S$$

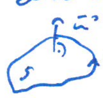
Ezeket használva kapható az integrális alakból a differenciális.

2. Maxwell-egyenletek:

→ differenciálegyenletek
→ egy pont kis környezetének viszonyait írják le
↳ közvetlen szomszédságban működnek → közelhatási törvények
→ evolúciós törvények is → leírják a tér alakulását, változását a jövőben.

a, I. Ampère-féle gerjesztési törvény:

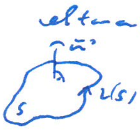
Az elektromágneses tér gerjesztett vektorai közt teremt kapcsolatot. A vezetési és eltolási áram mágneses teret kelt:



$$\oint_{L(S)} \vec H\, d\vec l = \int_S \Big(\underbrace{\vec j}_{\text{vezetési}} + \underbrace{\frac{\partial \vec D}{\partial t}}_{\text{eltolási}}\Big)\, d\vec S \xrightarrow{\text{Stokes}} \text{rot}\,\vec H = \vec j + \frac{\partial \vec D}{\partial t}$$

b, II. Faraday-féle indukciós törvény:

A mágneses indukció időbeli változása elektromos teret indukál, melynek iránya (Lenz-tv) ellentétes, mint az őt létrehozó változás. Ez az elektromágneses tér intenzitás-vektorai közt teremt kapcsolatot.



$$\oint_{L(S)} \vec E\, d\vec l = -\frac{d}{dt}\int_S \vec B\, d\vec S \xrightarrow{\text{Stokes}} \text{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \qquad E: \text{örvényes}$$

↳ S felület változatlan az időben → mágneses indukció

c, IV. Elektromos Gauss-törvény:

Zárt felület villamos fluxusa a belül lévő össztöltéssel egyezik meg.

$$\underbrace{\oint_{S(V)} \vec D\, d\vec S}_{\text{össz fluxus}} = \underbrace{\int_V \rho\, dV}_{\text{össztöltés}} \xrightarrow{\text{Gauss-Osztr.}} \text{div}\,\vec D = \rho \qquad D: \text{forrásos: forrása a töltéssűrűség}$$

d, $\overline{IV}$. Mágneses Gauss-törvény:

Fluxusmegmaradás törvénye: A mágneses erővonalak zártak, nincs mágneses monopólus.

$\oint_{S(V)} \bar{B}\, d\bar{S} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss–Osztr.}} \operatorname{div} \bar{B} = 0$

B: forrásmentes

e, $\overline{V}$. Anyagjellemzők:

$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \underset{\text{lin.}}{\bar{P}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}$; $\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M} = \mu_0 \underset{\text{lin.}}{\mu_r} \bar{H}$; $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_{be}) + \bar{J}_{be}$

f, $\overline{VI}$. Energiasűrűség:

$w = \frac{1}{2} \bar{E} \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H} \bar{B}$

Intenzitásmennyiségek: erőhatással kapcsolatos: $\bar{E}$, $\bar{B}$

Gerjesztettségi mennyiségek: forrással kapcsolatos: $\bar{H}$, $\bar{D}$

A forrásokat több módon is figyelembe vehetjük: → $\bar{E}_{be}$ és $\bar{J}_{be}$ beépített tagok (pl: kémiai töltésszétválasztás.)
→ $\bar{J}$ és ρ kapcsolatával
→ peremfeltételként megadva

Közegjellemzők: μ, ε, σ : mérésektől és anyagmodelltől feladatra vonatkozóak

Osztályozásuk: → izotróp: irányfüggetlen (skalárral leírható)
↳ anizotróp esetben tenzormátrix: $\underline{\varepsilon}$

→ lineáris: $\left.\begin{array}{l} \bar{D}_1 = F_D\{\bar{E}_1\} \\ \bar{D}_2 = F_D\{\bar{E}_2\} \end{array}\right\} \Rightarrow F_D\{c_1 \bar{E}_1 + c_2 \bar{E}_2\} = c_1 \bar{D}_1 + c_2 \bar{D}_2$

→ homogén: helyfüggetlen: $\varepsilon(\bar{r}) = \varepsilon = \text{konst}$

→ időbeli diszperzió: pl.: a polarizáció kialakulása időbe telik, ezért a t-beli értéket $t' < t$ alakítja

→ térbeli diszperzió: pl.: adott pontban a polarizáció függ a teljes anyag minden pontjában levő térerősségtől.

Magyarázat: H: mágneses térerősség $[\frac{A}{m}]$
J: áramsűrűség $[\frac{A}{m^2}]$
E: elektromos térerősség $[\frac{V}{m}]$
B: mágneses indukció $[T] = [\frac{Vs}{m^2}]$
D: elektromos eltolás: $[\frac{C}{m^2}] = [\frac{As}{m^2}]$
ρ: térfogati töltéssűrűség: $[\frac{As}{m^3}]$
ε: permittivitás
μ: mágneses permeabilitás
σ: vezetőképesség: $[\frac{S}{m}]$
w: energiasűrűség: $[\frac{J}{m^3}]$

II. Mikroszkopikus és makroszkopikus szemlélet, Maxwell egyenletek különböző típusú anyagok esetén:
Általános esetben $\bar{E}$ és $\bar{D}$ illetve $\bar{B}$ és $\bar{H}$ nem párhuzamosak. Ezért tekintjük ki az anyagjellemzőket. A permittivitás annak a mértéke, hogy egy közeg mennyire áll ellen ~~egy~~ a rá ható elektromos térnek szemben. A permeabilitás pedig annak a mértéke, hogy egy közeg mennyire áll ellen a rá ható mágneses térnek szemben.

1. Anyagjellemzők:
$\Rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M}$
$\Rightarrow \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$
$\Rightarrow \bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) + \bar{J}_b$

$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ $\quad \bar{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \bar{E}$
$\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}$

ε_0: vákuum-permittivitás: $8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
↳ származtatott: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$
μ_0: vákuum-permeabilitás: $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
↳ definiált

a) lineáris, izotróp: $\bar{B} = \mu \bar{H}$
$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

b) lineáris, anizotróp:
Iránytól függő: lineáris transzformáció;
$\bar{B} = \underline{\underline{\mu}} \cdot \bar{H}$
$\bar{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \bar{E}$

c) bianizotróp: $\bar{B} = \underline{\underline{\mu}} \bar{H} + \underline{\underline{\xi}} \bar{E}$ $\quad \xi\,(3 \times 3)$
$\bar{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \bar{E} + \underline{\underline{\zeta}} \bar{H}$

d) általánosan: $\bar{P}(\bar{E}, \bar{H}) = \bar{P}_f + \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}}_e \bar{E} + \underline{\underline{\xi}} \bar{H} + \underline{\underline{\mu}}_0 \bar{H}\ \bar{H} \cdot \bar{e}_H + \dots$

e) időben diszperzív anyag: $\bar{P}(\bar{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\chi}}(\bar{r}, t-\tau) \bar{E}(\bar{r}, \tau)\, d\tau$

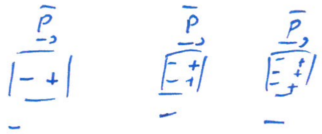
f) térbeli diszperzió: $\bar{P}_{ind}(\bar{r}) = \int_V \underline{\underline{\kappa}}(\bar{r}, \bar{r}') \bar{E}(\bar{r}')\, dV'$

2. Mikroszkopikus és makroszkopikus Maxwell-egyenletek:

Makroszkopikus:
$\text{rot}\, \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\quad$ Ebben csak a SZABAD töltések vannak benne
$\text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$
$\text{div}\, \bar{B} = 0$ $\quad$ és
$\text{div}\, \bar{D} = \rho$ $\quad$ csak a SZABAD áramok
$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M}$
↳ mágnesezettségi vektor
$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$
↳ polarizációs vektor

$\text{rot}\left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}\right) = \bar{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \Rightarrow \mu_0\left(\bar{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right) + (\text{rot}\, \bar{M})\mu_0 = \mu_0 \bar{J} + \mu_0\, \text{rot}\, \bar{M} + \mu_0 \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$
$\text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$
$\text{div}\, \bar{B} = 0$
$\text{div}(\varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho$ $\quad \text{div}\, \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{div}\, \frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}$

Mikroszkopikus:
$\text{rot}\, \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ $\quad$ Mikroszkopikus áram: makroszkopikus áram + anyagban lévő kötött áramok
$\text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$
$\text{div}\, \bar{B} = 0$
$\text{div}\, \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
mikroszkopikus töltés: ~~szabad~~ makroszkopikus töltés + anyagban lévő kötött töltések



$\text{div}\, \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{div}\, \frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}$

III. Milyen módszerekkel lehet speciális időfüggésű elektromágneses terek analízisét elvégezni, feltéve, hogy a közeg lineáris?

⇒ Állandósult állapot: konstans, vagy állandó amplitúdójú és frekvenciájú gerjesztés esetén
↳ ha a rendszer stabil akkor tud létrejönni
↳ sztatikus terek:
$$\mathrm{rot}\,\bar{H}(\bar{r}) = \bar{J}(\bar{r})$$
$$\mathrm{rot}\,\bar{E}(\bar{r}) = 0$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B}(\bar{r}) = 0$$
$$\mathrm{div}\,\bar{D}(\bar{r}) = \varrho(\bar{r})$$
$$\bar{B} = \mu\cdot\bar{H}$$
$$\bar{D} = \varepsilon\cdot\bar{E}$$
$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) + \bar{J}_b$$

⇒ Szinuszos állandósult állapot
↳ lineáris anyagok
↳ független forrás
↳ egyértékes, egyértékűnek tekintett anyagok

és stabilis

Komplex amplitúdók használata: $\tilde{E}(\bar{r})$ csak helytől függ
$$\bar{E}(\bar{r},t) \triangleq \mathrm{Re}\{\tilde{E}(\bar{r})\cdot e^{j\omega t}\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \to j\omega\text{-val szorzás}$$

$$\mathrm{rot}\,\tilde{H} = \tilde{J} + j\omega\tilde{D}$$
$$\mathrm{rot}\,\tilde{E} = -j\omega\tilde{B}$$
$$\mathrm{div}\,\tilde{B} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\tilde{D} = \varrho$$
minden esetben ilyen formában írható

⇒ Általános periodikus változás: Fourier-sorfejtés segítségével a különböző frekvenciák összegéből. (tagonként is komplex amplitúdók)

⇒ Abszolút integrálható időfüggvény: Fourier-transzf. segítségével
$$\mathrm{rot}\,\bar{H}(\bar{r},j\omega) = \bar{J}(\bar{r},j\omega) + j\omega\bar{D}(\bar{r},j\omega)$$
$$\mathrm{rot}\,E(\bar{r},j\omega) = -j\omega B(\bar{r},j\omega)$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B}(\bar{r},j\omega) = 0$$
$$\mathrm{div}\,\bar{D}(\bar{r},j\omega) = \varrho(\bar{r},j\omega)$$
$$E(\bar{r},j\omega) = \mathcal{F}\{E(\bar{r},t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} E(\bar{r},t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$
↳ transzformált alak frekvencia és helyfüggő

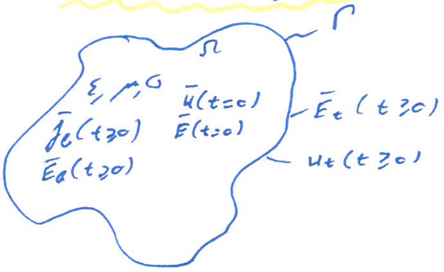
hátránya, hogy nehéz

⇒ Belépő gerjesztés esetén: Laplace-transzf. segítségével
$$\mathrm{rot}\,\bar{H}(\bar{r},s) = \bar{J}(\bar{r},s) + s\bar{D}(\bar{r},s)$$
$$\mathrm{rot}\,\bar{E}(\bar{r},s) = -s\bar{B}(\bar{r},s)$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B}(\bar{r},s) = 0$$
$$\mathrm{div}\,\bar{D}(\bar{r},s) = \varrho(\bar{r},s)$$
$$E(\bar{r},s) = \mathcal{L}\{E(\bar{r},t)\} \triangleq \int_{-0}^{\infty} E(\bar{r},t)e^{-st}\,dt$$

transzformáció könnyebb, de kezdeti érték szükséges
inverz transzformáció csak speciális időfgv. esetén egyszerű

IV. Maxwell-egyenletek adott tartományban történő egyértelmű megoldhatóságának feltételei + bizonyítás? Mi a helyzet végtelen tartományban?

Lineáris közeg esetén: Egyértelműen megoldható, ha adott:



- anyagjellemzők Ω-ban (ε, μ, σ)
- beültetett források $t \geq 0$: $\bar{J}_e(t \geq 0)$; $\bar{E}_e(t \geq 0)$ Ω-ban
- kezdeti értékek: $\bar{H}(t=0)$; $\bar{E}(t=0)$ Ω-ban
- peremfeltételek: $\bar{E}_t(t \geq 0)$, vagy $\bar{H}_t(t \geq 0)$ Γ-n

Bizonyítás: indirekt: 1. mo.: $\bar{E}'$; $\bar{H}'$; $\bar{B}'$ ... $\text{rot}\,\bar{H}' = \bar{J}' + \frac{\partial \bar{D}'}{\partial t}$ $\quad$ $\text{rot}\,\bar{H}'' = \bar{J}'' + \frac{\partial \bar{D}''}{\partial t}$

2. mo.: $\bar{E}''$; $\bar{H}''$; $\bar{B}''$ ... $\text{rot}\,\bar{E}' = -\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t}$ $\quad$ $\text{rot}\,\bar{E}'' = -\frac{\partial \bar{B}''}{\partial t}$

$\bar{E}_0 = \bar{E}' - \bar{E}''$ $\quad$ $\bar{D}' = \varepsilon \bar{E}'$ $\quad$ $\bar{D}'' = \varepsilon \bar{E}''$

$\bar{H}_0 = \bar{H}' - \bar{H}''$ $\quad$ $\bar{B}' = \mu \bar{H}'$ $\quad$ $\bar{B}'' = \mu \bar{H}''$

$$\text{rot}\,\bar{H}_0 = \bar{J}_0 + \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial t}$$ $\bar{E}_{t0} = 0$, vagy $\bar{H}_{t0} = 0$ peremfeltételek

$$\text{rot}\,\bar{E}_0 = -\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t}$$ $\bar{J}_{e0} = 0$ vagy $\bar{E}_{e0} = 0$ ~~beültetett források~~ gerjesztések

$$\bar{D}_0 = \varepsilon \bar{E}_0$$ $\bar{H}_0(t=0) = 0$, vagy $\bar{E}_0(t=0) = 0$ kezdeti feltételek

Innen: $\bar{E}_0 \cdot \text{rot}\,\bar{H}_0 - \bar{H}_0 \cdot \text{rot}\,\bar{E}_0 = \bar{E}_0 \cdot \bar{J}_0 + \bar{E}_0 \cdot \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial t} + \bar{H}_0 \cdot \frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t}$

$\bar{E}_0 = \frac{\bar{J}_0}{\sigma} - \bar{E}_{e0} - \frac{\bar{J}_{e0}}{\sigma} \Rightarrow \bar{E}_0 = \frac{\bar{J}_0}{\sigma}$

$$-\text{div}(\bar{E}_0 \times \bar{H}_0) = \frac{|\bar{J}_0|^2}{\sigma} + \bar{E}_0 \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial t} + \bar{H}_0 \frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t}$$

Energiamérleg: $$\underbrace{-\frac{d}{dt}\int_\Omega \varepsilon |\bar{E}_0|^2 + \mu |\bar{H}_0|^2 \, d\Omega}_{\leq 0} = \underbrace{\int_\Omega \frac{|\bar{J}_0|^2}{\sigma} \, d\Omega}_{\geq 0} + \underbrace{\int_\Gamma (\bar{E}_0 \times \bar{H}_0) \, d\Gamma}_{=0,\ \text{mert vagy } \bar{E}_{0T}=0,\ \text{vagy } \bar{H}_{0T}=0}$$

így az egyetlen megoldás: $\bar{E}_0 = \bar{H}_0 = 0$

$\bar{E}' = \bar{E}''$ és $\bar{H}' = \bar{H}''$ ami ellentmondás

Végtelen tartományban: ($\oint_S \bar{E} \times \bar{H} \, d\bar{S}$ vizsgálata)

→ Statikus és stacionárius terek esetén az integrál értéke 0-hoz tart, ha $r \to \infty$

Előírhatók a végtelenben peremfeltételek (pl.: $\varphi = 0$)

$$\textcircled{S} \xrightarrow[r]{} \sim \frac{1}{r^2}$$

→ Hullámtérben nem tart 0-hoz az integrál értéke

Sugárzási feltételt (Sommerfeld) kell előírni:

$$\Gamma \xrightarrow[r]{} \sim \frac{1}{r} \qquad \bar{E} \times \bar{H} \sim \frac{1}{r^2}$$

$\lim_{r \to \infty} rE \leq K$ és $\lim_{r \to \infty} rH \leq K$ korlát

$$\lim_{r \to \infty} r\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \bar{E} + \bar{e}_n \times \bar{H}\right] = 0$$

$$\lim_{r \to \infty} r\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \bar{e}_n \times \bar{E} - \bar{H}\right] = 0$$

ha ezek teljesülnek, akkor megoldható

V. Ismertesse az elektrodinamika felosztását! Mi alapján lehet egy fizikai problémát a megfelelő tartományba sorolni?

Felosztása az időbeli változás sebessége szerint történik, így léteznek állandó, lassan változó, illetve változó terek. => Jellemezhető a frekvenciával:

↳ szigetelők: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{1}{f}$

↳ vezetők: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$

Ezen hossz dimenziójú mennyiségek a változás sebességével fordítottak.

A vizsgált tér fizikai méretét egy d mennyiséggel jellemezzük.

1, Statikus és stacionárius terek: $d \ll \lambda$ és $d \ll \delta$, azaz $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

↳ Ha az idő szerinti deriváltakat elhagyjuk a Maxwell-egyenletek két részre válnak:

a, Elektrosztatika:

-> Faraday: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$ -> az elektromos tér örvénymentes, nem záródnak önmagukba -> potenciálos

-> Gauss: $\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho$ -> az elektromos tér forrása a töltés

-> anyagjellemzők: $\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}$ -> lineáris anyagok, homogén tér

Fogalmak: elektródák, potenciál, kapacitás

Alkalmazás: nagyfeszültségű technika

b, Magnetosztatika: (permanens mágnesek tere)

↳ statikus mágneses tér, ahol áramok nem folynak.

-> $\mathrm{rot}\,\bar{H} = 0$

-> $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$

-> $\bar{B} = \mu \cdot (\bar{H} + \bar{M})$

| Homogén egyenletrendszer -> konstans tér a megoldása

ahol: M: permanens mágnes mágnesezettsége

Fogalmak: mágneses skalárpotenciál

Alkalmazás: villamos gépek

c, Stacionárius áramlási tér:

↳ stacionárius áramok folynak ($J \neq 0$ és $J =$ áll.)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} &= 0 \\ \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{H} &= \mathrm{div}\,\bar{J} \\ \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{H} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

-> $\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$

-> $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$

-> $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b) + \bar{J}_b$

} áramlást leíró egyenletek

Fogalmak: ellenállás, áramkörök

Alkalmazás: földelés, erőművek

d, Stacionárius mágneses tér:

↳ stacionárius áramok hozzák létre

-> $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$

-> $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$

-> $\bar{B} = \mu(\bar{H} + \bar{M})$

Fogalmak: induktivitás, vektorpotenciál

Alkalmazás: villamos gépek, villamos energia átalakítók

2, Kvázistacionárius terek: lassú időbeli változás:

a, Mágneses (örvényáramú tere): $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \approx 0$: $\bar{J} \gg \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $d \ll \lambda$ és $d \approx \delta$, azaz $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

↳ eltolási áramok hatása elhanyagolható ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$)

↳ mivel a fémekben a vezetési áramsűrűség sokkal nagyobb, mint az eltolási

-> $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$

-> $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ -> az elektromos és mágneses tér csatoltan vannak

-> $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$

-> $\bar{B} = f(\bar{H}) = \mu \cdot \bar{H}$

-> $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E} + \bar{J}_b$

Fogalmak: időben szinuszosan változó terek, skin hatás, behatolási mélység

Alkalmazás: villamos gépek, roncsolásmentes anyagvizsgálat, indukciós hevítés c, Elektromos (kvázistacionárius áramlás): $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \approx 0$

↳ az indukciós csatolás elhanyagolható ($\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \approx 0 \to \mathrm{rot}\, \bar{E} = 0$)

↳ kapacitív csatolás az eltolási áramok révén van

→ $\mathrm{rot}\, \bar{E} = 0$

→ $\mathrm{div}\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = 0$

→ $\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}$

→ $\bar{J} = \sigma \bar{E}$

Alkalmazás: nagyfeszültségű szigeteléstechnika

3. Hullámtanok: $d \approx \lambda$ és $d > \delta$, azaz $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

a, Hullámterjedés:

↳ a tér forrásai nem jelennek meg az egyenletekben, jellemzően lineáris közegek, szinuszos változás (tehát $\rho = 0$; $J = 0$)

→ $\mathrm{rot}\, \bar{H} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

→ $\mathrm{rot}\, \bar{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$

Fogalmak: komplex térerősség, térerősség síkhullám, TV, polarizáció, reflexió

Alkalmazás: antennák, hullámvezetők, optika, mikrohullámú eszközök

b, Hullámok keltése:

→ ~ teljes Maxwell

Hullámhossz: $\lambda = \frac{c}{f}$

konfigurációs jellemző méret: D

$\lambda >> D$: sztatikus (kvázistac)

$\lambda \sim D$: hullámtér: full-wave

$\lambda << D$: optikai közelítések < fizikai optika / geometriai optika

VI. Ismertesse az elektrosztatika peremérték-feladatát + gyakorlati példákat. Adja meg a peremérték-feladat megoldását lineáris és homogén anyagjellemzőjű végtelen kiterjedésű közegben!

Egy peremérték-feladatnak 3 komponense van:

- egy V tértartomány
- egy egyenlet, amit a keresett függvénynek ki kell elégítenie V belsejében
- egy másik egyenlet, amit a keresett függvénynek ki kell elégítenie V határán

Megoldását keresetjük zárt térrészben, vagy nyitott, végtelen térben. Az első esetben a zárt térrészen kívüli, a „külvilágban" levő gerjesztések hatását úgy vesszük figyelembe, hogy a térrészt határoló zárt felületen peremfeltételeket írunk elő.

Gerjesztés: ρ

Redukált Maxwell-egyenletek: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$

$$\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (\text{lineáris: } \bar{D} = \varepsilon_0 E)$$

A határfelületen határfeltételt kell felírni, így:

$$\text{Ha } \quad u = 0 \quad \rightarrow \phi \text{ folytonos}$$

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ folytonos}$$

kétféle peremfeltétel létezik:

↳ Ha elő van írva a potenciál a peremen → Dirichlet

$$S_D: \ \phi = f \text{ (előírt)} \qquad \Rightarrow \Gamma_D: \ \varphi = \varphi_0 \text{ adott } (\bar{E}_t \text{ adott})$$

$$\phi(\bar{r}) = f(\bar{r}) \qquad \bar{r} \in S_D$$

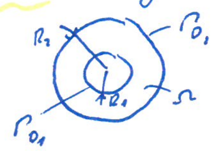
↳ Ha elő van írva az eltolás térerősségnek a normálisa a peremen → Neumann

$$S_N: \ \frac{\partial \phi}{\partial n} = g \text{ (előírt)} \qquad \Rightarrow \Gamma_N: \ \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma \text{ adott } (\bar{D}_n \text{ adott})$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\bar{r}} = g(\bar{r})$$

Feltétel: - létezik megoldása (egzisztencia)
- egyetlen megoldása van (unicitás)

Gyakorlati példák: gömbkondenzátor:



A tartományban nincs töltés:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0 \\ \Gamma_{D_1}: \ \phi = u \\ \Gamma_{D_2}: \ \phi = 0 \end{array}\right\} \text{PEF}$$

Megoldás: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = F_1 + F_2 \frac{1}{r}$

gömbszimmetria: $\Rightarrow \varphi(r)$

$$\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \hat{e}_r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Rightarrow \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\underbrace{r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}}_{\text{konstans}}\Big) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow \varphi(r) = \frac{A}{r} + B$$

Peremfeltétel: $\Rightarrow A, B = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(r = R_1) = \varphi_1 = u \\ \varphi(r = R_2) = \varphi_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A}{R_1} + B = u \text{ és } \frac{A}{R_2} + B = 0$$

$$\Downarrow$$

$$A = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} u$$

$$B = \frac{R_1}{R_1 - R_2} u$$

Töltés: $Q = 4\pi R_1^2 \sigma$

$$\sigma = D_n = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{u \varepsilon_0 R_2}{R_1 (R_2 - R_1)} \Rightarrow C = \frac{Q}{u} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Megoldás végtelen homogén térben:

$\Omega \to \infty$ $\quad$ ~~...~~ $\varphi(r \to \infty) = 0$ feltétellel

ε: állandó

$\hookrightarrow -\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\varepsilon \Delta \varphi$

$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\quad$ Poisson-egyenlet

$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} d\Omega'$

Green-fgv.

VII. Ismertesse a magnetosztatika peremérték-feladatát! Szemléltesse gyakorlati példával!

Gerjesztés: $\bar{M}$, vagy peremfeltételekkel figyelembe véve

Redukált Maxwell-egyenletek:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$$
$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \bar{M} \quad (\text{lineáris esetben } \bar{B} = \mu \cdot \bar{H})$$

Potenciálválasztás: $\mathrm{rot}\,\bar{H} = 0 \rightarrow \bar{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi_m$

φ_m: mágneses skalárpotenciál

$[\varphi_m] = A$

PDE:

a) $\mathrm{div}(\mu_0(-\mathrm{grad}\,\varphi_m + \bar{M})) = 0$

$$-\mathrm{div}\,\cancel{\mu_0}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_m = -\cancel{\mu_0}\,\mathrm{div}\,M$$
$$\Delta\varphi_m = \mathrm{div}\,\bar{M} \; : \text{Laplace-Poisson egyenlet}$$

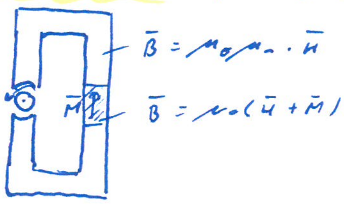
b) $\mathrm{div}(\mu_0 \mu_r(-\mathrm{grad}\,\varphi_m)) = 0$

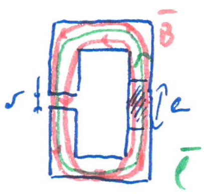
Peremfeltételek: Γ_D: $\varphi_m = F$ adott $\rightarrow \bar{H}_t$ $\qquad$ Γ_D: φ_m adott → adott

Γ_N: $\mu \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial n} = G$ adott $\rightarrow \bar{B}_n$ $\qquad$ Γ_N: $\mu_r \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial n}$ adott ($\mu_0 \bar{H}_n$ adott) ↳ lineáris esetben $\bar{B}_n$

Szabadtéri megoldás nem értelmezett, mert nincs mágneses töltés

Gyakorlati példa: vasmag légréssel:





a) $B = ?$

l: $\oint_l H\,d\bar{l} = 0$

$$\approx h\left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) + \delta\frac{B}{\mu_0} + (l - h - \delta)\frac{B}{\mu_0\mu_r} = 0$$

egyszerűsítések:

$\delta \ll l$, $\mu_r \gg 1$

$M \cdot h = I_0$, $h \to 0$

$$\Rightarrow B\left(\frac{\cancel{h}}{\mu_0} + \frac{\delta}{\mu_0} + \cancel{\frac{l - h - \delta}{\mu_0\mu_r}}\right) = \underbrace{M \cdot h}_{I_0}$$

$$B \approx \frac{\mu_0}{\delta} I_0$$

pl: $I_0 = 1\,A$

$\delta = 0{,}04\,m$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 10^{-2}} = \pi \cdot 10^{-5}\,T$$

VIII. Ismertesse a stacionárius áramlási tér vonatkozó feladatát + gyakorlati példák!
Megoldás lineáris és homogén anyagjellemzőjű végtelen kiterjedésű közegben.

$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \; ; \; \bar{J} \neq \bar{0}$

Gerjesztés: $\bar{E}_{be}$ és $\bar{J}_{be}$

Redukált Maxwell-egyenletek: $\to \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}$ ahol $\operatorname{div} \bar{J} = 0$

$$\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot}}_{0} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{J}$$

$$0 = \operatorname{div} \bar{J}$$

$$\to \operatorname{rot} \bar{E} = 0$$

$$\to \bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_{be}) + \bar{J}_{be}$$

forrásként

Potenciálválasztás: $\operatorname{rot} \bar{E} = 0$

$$\Leftrightarrow \bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

elektromos skalárpotenciál $[\varphi] = V$

$$\operatorname{div}(\sigma(-\operatorname{grad} \varphi + \bar{E}_b) + \bar{J}_b) = 0$$

$$-\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{div}(\sigma \bar{E}_b + \bar{J}_b)$$

ha homogén, forrásmentes a közeg: $\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad}}_{\equiv \Delta} \varphi = 0$ Laplace

Peremfeltételek: Γ_D: $\varphi = f$ adott $\to \bar{E}_t$ adott

Γ_N: $\sigma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = g$ adott $\to \bar{J}_n$ adott

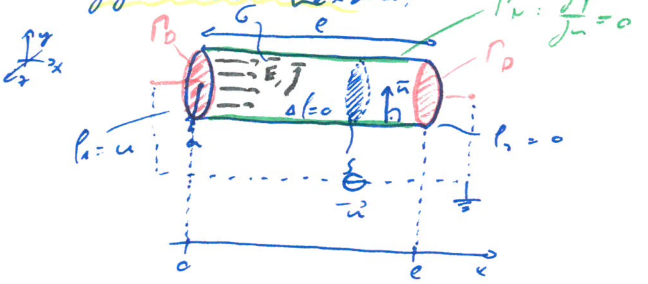
Megoldása végtelen, lineáris, homogén közegben ($\bar{E}_{be}$ elhanyagolásával)

$$-\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{div} \bar{J}_{be}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\operatorname{div} \bar{J}_{be}}{\sigma}$$

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div}' \bar{J}_{be}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \, d\Omega'$$

Gyakorlati példa:



$\bar{E} = \hat{e}_x \cdot E_x \Leftrightarrow \varphi(x) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0\right)$

PDE: $\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}}_{\Delta \varphi} = 0 \to \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$

$\varphi(x) = ?$

$\int dx$: $\frac{d\varphi}{dx} = A$

$\int dx$: $\varphi(x) = Ax + B \qquad A, B = ?$

PF: $\left.\begin{array}{l} \varphi(x=0) = U \\ \varphi(x=l) = 0 \end{array}\right\}$ $A, B \ldots \quad \varphi(x) = -\frac{U}{l} x + U$

$R = ? \qquad R = \frac{U}{I}$

$$\int_S \bar{J} \, d\bar{s} = a^2 \cdot \pi \cdot J_x = a^2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \underbrace{E_x}_{-\frac{d\varphi}{dx}} = a^2 \pi \sigma \frac{U}{l} = I$$

$$R = \frac{l}{\sigma a^2 \pi}$$

IX. Mondja ki és bizonyítsa a skaláris Laplace–Poisson egyenletre vonatkozó peremérték-feladatok egyértelmű megoldhatóságát zárt tartományban! Példákon keresztül a fizikai jelentéssel.

Elektrosztatika egyenletének segítségével:

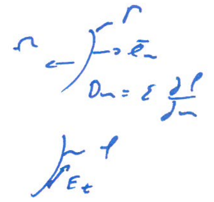
Tétel: $-\mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi = \rho$ egyértelmű, ha Ω-n

$\varphi = \varphi_i$ adott Γ_{Di}

$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma_i$ adott Γ_{Ni}

$\Gamma_D = \bigcup_i \Gamma_{Di}$

$\Gamma_N = \bigcup_i \Gamma_{Ni}$ $\quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$



Bizonyítás: indirekt: legyen φ' és φ'' is megoldás $\quad \Big| \quad \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{E}_0 \bar{D}_0 \, d\Omega$

$$\varphi_0 = \varphi'' - \varphi'$$

$$-\mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_0 = 0 \quad \Gamma_{Di}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_{Ni}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \bar{E}_0 \bar{D}_0 \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega -\mathrm{grad}\,\varphi_0 (-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0)\, d\Omega$$

$[\mathrm{div}\, u\bar{v} = \bar{v}\,\mathrm{grad}\, u + u \cdot \mathrm{div}\,\bar{v}]$

$u = \varphi_0 : \bar{v} = \varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0 \Rightarrow \mathrm{div}(\varphi_0 \varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0) = \varepsilon \cdot \mathrm{grad}\,\varphi_0 \cdot \mathrm{grad}\,\varphi_0 + \varphi_0 \cdot \mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0$

$$\varepsilon \cdot \underbrace{\mathrm{grad}\,\varphi_0 \cdot \mathrm{grad}\,\varphi_0}_{E_0^2} = \mathrm{div}\,\varphi_0(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0) - \varphi_0 \cdot \mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0$$

a tételből:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}\,\varphi_0(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0)\, d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi_0 \underbrace{(\mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0)}_{=0\ (PDE)} d\Omega$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \bar{E}_0 \bar{D}_0 \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon |\bar{E}_0|^2 d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}[\varphi_0(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0)]\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Gamma \varphi_0 \varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi_0 \, d\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma \varphi_0 \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_D} \underbrace{\varphi_0}_{0} \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_N} \varphi_0 \underbrace{\varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}}_{0} d\Gamma = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon |\bar{E}_0|^2 d\Omega = 0 \Rightarrow \bar{E}_0 = 0 \Rightarrow \varphi'' = \varphi' + \text{konstans}$$

és az elektromos térre vonatkozó egyértelmű megoldás

A térjellemzők egyértelműek maradtak. φ egy [illegible] szabadon választható

X. Ismertesse a stacionárius ~~áram~~ áramok mágneses terének peremérték-feladatát! Gyakorlati példákkal szemléltetés! Megoldás lineáris és homogén anyagjellemzőjű végtelen kiterjedésű közegben és kapcsolata a Biot-Savart törvénnyel.

Gerjesztés: $\bar{J}_{ki}$ (adott, vagy áramlási tér modellezéséből meghatározható)

Redukált Maxwell-egyenletek:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$$
$$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H}$$

Potenciálválasztás: → redukált skalárpotenciál ($\bar{H} = \bar{H}_s + \bar{H}_m$ szétbontás önkényes és önkényesség tárgya)

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}_s = \bar{J} \qquad \mathrm{rot}\,\bar{H}_m = 0$$
$$\bar{H}_m = -\mathrm{grad}\,\varphi_m$$

$$\mathrm{div}\,\mu(\bar{H}_s - \mathrm{grad}\,\varphi_m) = 0$$
$$-\mathrm{div}\,\mu\,\mathrm{grad}\,\varphi_m = -\mathrm{div}\,\mu\,\bar{H}_s$$

Γ_{Di}: φ_{mi} adott

Γ_{Ni}: $\mu \frac{\partial \varphi_{mi}}{\partial n}$ adott

→ vektorpotenciállal

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \rightarrow \bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A} \qquad \bar{A}\text{: mágneses vektorpotenciál}$$
$\mathrm{div}\,\bar{A}$ szabadon választható
$$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H}$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} = \bar{J}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} = \mu \bar{J}$$
$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{A} - \Delta \bar{A} = \mu \bar{J}$$
$$\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J}$$

Γ_{Di}: H_t adott

Γ_{Ni}: B_n adott

Példa: implicit mértékválasztásra

Legyen $\mathrm{div}\,\bar{A} = 0$ Coulomb-mérték

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{div}\,\bar{A}\right) = \bar{J} \quad (1)$$
$$-\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left[\frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{div}\,\bar{A}\right]\right) = \mathrm{div}\,\bar{J} = 0$$
$$-\Delta\left(\frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{div}\,\bar{A}\right) = 0 \quad (2)$$

Szabad téri megoldás:

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} = \bar{J} \qquad \Omega\text{: végtelen}, \; \mu\text{: állandó}$$

+ mérték: $\mathrm{div}\,\bar{A} = 0$

+ peremfeltétel: $B_n \rightarrow 0$ peremen / vagy / $H_t \rightarrow 0$ peremen $\Big\}\; \bar{B} \rightarrow 0$

$\bar{A} \rightarrow 0$ a végtelenben

$\bar{J}$ csak végesben van

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x$$

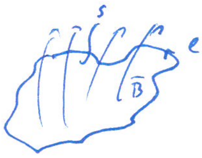
⋮ ⋮ y-ra és z-re is

Lásd $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Omega \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,d\Omega$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_\Omega \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,d\Omega'$$

Biot-Savart-törvény levezetése:



$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$$

$$\Phi = \int_S \bar{B}\, d\bar{S} = \int_S \operatorname{rot} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \oint_l \bar{A}\, d\bar{l}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \bar{J}(\bar{r}')\, dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_V - \frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} \times \bar{J}(\bar{r}')\, dV'$$

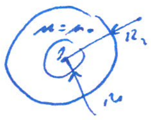
$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(\bar{r}') \times (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

vékony
$J\, dV \to I \cdot dl$
koncentrált

Biot-Savart:

$$\bar{B}(\bar{r}') = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_l \frac{d\bar{l} \times (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$

Példa: koaxiális kábel hosszegységre eső induktivitása:



$$\Phi = L \cdot I$$

$$\Phi' \cdot l = L' \cdot l \cdot I$$

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

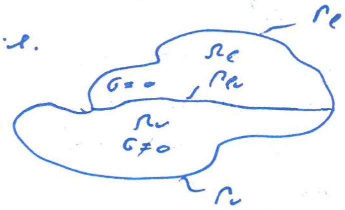
$$\Phi' = \int_{R_1}^{R_2} \mu \cdot H_\varphi \cdot dr = \frac{I \cdot \mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

XI. Ismertesse a kvázistacionárius elektromágneses tér peremérték-feladatát. A feladatleírást szemléltesse egyszerű gyakorlati példával!

A vizsgált tartományt két részre bontjuk.

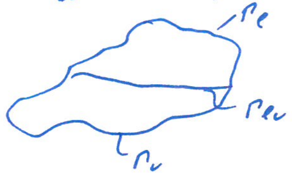
A gerjesztés általában Ω_e tartományban
- ↳ J_e (tekercs, állandó nagyság)
- ↳ peremfeltétellel



Ω_v: belül
$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$
$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$
$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$
$\bar{B} = \mu\cdot\bar{H}$
$\bar{J} = \sigma\cdot\bar{E}$

Ω_e: statikus tér
$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}_e$
$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$
$\bar{B} = \mu\cdot\bar{H}$

Peremfeltételek:



Γ_e:
- $\bar{H}\times\bar{n}$, $\bar{H}_t$ adott: Γ_H
- $\bar{B}_n$ adott: Γ_B, $\bar{B}\cdot\bar{n}$

Γ_v:
- $\bar{H}\times\bar{n}$, $\bar{H}_t$ adott: Γ_H
- $\bar{E}_t$ adott: Γ_E, $\bar{E}\times\bar{n}$

Γ_{ev}:
- $\bar{H}\times\bar{n}$ folytonos: $\bar{H}_t$ folyt: Γ_{evH}
- $\bar{B}\cdot\bar{n}$ folytonos: $\bar{B}_n$ folyt: Γ_{evB}

$\bar{A}-\varphi$ módszer:

↳ Ω_v-ben:

$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \Rightarrow \bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$ (div $\bar{A}$ választható)

$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}$

$\mathrm{rot}(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} \Rightarrow \mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} = \sigma(-\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t})$

$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{rot}\,\bar{A} + \sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi + \sigma\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$ (1)

$\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$

$\mathrm{div}(-\sigma\cdot\mathrm{grad}\,\varphi - \sigma\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}) = 0$

$-\mathrm{div}(\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi + \sigma\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}) = 0$ (2)

+ mértékválasztás
+ perem és folyt. feltételek
- implicit mérték
- mértékválasztás elhagyása

pl.: Coulomb mérték homogén anyag esetén:
- ↳ μ, σ állandó, $\mathrm{div}\,\bar{A} = 0$
- ↳ $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{A} - \Delta\bar{A} + \sigma\cdot\mu\cdot\mathrm{grad}\,\varphi + \mu\cdot\sigma\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$

$\Delta\bar{A} - \mu\sigma\cdot\mathrm{grad}\,\varphi - \mu\cdot\sigma\cdot\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$ (1)

$-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$ (2)

↳ Ω_e-ben:

$\mathrm{div}\,B = 0 \Rightarrow \bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$

$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{rot}\,\bar{A} = \bar{J}_e$

+ mértékválasztás
+ perem és folyt. feltételek.

pl.: Coulomb-mérték: $\Delta\bar{A} = -\mu\bar{J}$

$\bar{T}-\Omega$ módszer: áram vektorpotenciál és mágneses skalárpotenciál

↳ Ω_v:

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} \Rightarrow \mathrm{div}\,\bar{J} = 0 \Rightarrow \bar{J} = \mathrm{rot}\,\bar{T}$

$\mathrm{rot}(\bar{H} - \bar{T}) = 0 \Rightarrow \bar{H} - \bar{T} = -\mathrm{grad}\,\Omega$

$\bar{H} = \bar{T} - \mathrm{grad}\,\Omega$

$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\bar{T} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\bar{T} - \mu\,\mathrm{grad}\,\Omega)$

$\mathrm{div}\,\bar{B} = \mathrm{div}\,\mu(\bar{T} - \mathrm{grad}\,\Omega) = 0$

$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\bar{T} + \mu\cdot\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \mu\cdot\mathrm{grad}\,\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$

$-\mathrm{div}\,\mu\,\mathrm{grad}\,\Omega + \mathrm{div}\,\mu\bar{T} = 0$

+ mértékválasztás (div $\bar{T}$ megválasztható)

+ peremfeltételek $\bar{H}_t$, $\bar{E}_t$ Γ_v-n

Ω_e: $\bar{H} = \bar{H}_s + \bar{H}_m \qquad \mathrm{rot}\, \bar{H}_s = \bar{J}_e$

$$\bar{H}_s = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\bar{J}_e(\bar{r}') \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \, d\Omega'$$

$$\mathrm{rot}\, \bar{H}_m = 0 \Rightarrow \bar{H}_m = -\mathrm{grad}\, \varphi_m$$

$$\mathrm{div}\, (\mu (\bar{H}_s - \mathrm{grad}\, \varphi_m)) = 0$$

$$-\mathrm{div}\, \mu\, \mathrm{grad}\, \varphi_m = -\mathrm{div}\, \mu \bar{H}_s$$

$\bar{H}_t$ adott

vagy

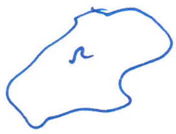
$\bar{B}_n$ adott

XII. Ismertesse az elektromágneses hullámok peremérték-feladatait! + Gyakorlati módszerek. A peremérték-feladat megoldása lineáris és homogén [végtelen] kiterjedésű közegben!

Gerjesztés: általában $\bar{J}_e$

Maxwell-egyenletek: minden lehetőség egyszerűsítésre:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$
$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$
$$\text{div}\,\bar{B} = 0$$
$$\text{div}\,\bar{D} = \rho$$
$$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H};\quad \bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E} \quad \text{(lineáris esetben)}$$
$$\bar{J} = \sigma \cdot (\bar{E} + \bar{E}_e) + \bar{J}_e$$



kezdeti feltétel: $\bar{E}(t=0)$; $\bar{H}(t=0)$

Peremfeltételek: vagy $\bar{H}_t$ vagy $\bar{E}_t$ megadása:

Γ_H: $\bar{H} \times n$ adott ($\bar{H}_t$)

Γ_E: $\bar{E} \times n$ adott ($\bar{E}_t$)

Sommerfeld-féle sugárzási feltétel:

$$\lim_{r \to \infty} r\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\bar{E} - (\bar{e}_r \times \bar{H})\right] = 0$$
$$\lim_{r \to \infty} r\left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\bar{E} \times \bar{e}_r - \bar{H}\right] = 0$$

csak kifelé áramlik energia a végtelenbe (távozó hullámoknak)

Peremérték-feladat: $\bar{A} - \varphi$ módszer

$\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$ + mértékválasztás

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\bar{A} \Rightarrow \text{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0$$
$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\text{grad}\,\varphi$$
$$\bar{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

1. $\text{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\bar{A} = \bar{J} - \varepsilon\,\text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$
2. $-\text{div}\,\varepsilon\,\text{grad}\,\varphi - \text{div}\,\varepsilon\,\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \rho$ $\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\text{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\bar{A} + \varepsilon\,\text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \bar{J} \\ &-\text{div}\,\varepsilon\,\text{grad}\,\varphi - \text{div}\,\varepsilon\,\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \rho \end{aligned}\right\}\ \text{PDE}$$

+ mértékválasztás

+ peremfeltételek

Szabad térben: $\bar{J} = 0$; $\varepsilon = \varepsilon_0$; $\mu = \mu_0$; $r \to \infty$

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\bar{A} + \mu\varepsilon\,\text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \mu \cdot \bar{J} = 0$$
$$-\text{div}\,\varepsilon\,\text{grad}\,\varphi - \text{div}\,\varepsilon\,\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\varepsilon\Delta\varphi - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\bar{A} = \rho$$
$$\cancel{\Delta\varphi - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$
$$-\text{div}\,\text{grad}\,\varphi - \text{div}\,\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Lorenz: $\text{div}\,\bar{A} = -\mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$$\text{grad}\,\text{div}\,\bar{A} - \Delta\bar{A} + \mu_0\varepsilon_0 \cdot \text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0$$

$\text{div}\,\bar{A} \to -\mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$$\Delta\bar{A} - \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (-\mu_0 \bar{J})$$
$$\Delta\varphi - \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\bar{A} - \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \bar{J}$$
$$\Delta\varphi - \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

+ sugárzási feltételek

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

megoldása:

$$\varphi(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Omega \frac{\rho(\bar{r}', t)}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\,d\Omega'$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\varphi\left(\bar{r}, t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}\right)$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d\Omega'$$

$$\varphi(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\Omega} \frac{\rho\left(\bar{r}, t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d\Omega'$$

$\bar{F} - \varphi_m$ módszer: $\quad \mathrm{rot}\,\bar{F} = \bar{D}$ $\qquad$ azonos peremfeltételek mellett duális feladata $\bar{A}-\varphi$-nek

$$\bar{H} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\varphi_m$$

Szinuszos állandósult állapot:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + j\omega\bar{D}$$
$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\bar{B}$$
$$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho$$
$$\bar{B} = \mu\cdot\bar{H}\,;\quad \bar{D} = \varepsilon\cdot\bar{E} \qquad \varepsilon\text{: frekvenciafüggő}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{H} = -\frac{\mathrm{rot}\,\bar{E}}{j\omega\mu}$$

$$\varphi(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\varphi(\bar{r})\cdot e^{j\omega t}\right\}$$
$$\bar{J}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\bar{J}(\bar{r})\cdot e^{j\omega t}\right\}$$
$$\rho(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\rho(\bar{r})\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\int_{\Omega}\frac{\rho(\bar{r})\cdot e^{-j\beta|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d\Omega'$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\bar{J}(\bar{r})\, e^{-j\beta|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d\Omega'$$

XIII. Végeselem módszer (FEM) alapgondolata. Vázolja a peremérték-feladat gyenge alakjához vezető levezetés főbb lépéseit, és szemléltesse ezt az elektrosztatikára vonatkozó modelljével.

Alapgondolat: a vizsgált tartományt kis tartományokra bontjuk. Ezeken a tartományokon feltételezzük, hogy az anyagjellemzők állandók.

↳ Ismert alakú függvényekkel (FEM: formafüggvényekkel/elemekkel) közelítjük a megoldást az egyes tartományokon

↑

w_i bázisban ($i = 1, 2 \dots$) – súlyozás

cél: $\langle \mathcal{L}\{u\} - f, w_i \rangle = 0$ skaláris szorzat: $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \cdot g^* \, d\Omega$

Elektrosztatika PEF-jének gyenge alakja:

$-\mathrm{div}\, \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi = \varrho$ Ω-ban

$\mathcal{L}\{.\}$, $u \sim \varphi$, $f = \varrho$

$\varphi = \varphi_0$ Γ_D-n

$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma_0$ Γ_N-en

$$\int_\Omega (-\mathrm{div}\, \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi - \varrho) \cdot w_i^* \, d\Omega = 0$$

$$-\int_\Omega (\mathrm{div}\, \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi) w_i^* \, d\Omega - \int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega = -\int_\Omega \mathrm{div}(w_i^* \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi) \, d\Omega + \int_\Omega \mathrm{grad}\, w_i^* \cdot \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi \, d\Omega - \int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega$$

$\mathrm{div}(a \cdot \underline{b}) = \mathrm{grad}\, a \cdot \underline{b} + a \cdot \mathrm{div}\, \underline{b}$

$\underline{b} = \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi$, $a = w_i^*$

$$-\oint_\Gamma w_i^* \cdot \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi \cdot d\Gamma + \int_\Omega \mathrm{grad}\, w_i^* \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi \, d\Omega - \int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega = 0$$

‖ felület szétbontása Neumann és Dirichlet peremre

$$-\int_{\Gamma_N} w_i^* \cdot \underbrace{\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{\sigma_0} d\Gamma - \int_{\Gamma_D} w_i^* \cdot \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\Gamma + \int_\Omega \mathrm{grad}\, w_i^* \varepsilon \,\mathrm{grad}\, \varphi \, d\Omega - \int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega = 0$$

A megoldást olyan altérben keressük, ami ~~hogy~~ kielégíti a Dirichlet-feltételt. (Neumann-feltétel: természetes feltétel)

$\varphi \approx v_0 + \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot v_j$ $\quad v_0 = \varphi_0$ Γ_D-n; $\quad v_j = 0$ Γ_D-n, $j = 1, 2$ $\}$ választott fgv.

$w_i = 0$ Γ_D-n, $i = 1, 2, 3, \dots$

$$-\int_{\Gamma_N} w_i^* \cdot \sigma_0 \, d\Gamma - \underbrace{\int_{\Gamma_D} w_i^* \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma}_{=0} + \int_\Omega \mathrm{grad}\, w_i^* \cdot \underbrace{\varepsilon \,\mathrm{grad}\left(v_0 + \sum_j c_j v_j\right)}_{\varepsilon \,\mathrm{grad}\, v_0 + \sum_{j=1}^{N} c_j \varepsilon \,\mathrm{grad}\, v_j} d\Omega - \int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{c_j}_{\text{ismeretlen}} \underbrace{\int_\Omega \mathrm{grad}\, w_i^* \cdot \varepsilon \,\mathrm{grad}\, v_j \, d\Omega}_{\text{ismert}} = \underbrace{\int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} \mathrm{grad}\, w_i^* \cdot \varepsilon \,\mathrm{grad}\, v_0 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} w_i^* \sigma_0 \, d\Gamma}_{\text{ismert gerjesztés}}$$

$\underline{A} \cdot \overset{\|}{\underline{c}} = \underline{b}$ forma, ahol:

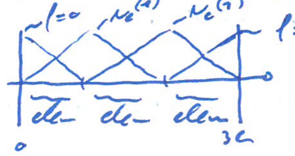
$[\underline{A}]_{ij} = \int_\Omega \mathrm{grad}\, w_i^* \, \varepsilon \,\mathrm{grad}\, v_j \, d\Omega$

$[\underline{b}]_i = \int_\Omega \varrho w_i^* \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} \mathrm{grad}\, w_i^* \cdot \varepsilon \,\mathrm{grad}\, v_0 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} w_i^* \sigma_0 \, d\Gamma$

$[\underline{c}]_j = c_j$

$\underline{c} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}$

Példa: rúdhomogenizálás: (1D)



$N_e^{(i)}$: formafüggvény (minden elemen ugyanaz)

$N_e^{(1)} = \frac{1}{e}(x^{(2)} - x)$

$N_e^{(2)} = \frac{1}{e}(x - x^{(1)})$

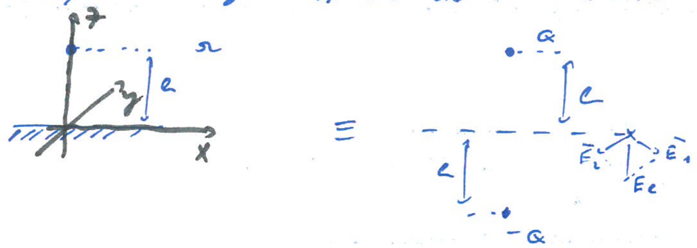
Előny: jól leköveti a geometriát

Hátrány: [illegible] számít[illegible]ás [illegible]

XIV Integrálegyenletek módszere az elektrodinamika peremérték-feladatainak megoldására. Szabadtéri Green-fgv.-ek és ezek hogyan használhatók az integrálegyenlet felírására.

Helyettesítő töltések módszerét elevenítjük fel:

Az eredeti konfigurációt helyettesítjük egy szabadtéri konfigurációval. Ebben olyan töltések vannak, amik eleget tesznek az eredeti PEF peremfeltételeinek.



||| ha a vezetőre helyezzük el a töltést, úgy, hogy a peremfeltétel továbbra is teljesüljön

$\sigma = -D_n$

$$\varphi(\bar r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Omega \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}\, d\Omega'$$

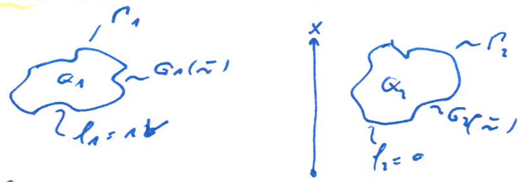
$$\varphi(\bar r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Gamma \frac{\sigma(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma'$$

$$\sigma(x,y) = \frac{2Qh}{4\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Gamma \frac{\sigma(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}\, dx'\,dy'$$

$$\varphi(x,y,z=0) = 0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Gamma \frac{\sigma(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\, dx'\,dy'$$

Példa: elektrosztatika:



$C = ?$

$$\varphi(\bar r) = \int_{\Gamma_1} \frac{\sigma_1(\bar r')}{4\pi\varepsilon|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma' + \int_{\Gamma_2} \frac{\sigma_2(\bar r')}{4\pi\varepsilon|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma' \quad \bar r \in \Omega$$

$$1V = \int_{\Gamma_1} \frac{\sigma_1(\bar r')}{4\pi\varepsilon|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma' + \int_{\Gamma_2} \frac{\sigma_2(\bar r')}{4\pi\varepsilon|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma' \quad \bar r \in \Gamma_1$$

$$0 = \int_{\Gamma_1} \frac{\sigma_1(\bar r')}{4\pi\varepsilon|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma' + \int_{\Gamma_2} \frac{\sigma_2(\bar r')}{4\pi\varepsilon|\bar r - \bar r'|}\, d\Gamma' \quad \bar r \in \Gamma_2$$

Megállapítások:

1) az integrálegyenletnél azt a felületet kell diszkretizálni, ahova a töltéseket kell koncentrálni (azt, ami eltér a szabad tértől)
2) tetszőleges forrás terét is tudjuk számolni integrállal
   ↳ Green-fgvek.

$$\varphi(\bar r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}\, dV \quad \text{amikor } \rho(\bar r') \text{ ismert}$$

A kernelfüggvényt a Green-fgv. határozza meg. Jelen esetben: $g(\bar r|\bar r') = \frac{1}{4\pi|\bar r - \bar r'|}$

$L\{u\} = -f$ Ω-ban : PDE ; $L_\Gamma\{u\} = g$ Γ felületen : peremfeltétel.

Green-függvények:

Általánosított eljárás, hogy hogyan lehet tetszőleges forrás terét integrállal felírni, ha egy adott differenciálegyenletet és peremfeltételeket ezek függvényében

$\mathcal{L}\{g(\bar r|\bar r')\} = -\delta(\bar r - \bar r')$ Ω-ban $\quad \bar r \in \Omega$

$\mathcal{L}_\Gamma\{g(\bar r|\bar r')\} = 0$ Γ-n $\quad$ megoldás minden $\bar r' \in \bar r$-re

Ugyanez a PDE koncentrált gerjesztéssel:

$$u(\bar r) = \int_\Omega g(\bar r|\bar r') \cdot f(\bar r')\, d\Omega'$$ $f(\bar r')$: tetszőleges gerjesztés

Megoldási módszer:

általános numerikusan: momentum-módszer:

$$0 = f(\bar r) - \oint_A g(\bar r|\bar r') \cdot \sigma(\bar r')\, dA'$$

1. megoldás közelítése v bázisokkal
2. hiba minimalizálása súlyozás w-vel $\langle \varepsilon, w_i \rangle = 0$
3. lineáris algebrai egyenletek megoldása
   a) pont kollokáció: ellenőrzés bizonyos pontokban
   b) Galjorkin-módszer: $v = w$

X5. Ismertesse az időbeli végesdifferencia-módszer (FDTD) alapgondolatát! Illusztrálja az algoritmust az egydimenziós állóhullámot közelítő megoldásának felírási egyenletekkel!

FDTD adj időben változó terekre alkalmazható.

1, $\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$

$$\text{div}\,\text{rot}\,\bar{H} = \underbrace{\text{div}\,\bar{J}}_{-\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\bar{D}$$

$$\frac{d}{dt}(-\rho + \text{div}\,\bar{D}) = 0$$

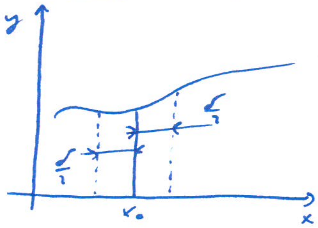
$\text{div}\,\bar{D} = \rho +$ konstans (időtől független)

2, $\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$$\text{div}\,\text{rot}\,\bar{E} \equiv 0 = -\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\bar{B}$$

$\text{div}\,\bar{B} = 0 +$ konstans (időtől független)

Alapgondolat: a differenciál operátor diszkretizációja (centrális diff.)



$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\frac{\delta}{2}) - f(x_0-\frac{\delta}{2})}{\delta} + o(\delta^3)$$

Közelítés a Taylor-sorok első elemével ($\delta \to 0$)

Ezután lépésenkénti iteratív megoldás

→ időbeli változásra számítás:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \rightarrow \text{div}\,\text{rot}\,\bar{H} = \text{div}\,\bar{J} + \text{div}\,\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$$

$\text{div}\,\bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ töltésmegmaradás

$$\Downarrow$$

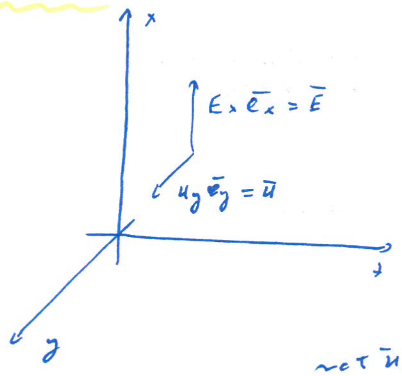
$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\bar{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \rightarrow \text{div}\,\text{rot}\,\bar{E} = -\text{div}\,\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\bar{B} = 0$$

1D példa:



$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = +\varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

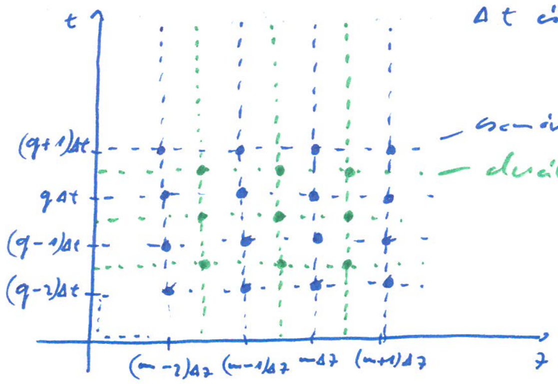
$$\text{rot}\,\bar{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

Feltételezések: $\bar{J} = 0$, $\sigma = 0$: lineáris, homogén közeg

$$\text{rot}\,\bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\bar{e}_x \qquad \text{rot}\,\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\bar{e}_y$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

Duális tér-idő rács létrehozása (diszkretizáció)



Δt és Δz lépésközök

– csomópontokban E_x-et veszik fel

– duális rács: csomópontokban H_y-t veszik fel

Jelölés: $E_x(m\Delta z,\ q\Delta t) = E_x^{q}[m]$

$H_y((m-\tfrac12)\Delta z,(q-\tfrac12)\Delta t) = H_y^{q-\frac12}[m-\tfrac12]$

Első egyenlet átírása:

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}\Big|_{m\Delta z,(q+\frac12)\Delta t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\Big|_{m\Delta z,(q+\frac12)\Delta t}$$

$$\varepsilon[m]\cdot\frac{E_x^{q+1}[m]-E_x^{q}[m]}{\Delta t} = -\frac{H_y^{q+\frac12}[m+\frac12]-H_y^{q+\frac12}[m-\frac12]}{\Delta z}$$ centrális diff. alkalmazása

$$E_x^{q+1}[m] = E_x^{q}[m] - \frac{\Delta t}{\Delta z}\frac{1}{\varepsilon[m]}\left(H_y^{q+\frac12}[m+\tfrac12]-H_y^{q+\frac12}[m-\tfrac12]\right)$$

Második egyenlet átírása:

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}\Big|_{(m+\frac12)\Delta z,\ q\Delta t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}\Big|_{(m+\frac12)\Delta z,\ q\Delta t}$$

$$\mu[m+\tfrac12]\,\frac{H_y^{q+\frac12}[m+\frac12]-H_y^{q-\frac12}[m+\frac12]}{\Delta t} = -\frac{E_x^{q}[m+1]-E_x^{q}[m]}{\Delta z}$$

$$H_y^{q+\frac12}[m+\tfrac12] = H_y^{q-\frac12}[m+\tfrac12] - \frac{\Delta t}{\Delta z}\frac{1}{\mu[m+\frac12]}\left(E_x^{q}[m+1]-E_x^{q}[m]\right)$$

Az algoritmus kezdeti értékek és peremfeltételek megadása után önálló és ~~mégis~~ mindig fél cellát halad előre lépésenként.

kezdeti értékek: $t=0$ pontok
peremfeltételek: $z=0$ és $z=l$ pontok

Stabilitási kritérium: Az időbeli koordinátákat kötni kell a térbeliekhez.

$$\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\,\Delta t \le \Delta z$$

előnye: a lépések egyszerűek
- tranziens válasz transzformálható

hátránya: csak tranziens választ ad
- sok ismeretlen

anyagjellemzők kezelése:

nemlinearitás kezelhető

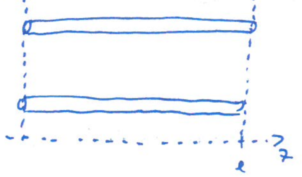
!

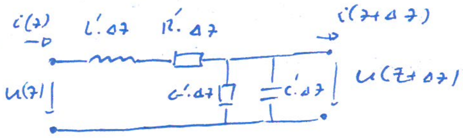
éles határon feltétel kell

diszperzió megadása időtartományban

XVI. Ismertesse és hasonlítsa össze a távvezetékek tranziens jelenségeinek számítására használható módszereket! Térjen ki arra, hogy a feladatot peremérték-feladatként tárgyalja.

Távvezetékek tranziens jelenségei:





$l \gg \lambda$ az hosszmenti irányban hullámjelenség
keresztirányban statikus tér
(koncentrált paraméterek)

távíró egyenletek:

$$-\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = R' \cdot i(z,t) + L' \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G' \cdot u(z,t) + C' \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Kezdeti feltételek: → $u(z,t=0)$ és $i(z,t=0)$ megadása

Peremfeltételek: → $u(z=0,t)$, vagy $i(z=0,t)$, vagy $F(u(z=0,t), i(z=0,t))$ megadása

→ $u(z=l,t)$, vagy $i(z=l,t)$, vagy $F(u(z=l,t), i(z=l,t))$ megadása

⇓

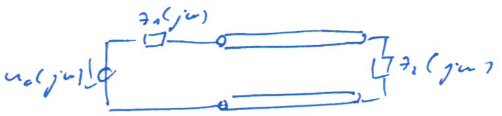
peremérték-feladat

Számítási lehetőségek:

→ Fourier-transzformáció

$\mathcal{F}\{u_0(t)\} = U_0(j\omega)$

$\mathcal{F}\{i_0(t)\} = I_0(j\omega)$



$$U(j\omega) = \frac{U_0(j\omega)}{I_0(j\omega)} = Z_1(j\omega)$$

$$U(z,j\omega) = \mathcal{F}\{u(z,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(z,t) \cdot e^{-j\omega t}\,dt$$ → nincs szükség kezdeti feltételek megadására, de $-\infty$-ben és ∞-ben a határt kikötése kell

$$I(z,j\omega) = \mathcal{F}\{i(z,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} i(z,t) \cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dU(z,j\omega)}{dz} &= R' \cdot I(z,j\omega) + j\omega L' \cdot I(z,j\omega) \\ -\frac{dI(z,j\omega)}{dz} &= G' \cdot U(z,j\omega) + j\omega C' U(z,j\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2 U(z,j\omega)}{dz^2} - (R'+j\omega L')(G'+j\omega C')\,U(z,j\omega) = 0$$

$$\gamma(j\omega) = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}$$

$$Z_0(j\omega) = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}$$

Megoldás:

$$U(z,j\omega) = U^+(j\omega) \cdot e^{-\gamma(j\omega) z} + U^-(j\omega) \cdot e^{\gamma(j\omega) z}$$

$$I(z,j\omega) = \frac{U^+(j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{-\gamma(j\omega) z} - \frac{U^-(j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{\gamma(j\omega) z}$$

Peremfeltételek érvényesítése:

$$\left.\begin{aligned} -U_0(j\omega) + Z_1(j\omega) \cdot I_0(j\omega) + U(z=0,j\omega) &= 0 \\ I(z=l,j\omega) \cdot Z_2(j\omega) &= U(z=l,j\omega) \end{aligned}\right\} \quad (I_0(j\omega) = I(z=0,j\omega))$$

⇓

kifejezhető $U^+(j\omega)$ és $U^-(j\omega)$

$$\left\{\begin{aligned} &-U_0(j\omega) + Z_1(j\omega)\left(\frac{U^+(j\omega)}{Z_0(j\omega)} - \frac{U^-(j\omega)}{Z_0(j\omega)}\right) + U^+(j\omega) + U^-(j\omega) = 0 \\ &\left(\frac{U^+(j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{-\gamma(j\omega) l} - \frac{U^-(j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{\gamma(j\omega) l}\right) \cdot Z_2(j\omega) = U^+(j\omega) \cdot e^{-\gamma(j\omega) l} + U^-(j\omega) \cdot e^{\gamma(j\omega) l} \end{aligned}\right.$$

Bevezetve:

$$r_1(j\omega) = \frac{Z_1(j\omega) - Z_0(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_0(j\omega)}$$

$$r_2(j\omega) = \frac{Z_2(j\omega) - Z_0(j\omega)}{Z_2(j\omega) + Z_0(j\omega)}$$

⇓

$$U(z,j\omega) = U_0(j\omega) \cdot \frac{Z_0(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_0(j\omega)} \cdot \frac{e^{-\gamma(j\omega) z} + r_2(j\omega) e^{-\gamma(j\omega)(2l-z)}}{1 - r_1(j\omega)\, r_2(j\omega)}$$

Az időtartományban inverz Fourier-transzformálással kapunk eredményt → nehézkes

→ Laplace-transzformáció: Az előző levezetés érvényes $s=j\omega$ helyettesítéssel, de a transzformáció csak belépő jelek esetén használható és kezdeti feltételek nem hagyhatók el.

Ha ideális távvezetéket feltételezünk ($R'=0, G'=0$), akkor $m_1(s)$ és $m_2(s)$ racionális törtfüggvények.

$\Downarrow$

inverz transzformáció könnyű

Az előző képlet átalakítható a mértani sor összegképletének felhasználásával.

különböző hullámok időben eltolva

$$\tau = \frac{z}{v} \; ; \; T = \frac{l}{v}$$

$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ hullámsebessége

Menetdiagram módszer alapja

XVII. Ismertesse az elektromágneses inverz feladatok fogalmát és gyakorlati alkalmazásait! Adja meg a feladat jól, illetve gyengén meghatározottságának feltételeit! Tárgyalja a regularizálás célját és módszereit! Illusztrálja egy egyszerű elektrosztatikai feladat megoldásán!

Alapfogalmak:

- objektum: leírni kívánt fizikai rendszer
- modell: az objektum leírható egy X modellel, ami lényeges jellemző paraméterek összessége, $x \in X$ - modell tér (összes lehetséges leírás)
- adat: az objektum terméke, mérésből származik.
- mérés: y: ~~adat~~ adat; $y \in Y$: adattér
- direkt feladat: $x \to y$ következtetés fizikai törvények alkalmazásával
  $y: D\{x\}$; D: direkt operátor
  $x \in X$, $y \in Y$ egyértelmű
- inverz feladat: $y \to x$ következtetés
  Nehézség, y általában zajjal terhelt, $D^{-1}\{\}$ nem létezik ált.
  adott y: $\hat{x}: x \in X,\ y = D\{\hat{x}\}$
  mért: $\tilde{y} = y + \underset{\text{zaj}}{n}$ $\qquad \hat{x} \triangleq \underset{x\in X}{\arg\min} \|\tilde{y} - D\{x\}\|$

Bemutatása:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Fizikai objektum}} \arrow[r, bend left, "\text{direkt}"] & \boxed{\text{Megfigyelhető mennyiség}} \arrow[l, bend left, "\text{inverz}"] \end{tikzcd}$$

EM: - fizikai obj: $\underset{\text{anyagjell.}}{\{\varepsilon, \mu, \sigma\}} + \underset{\text{források}}{\{\bar{J}_0, \bar{E}_0\}} \to \underset{\text{megfigyelhető}}{\{\bar{E}, \bar{B}\}}$

- direkt: Maxwell, egyértelmű
- inverz: nincs általános, szisztematikus eljárás, nem egyértelmű

Alkalmazások:
- EM roncsolásmentes anyagvizsgálat
- radar
- orvosi képalkotás
- geofizika
- jelfeldolgozás

Jól meghatározottság 3 feltétele (Hadamard, 1901):

a) egzisztencia: létezik megoldás: $\hat{x} \in X : y = D\{\hat{x}\}$

b) unicitás: a megoldás egyértelmű: $D\{\hat{x}_1\} = D\{\hat{x}_2\} \Leftrightarrow \hat{x}_1 = \hat{x}_2$

c) folytonosság: $\hat{x}$ megoldás folytonosan függ y-tól:

$$\left.\begin{aligned} y &= D\{\hat{x}\} \\ y' &= D\{\hat{x}'\} \end{aligned}\right\} : \|y - y'\| \to 0 \Rightarrow \|\hat{x} - \hat{x}'\| \to 0$$

Ha bármelyik sérül → gyengén meghatározott.

Regularizálás:

cél: gyengén meghatározottság csökkentése
eszköz: „a priori" inf. / felt.

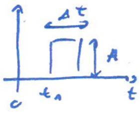
Regularizálás módszerei:

a) Dimenzió korlát: az X végtelen dimenziós tér helyett a megoldást egy véges dimenziójú X-ben keressük.

1. véges bázisban való keresés:
$$x(\bar{r}) \cong \sum_{i=1}^{N} c_i b_i(\bar{r})$$
$b_i(\bar{r})$: i-edik bázisfv.
N: dimenzió
feladat: c_i-k megoldása

2. megoldás paraméterezése: véges számú paraméterrel rendelkező függvényosztály kiválasztása

pl.: $x(t)$



$x(t) \leftrightarrow [t_1, \Delta t, A]$

3. Mintavételezés: $x(t) \rightarrow [x(0), x(\tau), x(2\tau), \ldots, x((n-1)\tau)]$ vektor

Az $\hat{x}$ megoldást az x végtelen dimenziójú térben keressük, de véges sok érték áll rendelkezésre $\Rightarrow$ diszkrét inverz feladat.

4. Additív büntetőfgv. (Tikhonov)

Optimalizálási feladat módosítása: $\hat{x} = \underset{x \in X}{\arg\min} \left[\lVert y - D\{x\} \rVert + \alpha F\{x\} \right]$

regul. paraméter $\alpha > 0$; funkcionál $F \geq 0$

Az $F\{\cdot\}$ funkcionállal megfogalmazott előzetes várakozások, míg α ezek súlya.

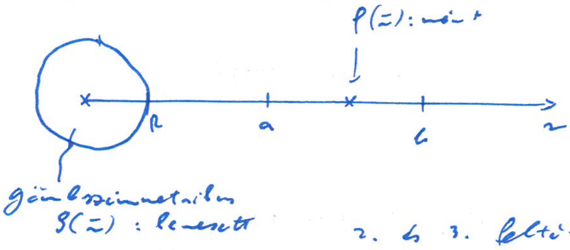
pl. $F(x) = \int_0^T \left| \frac{dx}{dt} \right|^2 dt$: simasági funkcionál

kompromisszum: $\alpha \uparrow$: a priori inf. súlya nő

$\alpha \downarrow$: adathűség

Elektrosztatikus példa:

Gömbszimmetrikus töltéseloszlás:



modell: $\rho(r)$ $r \in [0, R]$

adat: $\varphi(r)$ $r \in [a, b]$

direkt feladat:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \underbrace{\int_0^R \rho(\xi) 4\pi \xi^2 d\xi}_{Q}$$

2. és 3. feltétel sérül: gyengén meghatározott

inverz feladat: $\varphi(r) \rightarrow \rho(r)$

XVIII. Ismertesse az optimalizálási módszerek alkalmazását az elektromágneses inverz és tervezési feladatok megoldására! Tárgyalja a célfüggvény fogalmát és a feltételes optimalizálási feladat kitűzését! Adjon az optimalizálási módszerekre egy rendszerező áttekintést azok lényegesebb tulajdonságainak kiemelésével!

Optimalizálási feladat: minimum keresés a modell (direkt ~~pr~~ probléma bemenete) legjobb megválasztásával.

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\hat{x} = \arg\min_{x \in X} f(x) \to \text{célfüggvény}$$

x: N dim-ű modell vektor

$$\left.\begin{aligned} g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ l_k(x) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \end{aligned}\right\} \text{feltételek}$$

$f(x)$ kiértékelése: pl.: elektromágneses szimuláció

Klasszikus módszerek:

Véges lépésszámú algoritmusok, konvergens iteráció

- direkt / gradienst nem igénylő módszerek
  - Naiv keresés: X modelltérben kellően sok pontot jelölünk ki. Ezekben a pontokban kiértékeljük a célfüggvényt.
    ↳ tetszőleges eloszlás szerint
    ↳ ahol $F(x)$ minimális, ott $\hat{x} = x$
  - Minta keresés: Adott egy kiinduló pont és annak „szomszédai" → minta alapján
    Ha van olyan ~~minta~~ szomszéd, amiben $f(x)$ kisebb → minta új középpontja
    Ha egy ilyen szomszéd sincs → minta méretének csökkentése
- indirekt / gradiens alapú módszerek:
  - Cauchy-módszer: Adott ~~...~~ $x_1 \in X$ kezdőpontból a maximálisan meredek csökkenés irányában lépünk ($-\operatorname{grad} f(x)$). A megtett lépés hossza λ_i paraméterrel állítható.

    $$x_{i+1} = x_i - \lambda_i \operatorname{grad} f(x)|_{x_i} \qquad 0 < \lambda_i < 1$$

  - Newton-módszer: Hasonló módszer, de másodfokú felülettel közelít.
    ↳ $\underline{H}$ - Hesse-mátrix

    $$x_{i+1} = x_i - \lambda_i \left(\underline{H}|_{x_i}\right)^{-1} \operatorname{grad} f(x)|_{x_i}$$

Ezek csak lokális minimum ~~...~~ keresésére jók. → több algoritmus kombinálható

Modern módszerek:

Természeti világ jelenségeit utánozni kívánó heurisztikákon alapulnak.

- Genetikus algoritmus (evolúciós): egyed: $\underline{x} \in X$ modellvektor
  populáció: $A^i = \{\underline{x}_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i\}$ → i-edik nemzedék (generáció) → n egyed halmaza
  új egyedek létrejötte: mutáció: $\Rightarrow x_k^i \to x_k^{i+1}$
  kereszteződés: $\to \{x_k^i, x_l^i\} \to x_m^{i+1}$
  ↳ sztochasztikus alapon
  szelekció: $A^i \to A^{i+1}$ bizonyos egyedek megsemmisítésével
  fitness fgv. kiértékelés: $F(x_n^{i+1}) < \varepsilon$, $\forall k$-ra
  ↳ sok fgv. hívás, de globális optimumhoz tart
- Particle Swarm Optimization (viselkedés alapú): egyed: $x \in X$
  raj: $A^i = \{\underline{x}_1^i, \underline{x}_2^i, \dots, \underline{x}_n^i\}$
  egyedek mozgása: $A^{i+1} = \{\underline{x}_1^i + \underline{v}_1^i, \dots, \underline{x}_n^i + \underline{v}_n^i\}$
  egy rajban megosztott információk alapján a sebesség a globális optimum felé mutat

- Szimulált hűtés (simulated annealing): $\underline{x} \in X$ a fématomok lehetséges elrendeződése
(kristályosodási folyamat)

$f(\underline{x})$: a szerkezethez rendelhető belső energia

A T hőmérsékleti paramétert és a Boltzmann eloszlást használja.

$\underline{x}^i \to \underline{x}^{i+1}$: $\Delta E = E(\underline{x}^{i+1}) - E(\underline{x}^i)$

ha $\Delta E \leq 0$, akkor 1 valószínűséggel lépünk

ha $\Delta E > 0$, akkor $p = e^{-\frac{\Delta E}{kT^i}}$

$\to$ hűtés: $T^{i+1} < T^i$

minden lépésben csökken

Akkor használják, ha véges számú fgv. hívás kell.

- Helyettesítő modellezés: Eredeti $f(x)$ célfüggvény helyett $\tilde{f}(x)$ modell alkalmazása, ami jól közelíti $f(x)$-t, de kevésbé számításigényes a kiértékelése

$\downarrow$

Létrehozása pl.: n számú kiértékelésre támaszkodva

$f(\underline{x}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

tanuló adatok

pl.: expected improvement algoritmus

$f(x) \to \xi(x)$ Gaussi véletlen folyamat

XIX. Ismertesse a sajátérték-feladat fogalmát! Tárgyalja részletesen a négyszög keresztmetszetű csőtápvonal módusait és diszperziós egyenletét!

Sajátérték-feladat: általánosan megfogalmazható $A(x) = \lambda x$ formában, ahol:

- A – operátor, lineáris
- $x \neq 0$ megoldás – sajátvektor/sajátfgv.
- λ – sajátérték (skalár)

Például: szinuszos állandósult állapotban, homogén térben:

$$\Delta \bar{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \bar{E} = 0$$
$$\Delta \bar{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \bar{H} = 0$$

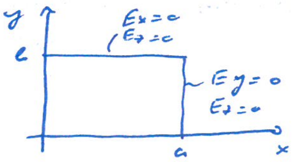
sajátérték-feladatok

→ megoldások: módusok

Tetszőleges tér előállítható a módusok lineárkombinációjaként.

Négyszög keresztmetszetű csőtápvonal:

- → z irányban a geometria változatlan
- → nincs forrás a vizsgált térben
- → szinuszos állandósult állapot



PDE: $\Delta \bar{E} + \omega^2\mu\varepsilon \bar{E} = 0$

peremfeltétellel: $\bar{E}_t = 0$, $\bar{H}_n = 0$

A megoldást $\bar{E}(x,y,z) = E^+(x,y)\cdot e^{-\gamma z}$ alakban keressük (változatlan geometria)

PDE: $$\frac{\partial^2 E^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E^+}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon)E^+ = 0 \qquad E^+\text{: komplex csúcsérték}$$

$\text{rot}\,\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega \;;\; \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$

$\text{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}$

⇓

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x$$
$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \qquad -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z$$

Minden komponens kifejezhető E_z és H_z segítségével.

A tér szétválasztható transzverzális elektromos és transzverzális mágneses módusra.

$E_z = 0$ (TE) $\qquad H_z = 0$ (TM)

Ehhez alkalmazzuk a fenti hullámegyenlet z irányú komponensét. (TM módus)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon)E_z = 0$$

A megoldást szeparációval keressük: $E_z(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$

$$Y\cdot\frac{d^2X}{dx^2} + X\cdot\frac{d^2Y}{dy^2} + (\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon)XY = 0$$

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon = 0$$

Az egyenletben szereplő tagok mind konstansok:

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2$$

$\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon = k_x^2 + k_y^2$ diszperziós egyenlet

γ és ω kapcsolatát adja meg

A differenciálegyenlet megoldása: $X(x) = c_1\cdot\sin k_x x + c_2\cos k_x x$

$Y(y) = c_3\cdot\sin k_y y + c_4\cdot\cos k_y y$

$$E_z(x,y) = X\cdot Y = c_1\cdot c_3\cdot\sin k_x x\,\sin k_y y$$

↑

peremfeltételek:

peremfeltételek:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ és } x=a \\ y=0 \text{ és } y=b \end{array}\right\} E_z=0 \qquad \begin{array}{l} \sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \\ \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\cdot\pi}{b} \end{array}$$

&

TM_{mn} módusok

(meghatározása E_{mn}-ből, vagy Poynting-vektorból

TE módus hasonlóan: $H_z(x,y) = C\cdot\cos k_x x \cdot \cos k_y y$

Diszperziós egyenlet vizsgálata:

$$\gamma^2 + \underbrace{\omega^2\mu\varepsilon}_{\text{EM hullám változási sebessége}} = \underbrace{k_x^2 + k_y^2}_{\text{hullámvektor komponensei}}$$

γ: z-irányú terjedés

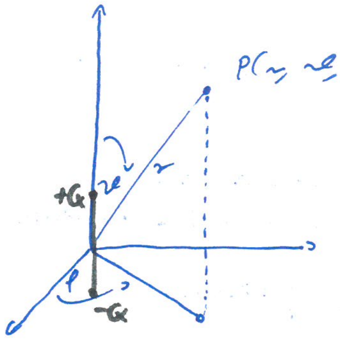
$\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$ → terjedő módus: $\gamma = j\cdot\beta$, azaz $\omega^2\mu\varepsilon > k_x^2 + k_y^2$

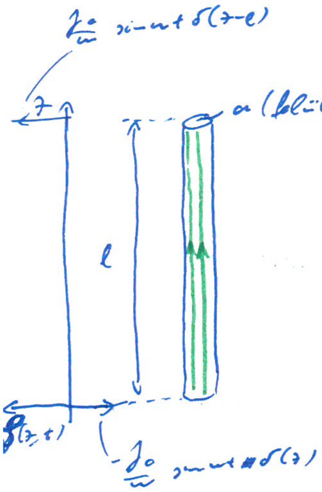
↳ eltűnő módus: $\gamma = \alpha$, azaz $\omega^2\mu\varepsilon < k_x^2 + k_y^2$

↳ oszcillációk: Poynting-vektor képzetes

XX. Ismertesse a Hertz-dipólus elektromágneses terét és az antennajellemzőket!

Hertz-dipólus: (rúd-antenna):
Rövid, l hosszúságú vezetődarab, melyben tiszta szinuszos időfüggésű áram folyik, mégpedig úgy, hogy értéke a vezető mentén állandó. Ez akkor lehetséges, ha a vezető hossza sokkal kisebb az adott frekvenciához tartozó hullámhossznál ($l \ll \lambda$). Gömbi koordinátarendszerben tárgyaljuk:





$$J(z,t) = J_0 \cdot \cos\omega t\,[\varepsilon(z) - \varepsilon(z-l)]$$

folytonossági egyenlet: $\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} J(z,t) = -J_0 \cos\omega t\,[\delta(z) - \delta(z-l)]$

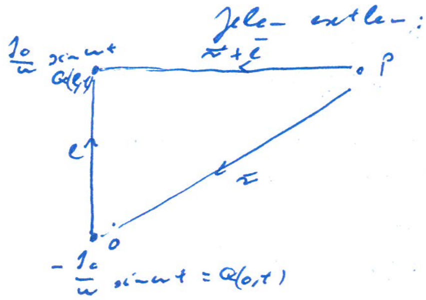
$$\hookrightarrow \rho(z,t) = -\frac{J_0}{\omega}\sin\omega t\,[\delta(z) - \delta(z-l)]$$

A két végpont töltése tehát: $Q = \sigma \cdot a = \pm \frac{I_0}{\omega}\sin\omega t$

felület

A potenciálok az 1-f módszerrel határozhatók meg.

$$\varphi(\bar r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\Omega \frac{\rho\left(\bar r', t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{v}\right)}{|\bar r - \bar r'|}\,dr'$$



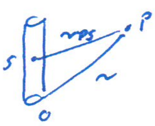
$$\varphi(\bar r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\frac{I_0}{\omega}\cdot\sin\omega\left(t - \frac{|\bar r + \bar l|}{v}\right)}{|\bar r + \bar l|} - \frac{\frac{I_0}{\omega}\cdot\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right)$$

$l \to 0$ és $I_0 \to \infty$ úgy, hogy $p = I_0 \cdot l = \text{const}$
antenna nyomatéka

$$\varphi(P,t) = \frac{I_0 \cdot \bar l}{4\pi\varepsilon\omega}\cdot \operatorname{grad}_0 \frac{\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$ → 0 pont szerinti gradiens

$$\varphi(P,t) = -\frac{I_0 \cdot \bar l}{4\pi\varepsilon\omega}\cdot \operatorname{grad}_P \frac{\sin\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$ → $\bar l \cdot \operatorname{grad} = l \cdot \frac{\partial}{\partial z}$
z irány miatt

$$\bar A(\bar r,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_\Omega \frac{\bar J\left(\bar r, t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{v}\right)}{|\bar r - \bar r'|}\,dr'$$



Jelen esetben: $r_{PS} = |\bar r - \bar r'|$, $\bar r' = s$

$$\bar A(P,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{z=0}^{l} \frac{J_0 \cdot \cos\omega\left(t - \frac{r_{PS}}{v}\right)}{r_{PS}}\cdot a \cdot dz\,\bar e_z$$

$l \to 0 \Rightarrow r_{PS} \to r$, $J_0 \cdot a = I_0$

$$\bar A(P,t) = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi}\,\frac{\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$

$$\operatorname{div}\bar A + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Lorentz-mérték is teljesül: $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial z}$ $\quad \bar l\,\operatorname{grad} = \frac{\partial}{\partial z}$

A tér meghatározása: $\bar E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \bar A}{\partial t}$

$\bar B = \operatorname{rot}\bar A$

A tér felírása gömbi koordinátákkal:

$$E_r(r,\vartheta,t)=\frac{I_0\cdot l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{2}{r^2}\left[\cos(\omega t-\beta r)+\frac{1}{\beta r}\sin(\omega t-\beta r)\right]\cos\vartheta \qquad \frac{\omega}{c}=\beta$$

$$E_\vartheta(r,\vartheta,t)=\frac{I_0\cdot l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{\beta}{r}\left[-\left(1-\frac{1}{\beta^2 r^2}\right)\sin(\omega t-\beta r)+\frac{1}{\beta r}\cos(\omega t-\beta r)\right]\sin\vartheta$$

$$E_\varphi(r,\vartheta,t)=0$$

$$H_r(r,\vartheta,t)=0$$

$$H_\vartheta(r,\vartheta,t)=0$$

$$H_\varphi(r,\vartheta,t)=\frac{I_0\cdot l}{4\pi}\cdot\frac{\beta}{r}\left[-\sin(\omega t-\beta r)+\frac{1}{\beta r}\cos(\omega t-\beta r)\right]\sin\vartheta$$

→ r irányba haladó hullám

→ $E_\varphi=0$, mert az áramelemek a tengelyen átmenő síkokban vannak

→ $H_\varphi\neq 0$, mert a mágneses erővonalak körök a tengelyre merőleges síkokban

$\sim\frac{1}{r^3}$: statikus tér
$\sim\frac{1}{r^2}$: indukciós tér } közeltér
$\sim\frac{1}{r}$: távoltér: csak E_ϑ és H_φ

Távoltérben: $E_\vartheta=\frac{I_0\cdot l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\sin\vartheta=\frac{I_0}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{l}{\lambda}\,\frac{1}{r}\sin\vartheta$

$H_\varphi=\frac{I_0}{2}\cdot\frac{l}{\lambda}\cdot\frac{1}{r}\sin\vartheta$

$$S_{átl}=\frac{1}{2}E_\vartheta\cdot H_\varphi\cdot\frac{1}{2}=\frac{I_0^2}{8}\cdot\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta$$

~~Sugárzási ellenállás: $P=\frac{1}{2}\ldots$~~

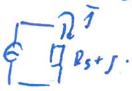
Antennajellemzők:

↳ Sugárzási ellenállás: a teljesítményt szolgáltató generátor számára az antenna a sugárzási ellenállásnak megfelelő ellenállásnak látszik.

$$P_S=\mathrm{Re}\left\{\oint_{r=R}\bar{S}\,d\bar{A}\right\}$$

R sugarú gömb, melynek centruma az antenna

↳ Hertz-dipólusra: $P_S=\frac{\beta^2\cdot l^2\cdot I^2\cdot Z_0}{12\pi}$



$P_S=\frac{1}{2}|I|^2\cdot R_s$

$R_s=\frac{2P_s}{|I|^2}$ ⟹ Hertz: $R_s=\frac{\beta^2\cdot l^2\cdot Z_0}{6\pi}=80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\Omega$

$P_S=\frac{1}{2}80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\cdot I_0^2$

↳ Iránykarakterisztika: relatív mennyiség, az adott irányban rögzített sugárban vett amplitúdót viszonyítjuk a maximális rögzített sugarú amplitúdóhoz.

$$C(\vartheta,\varphi)=\frac{E(r=R,\vartheta,\varphi)}{\max\limits_{\vartheta',\varphi'}[E(r=R,\vartheta',\varphi')]}$$

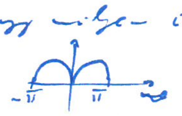
→ Hertz: $C(\vartheta)=\frac{E(R,\vartheta)}{E(R,\frac{\pi}{2})}=\sin(\vartheta)$

$E(\vartheta)=E_{max}\cdot\sin\vartheta$

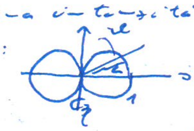
$S(\vartheta)=S_{max}\cdot\sin^2\vartheta$

Megadja, hogy milyen irányban mekkora intenzitással sugároz.

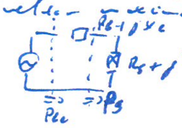
Derékszögben:



Polárdiagram:



↳ Irányhatás/antennanyereség: az antenna irányítására jellemző mennyiség, amit a Poynting-vektor maximális és átlagos nagyságának hányadosaként definiálunk.



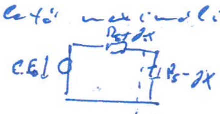
Irányhatás: $D=\frac{S_{max}}{S_{átl\,S}}=\frac{\max\limits_{\vartheta,\varphi}S(r=R,\vartheta,\varphi)}{\frac{P_S}{4R^2\pi}}$ P_S: kisugárzott telj.

nyereség: $G=\frac{S_{max}}{S_{átl\,be}}=\frac{\max\limits_{\vartheta,\varphi}S(R,\vartheta,\varphi)}{\frac{P_{be}}{4R^2\pi}}$ [dB] P_{be}: betáplált telj.

A betáplált telj. a kisugárzottnál kicsit nagyobb, veszteségeket is tartalmazza. (Hertz: $G\approx D=\frac{3}{2}$)

↳ Hatásos felület: a vevőantennából kivehető maximális teljesítménynek és beeső teljesítménynek a hányadosa.

$A=\frac{P_R(\text{illesztett})}{S_0}$



$P_R=\frac{1}{2}\frac{(E_0\cdot l)^2}{4R_s}$

Hertzre: $A_{HD}=\frac{3\lambda^2}{8\pi}$

XX/. Ismertesse a síkhullámot, mint a hullámegyenlet egyik megoldását! Beszéljen a síkhullám polarizációjáról, a tetszőleges irányba terjedő síkhullám leírási módjáról és a síkhullám törési törvényéről és reflexiójáról ferde beesés esetén!

Az a hullámfajta, amelyben az azonos fázisú helyek egy síkon vannak.

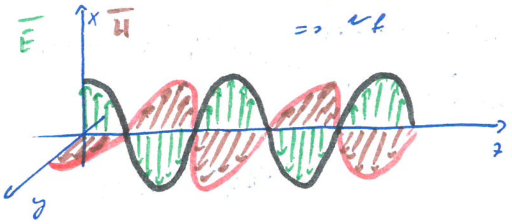
Maxwell-egyenletek szinuszos állandósult állapotban:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E}$$
$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}$$

lineáris, homogén, izotróp közeg

$$\Downarrow$$
$$\Delta\bar{E} + k^2\bar{E} = 0 \qquad k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

A terjedés iránya: $\bar{e}_z$ → erre merőleges irányban a tér nem változik: $\frac{\partial}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial}{\partial y} = 0$



⇒ [illegible]

A hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0$$

$\bar{E}(x,y) = E_x \cdot \bar{e}_x$ alakban keressük a megoldást.

$$E_x = E_x^+ \cdot e^{-jkz} + E_x^- \cdot e^{jkz}$$
$$\bar{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{E} \Rightarrow H_y = \frac{E_x^+}{Z_0} \cdot e^{-jkz} - \frac{E_x^-}{Z_0} \cdot e^{jkz}$$

$\bar{E}(x,y) = E_y \cdot \bar{e}_y$:

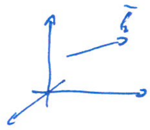
$$E_y = E_y^+ \cdot e^{-jkz} + E_y^- \cdot e^{jkz}$$
$$\bar{H}_x = \frac{E_y^+}{Z_0} e^{-jkz} - \frac{E_y^-}{Z_0} \cdot e^{jkz}$$

$$\bar{E}(x,y,z) = E_x \cdot e^{-jkz} \cdot \bar{e}_x$$
$$\bar{H}(x,y,z) = \frac{E_x}{Z_0} \cdot e^{-jkz}\,\bar{e}_y \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$
$$\bar{E}(x,y,z) = E_y \cdot e^{-jkz}\,\bar{e}_y$$
$$\bar{H}(x,y,z) = -\frac{E_y}{Z_0} \cdot e^{-jkz} \cdot \bar{e}_x$$

Bevezethető a polarizáció fogalma, amely a két komponens kapcsolatát határozza meg.

Tetszőleges irányba terjedő síkhullám:

Bevezethető egy $\bar{k}$ hullámvektor, amely a terjedés irányába mutat.



$$\bar{k} = k_x \cdot \bar{e}_x + k_y \cdot \bar{e}_y + k_z \cdot \bar{e}_z$$
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

Leírás:
$$\bar{E} = \bar{E}^+ \cdot e^{-j\bar{k}\bar{r}} = \bar{E}^+ \cdot e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$
$$\bar{H} = \bar{H}^+ \cdot e^{-j\bar{k}\bar{r}}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}^+ \cdot \bar{k} &= 0 \\ \bar{H}^+ \cdot \bar{k} &= 0 \\ \bar{E}^+ \cdot \bar{H}^+ &= 0 \end{aligned}\right\} \text{merőlegesek} \qquad \frac{\bar{E}^+ \times \bar{H}^+}{|\bar{E}^+ \times \bar{H}^+|} = \frac{\bar{k}}{|\bar{k}|}$$

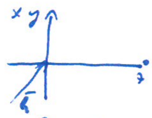
$$\left|\frac{E^+}{H^+}\right| = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Szétbontás TE és TM polarizációjú síkhullámra:

választani kell egy merőleges síkot, amihez ezt viszonyítjuk.

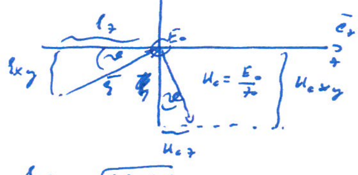
Legyen $\bar{e}_n = \bar{e}_z \Rightarrow xy$ sík

Beesési sík: $\bar{e}_{xy}$ és $\bar{e}_z$ által kifeszített sík: $\bar{e}_{xy} = \dfrac{k_x \cdot \bar{e}_x + k_y \cdot \bar{e}_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$



TE polarizáció: $\bar{k} = k_x\bar{e}_x + k_y\bar{e}_y + k_z\bar{e}_z$ $\qquad \bar{e}_{xy} = \dfrac{k_x \cdot \bar{e}_x + k_y\bar{e}_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$

Beesési sík:

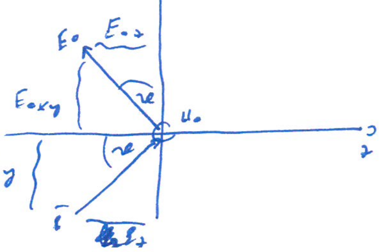


$$k_{xy} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$H_{0z} = H_0 \cdot \sin\vartheta$$
$$H_{0xy} = H_0 \cdot \cos\vartheta$$
$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k}$$
$$\cos\vartheta = \frac{k_z}{k}$$
$$Z_{0TE} = \frac{Z_0}{\cos\vartheta} = \frac{Z_0 \cdot k}{k_z}$$
$$H_0 = \frac{H_{0z}}{\sin\vartheta}$$
$$E_0 = \frac{H_{0z}}{\sin\vartheta} Z_0$$

$$E_0 = H_0 Z_0 = \frac{H_{0xy}}{\cos\vartheta} Z_0 = H_{0xy} Z_{TE}$$

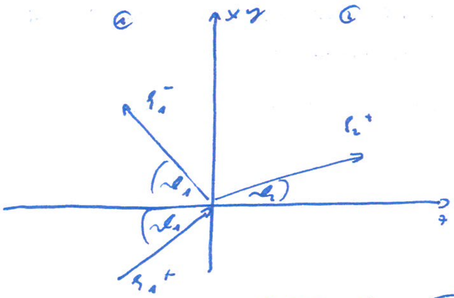
TM polarizáció:



$$E_{0z} = E_0 \cdot \sin\vartheta$$
$$E_{0xy} = E_0 \cdot \cos\vartheta$$
$$E_0 = H_0 Z_0$$
$$E_{0xy} = \frac{H_0 Z_0 \cos\vartheta}{Z_{TM}}$$
$$E_0 = \frac{E_{0z}}{\sin\vartheta}$$

$$H_0 = \frac{1}{Z_0}\frac{E_{0z}}{\sin\vartheta}$$

Viselkedés közeghatáron:



TE: $E_1(x,y,z=0) = E_{01}^+ \cdot e^{-j(k_x x + k_y y + k_{z1} \cdot 0)} + E_{01}^- \cdot e^{-j(k_x x + k_y y - k_{z1} 0)}$

$E_2(x,y,z=0) = E_{02}^+ \cdot e^{-j(k_x x + k_y y)}$

Az általános és mágneses térerősség közeghatáron csak akkor lehet folytonos, ha a hullámvektorok x és y komponensei megegyeznek egymással. z komponens tetszőleges lehet.
(a tangenciális komponens folytonos)

$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ ~~[illegible]~~ $k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$

k_x és k_y ismeretében k_z kifejezhető:

$k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ha $k_{z2} = \pm j\alpha$ akkor E_2 exponenciálisan ~~csillapodik~~ lecseng

$k_x^2 + k_y^2 + k_{z1}^2 = k_1^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_1$

$k_x^2 + k_y^2 + k_{z2}^2 = k_2^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_2$

$k_{z2} = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_2 - k_x^2 - k_y^2}$

ha $\omega^2\mu_0\varepsilon_2 > k_x^2 + k_y^2$ → k_{z2} (valós)

ha $\omega^2\mu_0\varepsilon_2 < k_x^2 + k_y^2$ → $k_{z2} = -j\alpha$ (lecsengés)

$E_2(x,y,z) = E_{02}^+ \cdot e^{-j(k_x x + k_y y)} \cdot e^{-\alpha z}$

Ha k_{z2} valós: $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$: Snellius–Descartes: $\frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}{k_1} = \sin\vartheta_1$ és $\frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}{k_2} = \sin\vartheta_2$

így

$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}}$

TE polarizációra:

adott E_{01}^+ → $H_{01}^+ = \frac{E_0^+}{Z_{0TE}}$

$E_{01}^+ + E_{01}^- = E_{02}^+$

$\frac{E_{01}^+}{Z_{0TE1}} - \frac{E_{01}^-}{Z_{0TE1}} = \frac{E_{02}^+}{Z_{0TE2}}$

TM polarizációra:

adott E_{01}^+

$E_{01}^+ + E_{01}^- = E_{02}^+$

$\frac{E_{01}^+}{Z_{0TM1}} - \frac{E_{01}^-}{Z_{0TM1}} = \frac{E_{02}^+}{Z_{0TM2}}$

TE és TM egymástól függetlenül terjed