Fizika 2

TE11AX02

Dr. Márkus Ferenc előadásai alapján

Készítette: Fülep Szabolcs

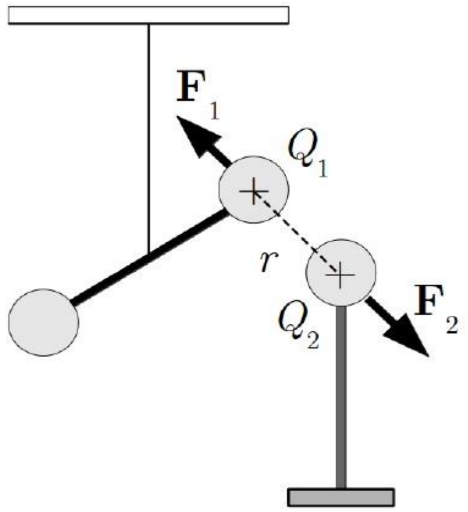
Tartalom

Elektrosztatika

A görögök már körülbelül 2500 évvel ezelőtt észrevették, hogy a megdörzsölt borostyánkő (görögül: elektron) könnyebb tárgyakat, mint például a tollpihét magához vonzza. Innen ered az elektromosság elnevezés. Ehhez hasonlóan a megdörzsölt műanyag vagy üveg a papírdarabokat képes magához vonzani, de a tapasztalat szerint a megdörzsölt testek között taszítás is felléphet.

Ezeket az erőket nem tudjuk megmagyarázni semmilyen mechanikai vagy gravitációs kölcsönhatással. Ezt a kölcsönhatást elektromos- vagy elektrosztatikus kölcsönhatásnak, az anyagnak a kölcsönhatást létrehozó sajátosságát pedig elektromos töltésnek nevezzük.

Elektromos erőhatások, Coulomb-törvény



A legegyszerűbb a nyugvó elektromos töltések között fellépő erőket vizsgálni. Ezt a területet nevezzük elektrosztatikának.

Az elektromos töltések kölcsönhatásának számszerű vizsgálatát először Coulomb végezte el. A mérés során töltött vezető gömbök kölcsönhatását mérte az igen kis erők mérésére alkalmas torziós mérleggel. A fémgömbök egyikére vitték fel a kölcsönható töltések egyikét (Q_1), és ennek a közelében helyeztek el egy másik töltött testet (Q_2). A torziós mérleg a gömbök elektromos kölcsönhatása miatt elfordult. Az elfordulás szögéből és a felfüggesztés rugalmas tulajdonságaiból kiszámítható a gömbök között fellépő erő. A rendszerben változtatható a kölcsönható testek egymáshoz viszonyított helyzete, valamint a töltések nagysága is. Így meghatározható a vonzerő távolságfüggése.

A mérések szerint a kölcsönhatásban fellépő erők nagysága arányos a kölcsönható töltések nagyságával, illetve fordítottan arányos azok távolságának négyzetével.

$F_{12} = F_{21} \sim \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}$, ez akkor igaz, ha pontszerű töltésekről beszélünk, vagyis a töltések mérete sokkal kisebb, mint a köztük lévő távolság.

Az arányossági tényezőt K_e-vel jelölve:

$$\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \underline{u}_{12}$$

Ez a Coulomb-törvény, ahol r_{12} a két test távolsága, $\underline{u}_{12}$ pedig az 1-es testtől 2-es testhez mutató egységvektor. A törvény azt is kifejezi, hogy két azonos előjelű töltés taszítja, míg két különböző előjelű töltés vonzza egymást. A tapasztalat szerint a két töltésre ható erő azonos nagyságú és ellentétes irányú.

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

Már csak a töltés egységét és az arányossági tényezőt kéne meghatároznunk. Ezt úgy oldjuk meg, hogy önkényesen rögzítjük a töltés egységét. Így K_e arányossági tényező mérés útján meghatározható. Ha két, egymástól d távolságra levő egységnyi töltésű test által egymásra kifejtett F erőt megmérjük, akkor az arányossági tényezőt kiszámolhatjuk

$$K_e = \frac{Fd^2}{Q_{egys}^2}$$

A töltés ma használt, SI-ben rögzített egysége 1 Coulomb = 1 C. A töltés egységének ilyen választása esetén két 1C nagyságú töltés között 1m távolságban $F = 9 * 10^9\ N$ erő lép fel. Amiből azt kapjuk, hogy

$$K_e = 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}.$$

Bizonyos alaptörvények egyszerűbb alakban írhatók fel ha egy új konstanst vezetünk be:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \epsilon_0 = 8{,}855 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\underline{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \underline{u}_{12}$$

Elektromos erőtér, elektromos térerősség

Ha egy Q ponttöltés környezetében valahol elhelyezünk egy másik (q) ponttöltést, akkor arra a Coulomb-törvénynek megfelelő erő hat. Vagyis egy töltés maga körül a térben olyan fizikai állapotot hoz létre, amelynek eredményeképpen bármilyen másik, odahelyezett töltésre elektrosztatikus erő hat. Ezt úgy szokták megfogalmazni, hogy a Q elektromos töltés maga körül elektrosztatikus- vagy elektromos erőteret hoz létre. Azt, hogy valahol van-e elektromos erőtér, eszerint meg lehet úgy állapítani, hogy a kérdéses helyre egy mérőtöltést teszünk, és ha arra erő hat, akkor ott az erőtér jelen van. A fenti módszerrel tehát az erőtér létezését akkor is meg tudjuk mondani, ha az erőteret létrehozó töltést nem ismerjük.
Azt, hogy egy pontszerű Q töltés környezetében milyen "erősségű" erőtér jön létre, azt jellemezhetjük úgy, hogy a tér egyes pontjaiban meghatározzuk egy önkényesen kiválasztott pontszerű q pozitív mérőtöltésre ható erőt. Ennek a mérőtöltésnek olyannak kell lennie, hogy annak jelenléte ne befolyásolja az eredeti viszonyokat. A Coulomb-törvényt erre az esetre alkalmazva, látható, hogy ez az erőhatás nemcsak a Q töltés által létrehozott erőtérre jellemző, hanem a mérőtöltéstől is függ, azonban azt is megfigyelhetjük, hogy az erőhatás arányos a mérőtöltés nagyságával, vagyis az erőt elosztva a mérőtöltéssel, a mérőtöltéstől független vektormennyiséget kapunk, amely már csak az erőteret létrehozó töltés nagyságától és a vizsgált pont helyétől függ.

$$\underline{E} = \frac{\underline{F_e}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \underline{u}$$

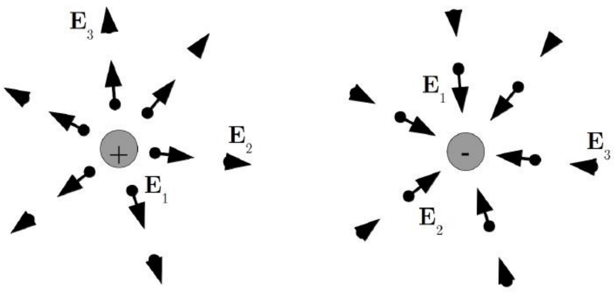
Ha több ponttöltés által létrehozott erőteret is a fenti módon akarjuk jellemezni, akkor meg kell vizsgálnunk a mérőtöltésre az összes jelenlevő töltés által kifejtett erőt. Ezt az erőt megpróbálhatjuk a szuperpozíció elve alapján kiszámítani.

$$\underline{F_e} = q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \underline{u_i}$$

$$\underline{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \underline{u_i}$$

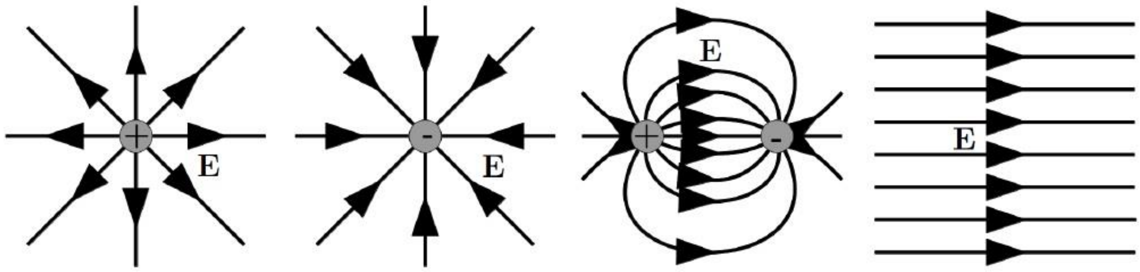
$$\underline{F} = q\underline{E} \quad \rightarrow \quad \underline{E} = \underline{F_e}$$

A definíció alapján a térerősség mértékegysége N/C.
Az elektromos erőtérben a tér minden egyes pontjához tartozik egy vektor, az $\underline{E}$ elektromos térerősség vektor, amely az elektromos erőteret jellemzi. Sok esetben hasznos lehet, ha az erőtér jellegét szemléltetni tudjuk. Az egyik ilyen



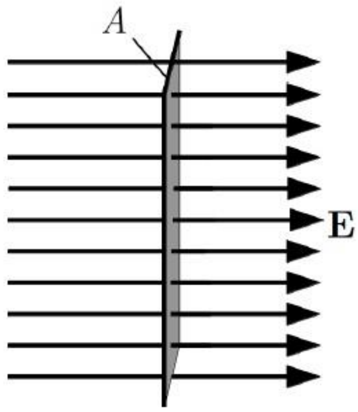
lehetőség, hogy különböző pontokhoz tartozó térerősség vektorokat lerajzoljuk.

Egy másik, áttekinthetőbb módszert kapunk, ha bevezetjük a térerősség vonalakat. A térerősség vonalakat úgy kapjuk, hogy a berajzolt térerősség vektorokhoz olyan görbéket szerkesztünk, amelyekhez egy pontban húzott érintő az adott ponthoz tartozó térerősség vektor irányába mutat. A térerősség vonalnak irányt is adunk, ami megegyezik a hozzá tartozó térerősség vektorok irányával. Vagyis, a térerősség vonal az elektromos erőtér "irányváltozásait" követi és szemlélteti.



A térerősség vonalak sűrűségével az elektromos térerősség nagysága is jellemezhető.

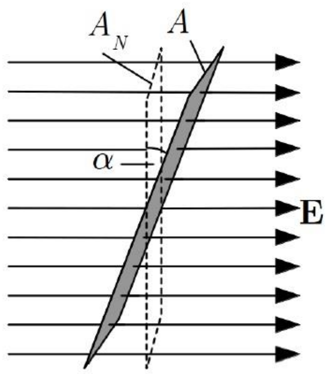
Az elektrosztatikus erőtér II. alaptörvénye



A felületet metsző erővonalakat előjelesen összeszámláló mennyiséget eleinte homogén elektromos erőtérben vezetjük be. Az $\underline{E}$ homogén erőtérben a térerősségre merőleges az A felületet átmetsző erővonalaknak a számát megadó mennyiség, az elektromos erőtérnek az A felületre vett fluxusa. Jelölése ϕ_E^A.

$$\phi_E^A = AE$$

Az így definiált fluxus dimenziója: $\frac{Nm^2}{C}$.



Ha a felület nem merőleges a térerősségre, akkor a fluxust úgy kapjuk, hogy a felületnek a térerősségre merőleges vetületét (A_N) szorozzuk meg a térerősséggel.

$$\phi_E^A = EA_N = EA\cos\alpha$$

Ha az erőtér nem homogén és a felület nem sík, akkor a felületet elemi részekre (ΔA_i) osztjuk, melyre a térerősség $(\underline{E_i})$már közel állandónak és síknak tekinthető. Ekkor az állása megadható egy rá merőleges $\underline{u}_N$ egységvektorral. Így az egyes felületekre eső fluxus:

$$\Delta\phi_i = \underline{E_i}\Delta\underline{A}_i$$

$$\phi_E^A \approx \sum_i \Delta\phi_i = \sum_i \underline{E_i}\underline{A}_i$$

$$\phi_E^A = \lim_{\Delta A_i \to 0}\sum_i \Delta\phi_i = \lim_{\Delta A_i \to 0}\sum_i \underline{E_i}\Delta\underline{A}_i = \int_A \underline{E}d\underline{A}$$

Eddig a fluxust nyílt felületre értelmeztük. Nézzük most meg egy zárt görbére. Az eljárás most is ugyan az csak el kell döntenünk, hogy az egyes felületelemek felületvektorait a zárt felületbe befelé vagy onnan kifelé irányítjuk. Ettől függni fog a kiszámított fluxus előjele, de a nagysága nem. A szokás az, hogy a felületvektort a zárt felületből kifelé mutató vektornak tekintik. Így a definíció szerint a zárt felületbe befelé mutató elektromos térerősség esetén a fluxus negatív, a felületből kifelé mutató térerősség esetén pedig pozitív.

$$\phi_E^{zárt} = \oint_A \underline{E}\, d\underline{A}$$

A fluxus geometriai jelentésének megfelelően ennek a mennyiségnek a számértéke a zárt felületet átszúró erővonalak összegét adja meg. Ez az összeg azonban előjeles: a zárt felület által határolt térfogatból kifelé mutató erővonalakat a fluxusban pozitív előjellel, a térfogatba kívülről befelé mutató erővonalakat pedig negatív előjellel vesszük figyelembe. Ezért a zárt felületre vett fluxus számértéke a felület belsejéből kilépő és a felület belsejébe belépő erővonalak számának a különbségét adja meg. Ez azt jelenti, hogy egy zárt felületre vett fluxus csak akkor nem nulla, ha a felületen belül erővonalak kezdődnek vagy végződnek, valamint a kezdődő és végződő erővonalak száma különböző.
Mivel a ponttöltés erőterében a térerősség sugárirányú, és a gömbfelület bármely elemi részének felületvektora is sugárirányú, a térerősség és a felületvektor a felület minden pontján párhuzamos egymással. Másrészt a térerősség nagysága a gömbfelület minden pontján egyenlő nagyságú, ezért E kiemelhető, így a gömbfelületre vett fluxus:

$$\phi_E^{zárt} = \oint_A \underline{E} d\underline{A} = E \oint_A d\underline{A} = E 4r^2\pi$$

$$\phi_E^{zárt} = \oint_A \underline{E} d\underline{A} = E \oint_A d\underline{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}4r^2\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_A \underline{E} d\underline{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

Ez az összefüggés tetszőleges zárt felületre és tetszőleges tölteseloszlásra igaz. Ezt a törvényt gyakran az elektrosztatika Gauss-törvényének, vagy az elektrosztatika II. alaptörvényének nevezik. A törvény azt fogalmazza meg, hogy az elektrosztatikus erőtérben az erővonalak töltéseken kezdődnek és töltésekben végződnek, valamint kezdő- és végpontjuk között folytonos vonalak. Más szóval az elektrosztatikus erőtér forrása a töltés.
Ha egy elemi ΔV térfogatban ΔQ töltés van, akkor ott a térfogati töltéssűrűség közelítő értéke:

$$\rho \approx \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

$$\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i$$

$$Q \approx \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i$$

Ezek után a töltés pontos értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a V térfogat felosztását finomítjuk:

$$Q = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i \;\; = \int_V \rho dV$$

Így az elektrosztatikus Gauss-törvény egy általánosabb alakban is felírható:

$$\oint_A \underline{E} d\underline{A} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\oint_A \underline{E} d\underline{A} = \int_V div\underline{E} dV$$

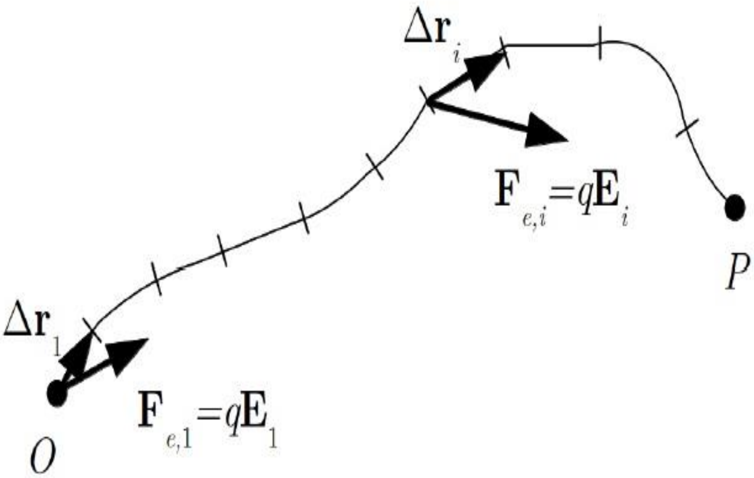
$$\int_V \left(div\underline{E} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho\right) dV = 0$$

$$div\underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0}$$

Ez a Gauss-törvény differenciális alakja.

Az elektromos erőtér energiája és a kondenzátor

A mechanikában láttuk, hogy konzervatív erőtérben helyzeti energia vezethető be. Tapasztalatok segítségével belátható, hogy az elektrosztatikus erőtér is konzervatív, így a töltés rendelkezik valamilyen helyzeti energiával. A helyzeti energiát itt is a mechanikában definiált módon, az erőtér által végzett munka segítségével adjuk meg, amely konzervatív erőtérben nem függ az elmozduló töltés pályájától, csak az elmozdulás kezdő és végpontjától. Elektromos erőtérben egy q töltésnek az O pontból a P pontba történő tetszőleges pályán történő elmozdulása során végzett munka:



$$W = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \underline{F}_{e,i}\, \Delta \underline{r_i} = \int_O^P \underline{F_e}\, d\underline{r} = q \int_O^P \underline{E}\, d\underline{r}$$

A q töltés helyzeti energiája a P pontban az O ponthoz képest:

$$E_h^O(P) = -W = -q \int_O^P \underline{E}\, d\underline{r}$$

Mint minden helyzeti energia, egy töltés energiája is függ a vonatkoztatási ponttól, azonban a q töltés energiája nem csak a helytől és a jelen lévő erőtértől függ, hanem a töltéstől is. Azonban a helyzeti energia arányos a töltéssel, ezért ha a helyzeti energiát elosztjuk a töltéssel, akkor egy töltéstől független mennyiséget kapunk.

$$U^O(P) = U_{OP} = \frac{E_h^O(P)}{q} = -\int_O^P \underline{E}\, d\underline{r}$$

Ezzel az eljárással az erőtér bármely pontjához hozzárendelhetünk egy skalár mennyiséget, amelyet az elektrosztatikus erőtér P pontbeli potenciáljának nevezünk. A potenciál mértékegysége:

$$1\frac{J}{C} = 1V$$

Két pont között a potenciál különbséget úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk az adott pontokban a potenciált egy harmadik, közös vonatkoztatási ponthoz képest, majd kiszámítjuk ezek különbségét.

$$U_{AB} = U_{OB} - U_{OA}$$

$$U_{AB} = -\left(\int_O^A \underline{E}\, d\underline{r} + \int_A^B \underline{E}\, d\underline{r}\right) - \left(-\int_A^O \underline{E}\, d\underline{r}\right) = -\int_O^A \underline{E}\, d\underline{r} - \int_A^B \underline{E}\, d\underline{r} + \int_O^A \underline{E}\, d\underline{r} = \int_A^B \underline{E}\, d\underline{r}$$

$$dU = -\underline{E}\, d\underline{r}$$

Az elektrosztatika I. alaptörvénye

A mechanikában láttuk, hogy a konzervatív erőtér munkája független az úttól. Másképp megfogalmazva, egy zárt L görbén körbejárva a végzett munka nulla.

$$q \oint_L \underline{E} d\underline{r} = 0$$

$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = 0$$

Ezt az összefüggést az elektrosztatika első alaptörvényének is nevezik, ami azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér konzervatív.

Az első alaptörvényből következik, hogy az elektrosztatikus tér erővonalai nem lehetnek önmagukba záródó erővonalhurkok.

$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = \int_A rot\underline{E} d\underline{A}$$

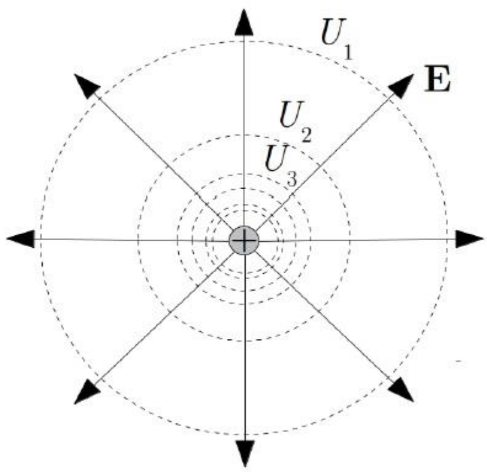
$$\int_A rot\underline{E} d\underline{A} = 0$$

$$rot\underline{E} = 0$$

Ez az elektrosztatika első törvényének differenciális alakja.

Ponttöltés potenciálja

A potenciál a térerősség integrálásával kapható meg.



Számítsuk ki egy Q ponttöltés által létrehozott elektromos erőtérben a potenciált a ponttöltéstől vett r távolság függvényében. Vegyük fel a vonatkoztatási pontot $r = r_0$-ban.

$$U^{r_0}(r) = -\int_{r_0}^{r} \underline{E} d\underline{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2} d\underline{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Ha vonatkoztatási helyként a ponttöltéstől végtelen távoli pontot ($r_0 \to \infty$), akkor:

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Két tetszőleges pont között a potenciálkülönbség:

$$\Delta U_{12} = U(r_2) - U(r_1) = U_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Gyakran hasznos ismerni az elektromos térben a potenciálviszonyokat, vagyis hogy a potenciál milyen irányban és milyen ütemben változik. Ha egy felület mentén mozogva a potenciál nem változik, azaz állandó, akkor ekvipotenciális felületekről beszélünk. Ezek a térerősségvonalakra merőleges felületek. Ponttöltés esetén az előző egyenletből könnyen megkaphatjuk az ekvipotenciális felületek egyenletét.

$$U_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Kondenzátor és elektromos erőtér

A különböző töltéselrendezések elektromos erőterének vizsgálatánál azt az eredményt kaptuk, hogy a magában álló vezető gömb potenciálja arányos a rajta levő töltéssel, az arányossági tényező pedig csak a geometriától függ. Tetszőleges alakú, magában álló, elektromosan töltött vezető végtelen távoli pontra vonatkozó potenciálja arányos a rajta levő töltéssel:

$$U \sim Q$$

$$U = \frac{1}{C} Q$$

C állandót a vezető kapacitásának nevezik.

Két sík közötti potenciálkülönbség:

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Ha a két töltött sík vezető anyagból készült sík lemez, akkor az elrendezést síkkondenzátornak nevezzük, ami töltések tárolására alkalmas. Ha a σ töltéssűrűséget kifejezzük a lemezeken lévő összes Q töltéssel $\sigma = \frac{Q}{A}$ összefüggés segítségével, akkor:

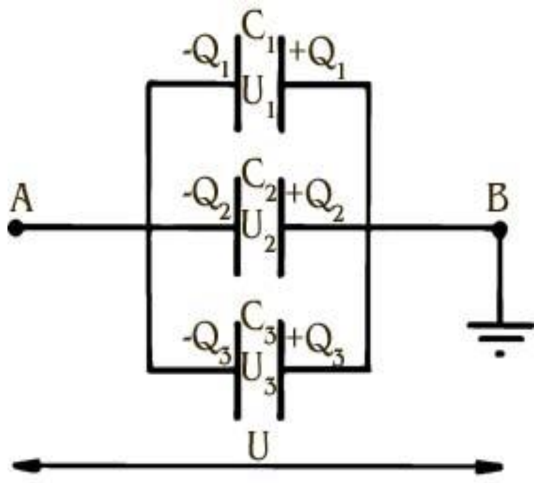
$$U = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Adott potenciálkülönbség mellett annál több töltés tárolható a kondenzátorom minél nagyobb a kapacitás, vagyis minél nagyobb a lemezek felülete és minél kisebb a lemezek közötti távolság.

Kondenzátorok kapcsolása

Elektromos áramkörök szerkesztése közben gyakran lehet szükségünk két vagy több kondenzátor összekapcsolására.



Párhuzamos kapcsolás

Az U potenciálkülönbség az összes kondenzátoron azonos.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$

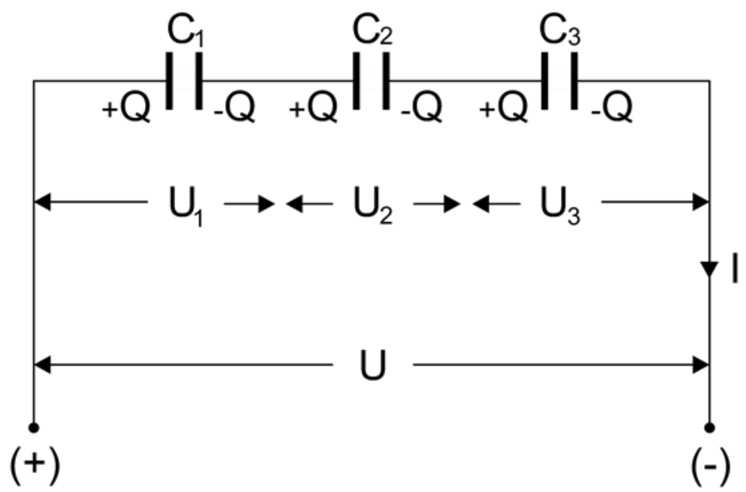
$$Q = UC_1 + UC_2 + \cdots + UC_n$$

$$Q = U(C_1 + C_2 + \cdots + C_n)$$

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Soros kapcsolás

Sorban kapcsolt kondenzátorok mindegyikén azonos nagyságú Q töltés van.



$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

$$U = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n}\right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Kondenzátor energiája

Egy adott töltéseloszlás rendelkezik valamekkora potenciális energiával. Ennek következménye, hogy képes munkát végezni. Feltöltött síkkondenzátor esetén ez több módon is megtörténhetne.

A potenciális energiát úgy lehet meghatározni, hogy kiszámoljuk azt a munkát, amivel feltöltöttük a kondenzátort. A dW munkavégzés, ahhoz szükséges, hogy a dq töltést az alacsonyabb potenciálú lemezről a magasabb potenciálú lemezre vigyük:

$$dW = Udq$$

U a lemezek közötti potenciálkülönbség.

$$U = \frac{q}{C}$$

$$dW = \frac{q}{C}dq$$

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \left[\frac{1}{C}\left(\frac{q^2}{2}\right)\right]_0^Q = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right)$$

$$Q = CU$$

$$E = \frac{1}{2}CU^2$$

A síkkondenzátort vizsgálva egyszerűen meghatározható az elektromos erőtérben tárolt energia.

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad U = Ed$$

Ezeket felhasználva a potenciális energia:

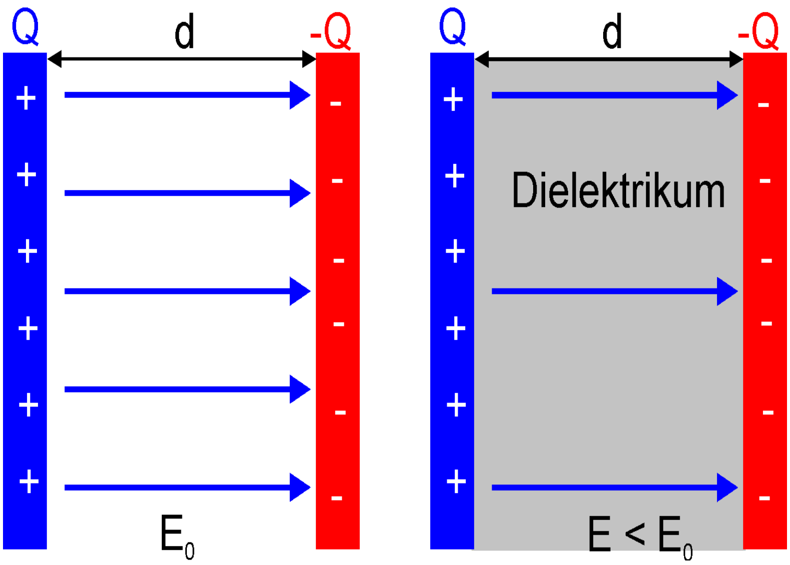
$$E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (Ad)$$

Ezek után lehet definiálni az energiasűrűséget, mint az egységnyi térfogatra jutó energiasűrűséget:

$$w_e = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_0 AdE^2}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Dielektrikumok

Eddig úgy tárgyaltuk a kondenzátorokat, hogy azt feltételeztük a lemezek között légüres tér van. Azonban van, hogy valamilyen szigetelő anyagot teszünk a fegyverzetek közé. Ez azért lehet előnyös, mert ilyenkor a kondenzátor kapacitása és az alkalmazható feszültség is megnő.



Ha dielektrikumot teszünk a kondenzátor két lemeze közé azt figyelhetjük meg, hogy azok között a feszültség lecsökken.

A dielektrikumokat két csoportba lehet sorolni:

- poláros
  - molekuláinak permanens elektromos dipólusmomentuma van. A térerősség hatására a dipólusok igyekeznek a térerősség irányába beállni.
- apoláros
  - nincs permanens dipólusmomentumuk, ugyanis a molekulákon belül a pozitív töltések súlypontja egybeesik a negatív töltésekével. Térerősség hatására a töltésközpontok széthúzódnak, és így a térerősség irányával megegyező irányú indukált dipólusmomentum jön létre.

A dipólusoknak az erőtér irányába rendeződése miatt a térerősségre merőleges felületen indukált felületi töltéssűrűség jön létre. Ez a jelenség a polarizáció. Az indukált felületi töltésekből származó térerősség $\underline{E}'$

$$\underline{E} = \underline{E}_{külső} + \underline{E}'$$

$$\underline{E} < \underline{E}_{külső}$$

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{E} dl$$

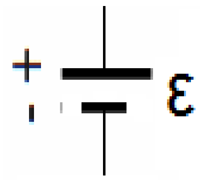
A kondenzátor lemezei közötti lecsökkenő térerősségnek a kisebb potenciálkülönbség felel meg. Ennek következtében a kondenzátor C_0 kapacitás C értékre nő. A C_0 és C hányadosát a dielektrikum relatív permittivitásának vagy dielektrikumos állandójának nevezzük

$$\kappa = \frac{C}{C_0}$$

Megfelelően erős térben bármely dielektrikum vezetővé válik. Azt a legnagyobb elektromos térerősséget, amelyen a dielektrikum még nem üt át, átütési szilárdságnak hívjuk.

Elektromos áram

Elektromotoros erő



Ha elektromos töltések rendezett mozgást végeznek az egyik helyről a másikra, akkor elektromos áramról beszélünk. Ha elektromos töltések egy nyugalomban lévő vezető anyag belsejében az ott fennálló elektromos erőtér hatására mozognak, akkor a létrejött áramot vezetési, vagy konduktív áramnak nevezik. Ha a töltések azért mozognak, mert a töltéseket hordozó test vagy közeg mozog, és vele együtt mozognak a töltések is, a létrejött elektromos áramot konvektív áramnak nevezik. Ahhoz hogy egy anyagban elinduljon a töltésáramlás, az anyag belsejében elektromos erőteret kell létrehozni. Ezt a jelenséget nevezik elektromos vezetésnek. Az áram fenntartásához egy olyan eszközre van szükségünk, ami a negatív oldalra érkező pozitív töltéseket visszajuttatja a pozitív oldalra, ez által megmarad a potenciálkülönbség. Ezeket az eszközöket a telepeknek, áramforrásnak, feszültségforrásnak, elektromotoros erő forrásának nevezik. Az elektromotoros erő által létrehozott potenciálváltozást ϵ-nal szokás jelölni.

Áramforrások:

- elem, telep, akkumulátor (kémiai reakción alapulnak)
- generátorok (mechanikai alapok)
- napelem (foton és elektromágneses tér)
- magenergia (plutónium)
- sejtszintű (mitokondriumok, -60mV - -90mV nyugalmi potenciál)

Az elektromos áram

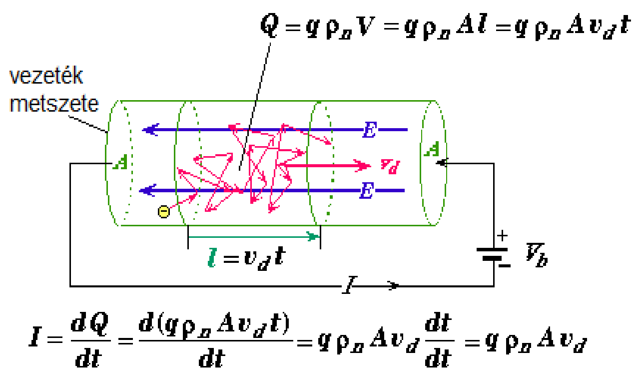
Egyelőre tételezzük fel, hogy a töltéshordozó részecskék pozitív töltésűek, mert az áramra vonatkozó megállapodások is pozitív töltéshordozók esetére vonatkoznak.

Áramerősség és driftsebesség

$$I \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Az így definiált mennyiség a Δt időtartamra vonatkozó átlagos elektromos áramerősség. Ha egy adott időpillanatban keressük:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$



Ha az elektromos áram időben nem változik, vagyis állandó, akkor stacionárius áramlásról beszélünk. A definíció alapján az áramerősség mértékegysége:

$$1\frac{C}{s} = 1\,A$$

Az áramerősség a keresztmetszetre vonatkozó átlagos mennyiség. A keresztmetszeten belüli lokális töltésáramlás jellemzésére vezették be

az áramsűrűséget, amelynek nagyságát közelítőleg egy az áramlás irányára merőleges $\Delta A_{\perp}$ nagyságú elemi felületelemen átfolyó
ΔI áram és a felület hányadosa adja meg.

$$j \approx \frac{\Delta I}{\Delta A_{\perp}}$$

Az áramsűrűség pontos értéke:

$$j = \lim_{\Delta A_{\perp} \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A_{\perp}} = \frac{dI}{dA_{\perp}}$$

Az áramsűrűség mértékegysége:

$$1 \frac{A}{m^2}$$

$$\underline{j} = j\underline{u}_I = \frac{dI}{dA_{\perp}} \underline{u}_I$$

Ahol $\underline{u}_I$ az áram irányába mutató egységvektor

Ha a felület nem merőleges az áramirányra:

$$\underline{j} = \frac{dI}{dA \cos\alpha} \underline{u}_I$$

Ezek alapján:

$$\Delta I = j \Delta A \cos\alpha$$

$$I \approx \sum_i j_i \Delta A_i \cos\alpha_i$$

Véges A felületen átfolyó teljes áram:

$$I = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \underline{j}_i \Delta \underline{A}_i = \int_A \underline{j} d\underline{A}$$

$$\frac{dQ_A}{dt} = -\oint_A \underline{j} d\underline{A}$$

Ez az egyenlet a töltésmegmaradás alapvető törvénye. Az adott térfogatban lévő töltés értékét helyettesíthetjük a töltéssűrűség térfogatra vett integráljával.

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} = -\oint_A \underline{j} d\underline{A}$$

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\oint_A \underline{j} d\underline{A} = -\int_V div\, \underline{j} dV$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -div\, \underline{j}$$

Driftsebesség $(\boldsymbol{v_d})$: Az elektronok átlagsebessége az anyagon belül; a külső elektromos mező nem tudja a végtelenségig gyorsítani a vezetősávban lévő elektronokat, mert azok a rácspontokon elhelyezkedő fém atomtörzseknek ütközve elvesztik mozgási energiájukat, ezzel melegítve a vezetőt.

Ohm törvény

Mérések szerint az áramot okozó U potenciálkülönbség és az I áramerősség között lineáris összefüggés van:

$$U \sim I$$

$$U = RI \qquad I = \frac{1}{R}U$$

A definíció alapján az ellenállás egysége:

$$1\frac{V}{A} = 1\Omega$$

Az ellenállás elnevezés onnan ered, hogy értékének növelésekor a vezetőn folyó áram csökken, azaz a vezetőnek az árammal szemben tanúsított ellenállása nő.

Georg Ohm
(1789-1854)

Egyenletes keresztmetszetű vezető ellenállása Ohm mérései szerint arányos a vezető hosszával és fordítottan arányos a vezető keresztmetszetével

$$R \sim \frac{l}{A}$$

Az arányossági tényezőt ρ-val jelölve.

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

Az Ohm törvény egy másik alakját kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy egy egyenletes A keresztmetszetű, l hosszúságú vezető esetén a vezető végei közti feszültség a térerősséggel, az áram pedig az áramsűrűséggel az alábbi módon fejezhető ki:

$$U = El \qquad I = jA$$

$$j = \frac{l}{RA}E = \frac{1}{\rho}E$$

Bevezetve a fajlagos vezetőképességet, amit a fajlagos ellenállás reciprokaként definiálunk: γ

$$j = \gamma E$$

Vektori alakban:

$$\underline{j} = \gamma\underline{E}$$

amit differenciális Ohm törvénynek is neveznek.

Joule törvény


James Joule
(1818-1889)

A töltéshordozók az elektromos erőtér által folyamatosan végzett munka ellenére állandó átlagsebességgel mozognak, vagyis az erőtér által végzett munka a vezetőben mechanikai értelemben elvész, a vezető belső energiáját növeli, azaz hővé alakul.
Mivel egy ΔQ nagyságú töltésnek U potenciálkülönbségű helyek között az elektromos erőtér munkája:

$$\Delta W = \Delta Q U$$
$$\Delta W = U I \Delta \mathrm{t}$$

Egy hosszabb t idő alatt fejlődő hő:

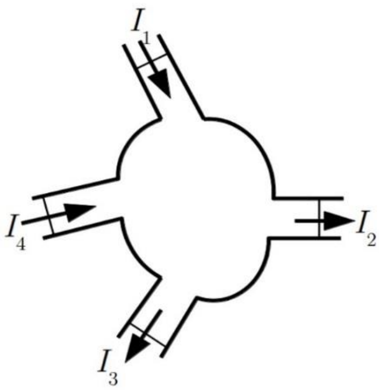
$$W = U I t$$

Ez a Joule törvény, a fejlődő hőt pedig Joule-hőnek hívják. A hővé alakult teljesítmény:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = U I$$

Kirchhoff törvények

Kirchhoff I. törvénye, töltés megmaradás törvénye időben állandó áramokra



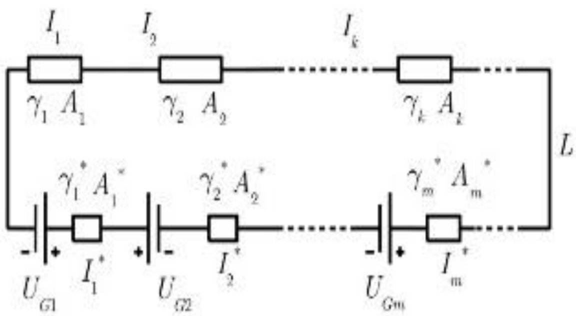
A tapasztalatok szerint egy elektromos vezetőben töltések nem keletkeznek és nem is tűnnek el, azaz a töltés mennyisége állandó. Ezek szerint egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik az onnan kifolyó áramok összegével.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4, \text{ ha } I_1, I_2 > 0 \text{ és } I_3, I_4 < 0.$$
$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$
$$\sum_n I_n = 0$$

Ez Kirchhoff I. törvénye.

Kirchhoff II. törvénye, az elektrosztatika I. alaptörvénye állandó áramokra

Egy áramkörben folyó áram és az egyes áramköri elemeken kialakult feszültségek között az Ohm-törvény és az elektrosztatika I. alaptörvénye segítségével kaphatunk összefüggést. Tapasztalatok azt bizonyítják, hogy az I. alaptörvény teljesül állandó áramú áramkörök esetén is, azaz ha egy áramkörben körbejárunk, és a mért feszültségeket összeadjuk, akkor a végén nullát kapunk. Egy zárt hurokra felírva:



$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = 0$$
$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = \oint_L \left(\frac{\underline{j}}{\gamma} - \underline{E}^*\right) d\underline{r} = 0$$

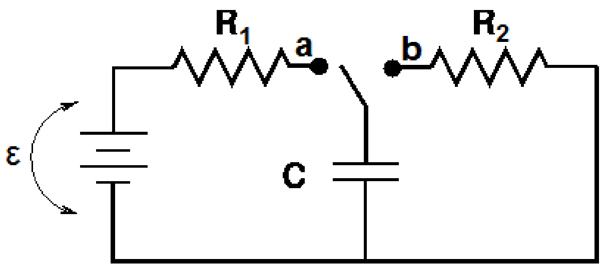
ahol $\underline{E}^*$ egy idegen elektromos térerősség.
Ha az ellenállás részeket k-val indexeljük, a telep részeket pedig m-mel, akkor:

$$\sum_k \left(\int_k \frac{\underline{j_k}}{\gamma_k} d\underline{r}\right) + \sum_m \left(\int_m \frac{\underline{j_m^*}}{\gamma_m^*} d\underline{r}\right) - \sum_m (\underline{\epsilon_m}) = 0$$
$$\int_k \frac{\underline{j_k}}{\gamma_k} d\underline{r} = \frac{I_k}{\gamma_k A_k} \int_k d\underline{r} = \frac{I_k l_k}{\gamma_k A_k} = I_k R_k$$
$$\int_m \frac{\underline{j_m^*}}{\gamma_m^*} d\underline{r} = \frac{I_m^*}{\gamma_m^* A_m^*} \int_m d\underline{r} = \frac{I_m^* l_m^*}{\gamma_m^* A_m^*} = I_m^* R_{bm}$$
$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m^* R_{bm} - \sum_m \epsilon_m = 0$$

Ez Kirchhoff II. törvénye.

RC körök

Eddig olyan áramkörökkel foglalkoztunk, ahol az áramerősség időben állandó. Azonban a kondenzátor az áramerősség időtől való függést képes előidézni.



Feltöltés

Tegyük fel, hogy eleinte nincs feltöltve a kondenzátor. A kapcsolót $t = 0$ időpillanatban zárjuk. A töltés exponenciálisan növekszik.

$$\epsilon - iR_1 - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

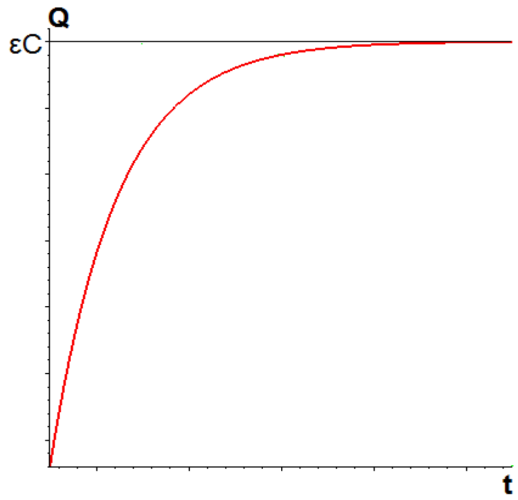
$$\frac{dq}{dt} = \frac{\epsilon}{R_1} - \frac{q}{R_1 C}$$

$$\frac{dq}{(q - C\epsilon)} = -\frac{1}{R_1 C} dt$$

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - C\epsilon)} = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\epsilon}{-C\epsilon}\right) = -\frac{t}{R_1 C}$$

$$q = C\epsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right)$$



A töltőáram:

$$i = \left(\frac{\epsilon}{R_1}\right) e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

Kisütés

Miután teljesen feltöltött a kondenzátor, kapcsoljuk át a kapcsolót.

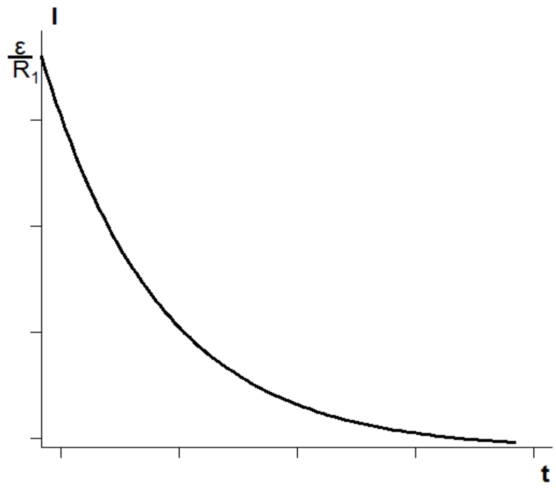
$$\frac{q}{C} - iR_2 = 0$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_2 C}$$

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{R_2 C} - \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{R_2 C}$$

$$q = Qe^{-\frac{t}{R_2 C}}$$



ahol $Q = \epsilon C$, a kondenzátor kezdeti töltése. Ezt deriválva az idő szerint, megkapjuk a kisütési áramot:

$$i = \left(\frac{\epsilon}{R_2}\right) e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

Mágneses kölcsönhatás

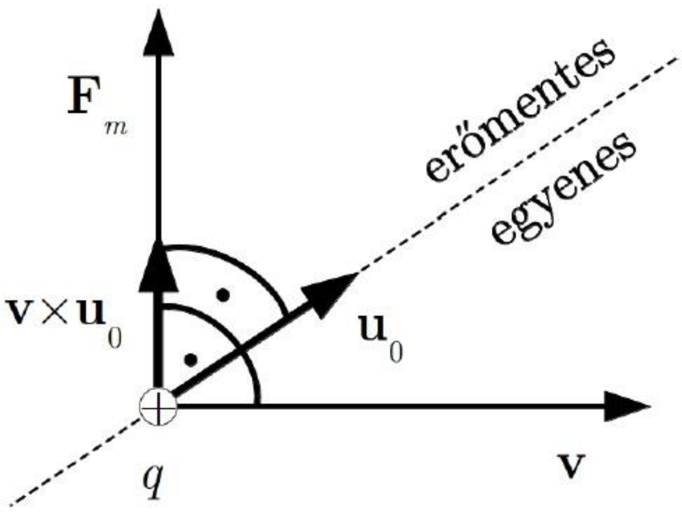
A mágneses kölcsönhatást kezdetben valamilyen speciális mágneses töltés jelenlétének tulajdonították. A mágneses anyagokból készült eszközök a mágnesek. Kísérletek azt bizonyítják, hogy kétféle mágneses töltés létezik.
Ha egy mágnest elkezdünk darabolni, a keletkezett darabok mindig mágneses dipólusként viselkednek. Ez azt jelenti, hogy a feltételezett kétféle mágneses töltést nem tudjuk szétválasztani.

Mágneses erőtér és mágneses indukcióvektor vákuumban

Vizsgálatokból kiderül, hogy a mágneses testek maguk körül erőteret hoznak létre, amelyben a mozgó töltésekre erő hat. Ez a mágneses erőtér.

Vizsgáljuk meg, hogy egy v sebességgel rendelkező pozitív q mérőtöltésre ható erő mitől és hogyan függ:

- mozgó töltésre ható mágneses erő arányos a töltés nagyságával, a mozgás sebességének nagyságával, és mindig merőleges a sebességvektor irányára
- a mozgó töltésre ható erő függ a mozgás irányától, és mindig van egy olyan egyenes, amin a töltést mozgatva nem hat rá erő
    - az ettől eltérő irányban mozgó töltésre ható erő mindig merőleges erre az egyenesre, az erő nagysága arányos a sebességvektor és az egyenes által bezárt α szög szinuszával.



$F_m \sim vq\sin(\alpha)$

Az arányossági tényezőt B-vel jelölve:

$$F_m = Bvq\sin\alpha$$

$$B = \frac{F_m}{vq\sin\alpha}$$

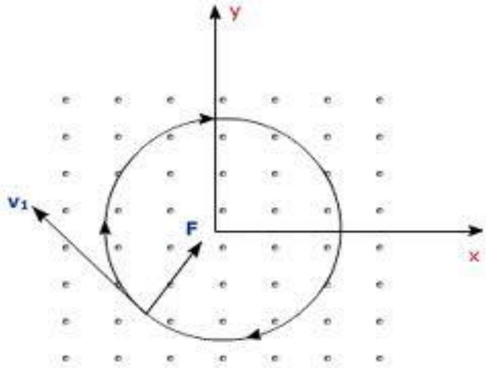
Jelöljük az erőmentes egyenes helyzetét egy $\underline{u}_0$ egységvektorral. Ennek irányát válasszuk meg úgy, hogy $\underline{v} \times \underline{u}_0$ vektorszorzat egyirányú legyen a mérőtöltésre ható $\underline{F}_m$ erővektorral.

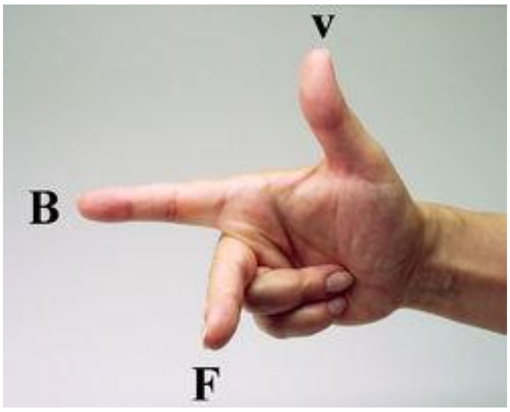
$$|\underline{v} \times \underline{u}_0| = v \sin \alpha$$

$$F_m = Bqv \sin \alpha = |F_m| = Bq|\underline{v} \times \underline{u}_0|$$

A mérőtöltésre ható erő így felírható vektori alakban is az $\underline{u}_0$ egységvektor segítségével:

$$\underline{F}_m = Bq\underline{v} \times \underline{u}_0$$



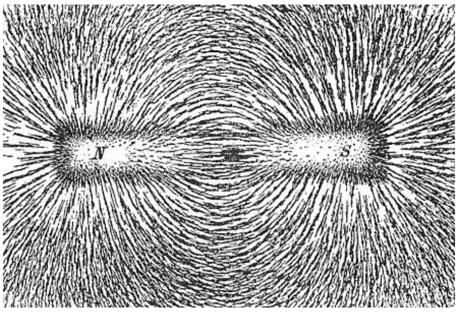


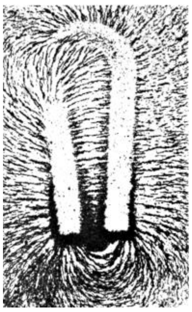
A mágneses erőtér jellemzésére a $\underline{B} = B\underline{u}_0$ vektort használjuk, amit mágneses indukciónak nevezünk.

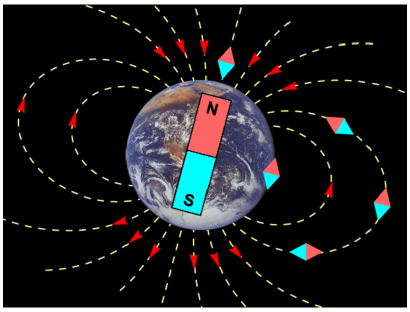
$$\underline{F}_m = q\underline{v} \times \underline{B}$$

A mágneses indukcióvektor mértékegysége: $1 \frac{Ns}{mC} = \frac{N}{mA} = \frac{Vs}{m^2} = 1\ tesla = 1\ T$

Az indukcióvektor vonalait indukcióvonalaknak nevezik.







A mágneses erőteret jellemző $\underline{B}$ vektor vonalai zárt hurkok, amelyek az elektromos áramot veszik körül.

A jobbkéz szabállyal meghatározható az áram körül létrejövő indukcióvonalak iránya.

Áramvezetőre ható erő mágneses térben

Kísérletek azt mutatják, hogy a mágneses erőtérben az árammal átjárt vezetőre is hat erő. Kézenfekvő magyarázat az, hogy az áramvezetőre ható mágneses erő egyenlő a benne mozgó töltésekre ható mágneses erő eredőjével.

Tegyük fel, hogy $\underline{B}$ mágneses indukcióvektor mindenhol adott. Ekkor a vezetőre ható erőt az egyes töltésekre ható erők eredőkével egyenlő. A vezetőben v sebességgel mozgó q töltésre ható erő:

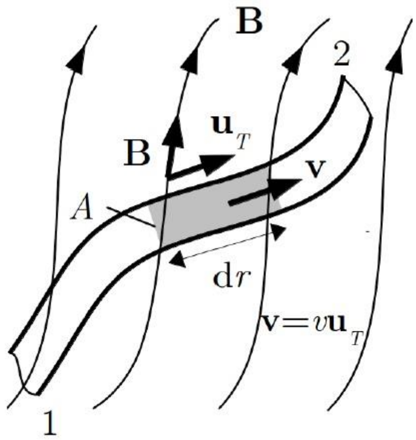
$$F_1 = q\underline{v} \times \underline{B}$$

Ha a vezetőben a töltéshordozók térfogati töltéssűrűsége $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$, akkor adott dr hosszúságú térfogatelemben mozgó töltéshordozók száma:

$$\Delta N = n\Delta V = nAdr$$

Tegyük fel, hogy dr olyan rövid, hogy nem változik benne az indukcióvektor, és az összes töltés átlagos sebessége egyforma, akkor a töltésekre ható erők párhuzamosak.

$$d\underline{F} = \Delta N\underline{F_1} = nAdr\underline{F_1} = qnA\underline{v} \times \underline{B}dr$$



Véges hosszú vezetődarabra:

$$\underline{F} = \int_1^2 qAn\underline{v} \times \underline{B}\, dr$$

Mivel:

$$\underline{v} = v\underline{u}_T$$

$$I = qnAv$$

$$\underline{F} = \int_1^2 I\underline{u}_T \times \underline{B}dr = I\int_1^2 \underline{u}_T \times \underline{B}\, dr$$

Egy l hosszúságú, egyenes vezetőszakaszra homogén mágneses erőtérben ható erő könnyen kiszámítható, mivel $\underline{u}_T \times \underline{B}$ mindenhol ugyanaz.

$$\underline{F} = I\underline{u}_T \times \underline{B}\int_1^2 dr$$

$$\underline{F} = Il\underline{u}_T \times \underline{B}$$

Az áram mindig zárt hurokban folyik, ezért egy vezetőre mágneses erőtérben ható erő mindig egy áramhurokra fellépő erőt jelent. A vezető egy szakaszára ható erő csak akkor egyezik meg a vezetőre ható erővel, ha a mágneses erőtér valóban csak az adott szakaszra fejt ki erőt. Áramhurokra érvényes általános alak:

$$\underline{F} = I\oint_L \underline{u}_T \times \underline{B}\, dr$$

Homogén hurokra:

$$\underline{F}_{hom.hur.} = I\oint_L \underline{u}_T \times \underline{B}\, dr = I\left(\oint_L \underline{u}_T\, dr\right) \times \underline{B}$$

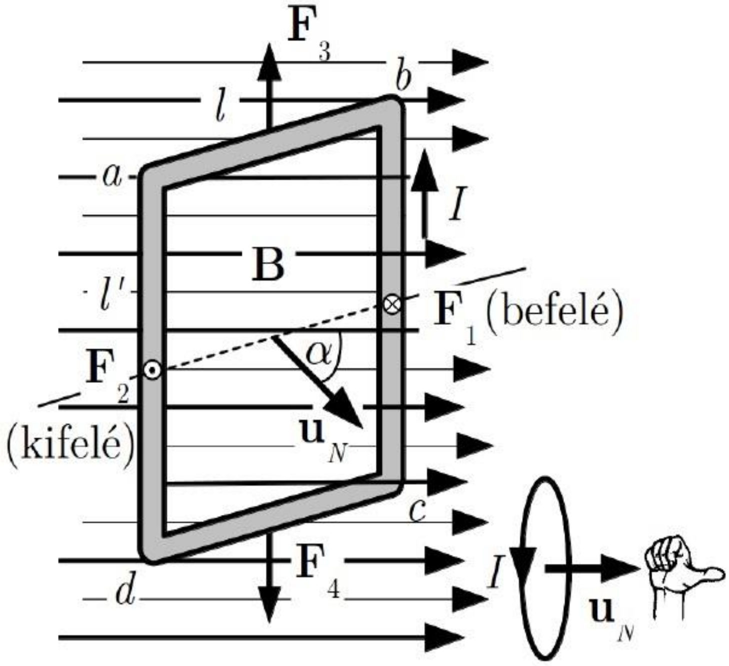
Mivel $\underline{u}_T \times dr = d\underline{r}$ az elemi elmozdulás vektor, így

$$\underline{F}_{hom.hur.} = I\left(\oint_L \underline{u}_T\, dr\right) \times \underline{B} = 0$$

Ami azt jelenti, hogy homogén erőtérben az áramhurokra ható erők eredője nulla.

Áramhurokra ható forgatónyomaték

Egy áramhurokra az eredő erő mellett általában forgatónyomaték is hat. A legegyszerűbb esetben, mikor a térerősség homogén, akkor a keretre ható eredő erő nulla, viszont forgatónyomaték hat rá.



Legyen a vezető hurok téglalap alakú l és l' oldalakkal, és l' oldalpár merőleges az indukcióvektorra. Az l oldalakra ható erők azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak.

$$\underline{F_3} = -\underline{F_4}$$

Ezek eredője nulla, és így a forgatónyomatékuk is nulla.

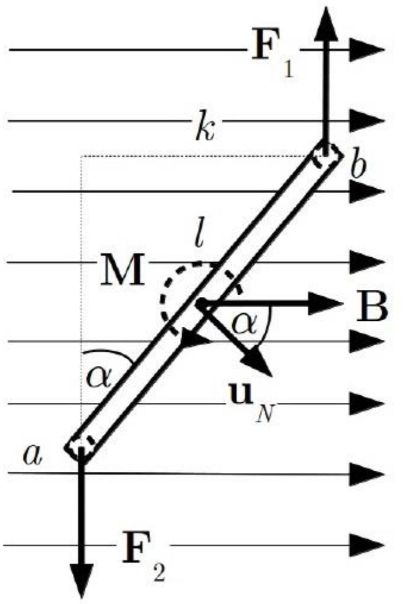
Az l' oldalakra is érvényes, hogy $\underline{F_1} = -\underline{F_2}$, viszont ezek eredője nem nulla.

$$F_1 = F_2 = F = Il'B$$

$$M = Fk = Fl\sin(\alpha)$$

$$M = IAB\sin(\alpha)$$

A keret felületének állását meg lehet adni a felületre merőleges egységvektorral $(\underline{u_N})$, aminek irányát az áramhoz illesztjük a jobbkéz szabálynak megfelelően. Mivel az α szög megegyezik az indukcióvektor és a felületre merőleges $\underline{u_N}$ vektor által bezárt szöggel, ezért:



$$\underline{M} = IA\underline{u_N} \times \underline{B}$$

A vezetőre mágneses erőtérben fellépő forgatónyomaték lehetőséget ad arra, hogy az elektromos energiát mechanikai munkává alakítsuk, mivel a keretben folyó áram hatására jön létre az elfordulás. Kisebb nehézséget okoz, hogy ez esetben a keret maximum egy félfordulatot tesz meg, és utána igyekszik egyensúlyi helyzetbe beállni. Azonban ha az egyensúlyi helyzet elérésekor megfordítjuk a keretben folyó áram irányát, akkor a keret továbbfordul, és így folyamatos forgómozgás jön létre. Ez az alapelve az egyenáramú elektromos motor működésének.

Mágneses dipólus

Az áramhuroknak az a viselkedése, hogy a hozzá rendelt felületvektor beáll az indukcióvektor irányába, hasonlít az iránytű viselkedéséhez, mivel az is az indukcióvektorral párhuzamosan áll be. Sőt az áramhurok és a kétpólusú a mágneses dipólus erőtere is hasonlít egymáshoz. Ezek alapján az áramhurkot mágneses dipólusnak nevezik.

Mágneses dipólus jellemzése, a mágneses dipólmomentum

Elektromos dipólusra ható forgatónyomaték elektromos erőtérben:

$$\underline{M_e} = \underline{d_e} \times \underline{E}$$

Mágneses dipólusra ható forgatónyomaték mágneses erőtérben:

$$\underline{M_m} = IA\underline{u_N} \times \underline{B}$$

Ezek alapján a mágneses dipólmomentum:

$$\underline{d_m} = IA\underline{u_N}$$

$$\underline{M_m} = \underline{d_m} \times \underline{B}$$

Mágneses dipólus energiája

Egyensúlyi állapotban a mágneses dipólus a mágneses indukcióvektor irányába áll. Ha ebből a helyzetből ki akarjuk mozdítani, akkor erőt kell kifejtenünk, és munkát kell végeznünk rajta. Az erőtér által végzett munka ugyan úgy számítható ki, mint elektromos dipólus esetén:

$$dW = \underline{M} d\varphi = -\mathrm{M} d\varphi$$

Mágneses dipólus helyzeti energiája mágneses erőtérben:

$$E_h^m = -d_m \underline{B}$$

A helyzeti energiát arra a helyre vonatkoztatjuk, amikor a dipólmomentum vektor merőleges az indukcióvektorra.

Elektromos áram mágneses erőtere

Biot-Savart törvény

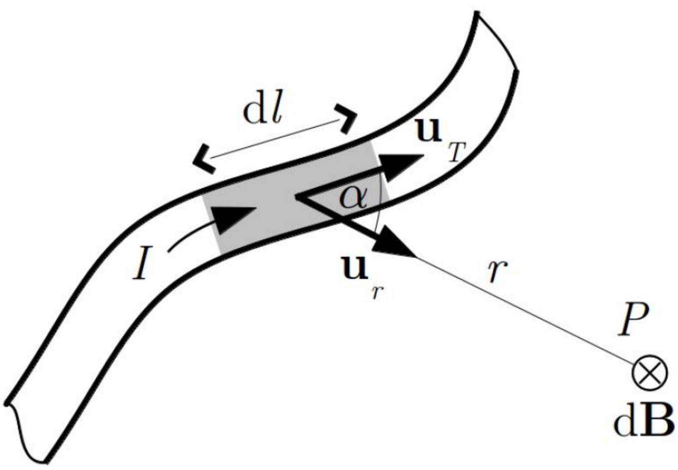
Egy áram dl hosszúságú, elemi szakasza által egy P pontban létrehozott dB indukcióvektor nagysága:

$$dB \sim \frac{Idl}{r^2} \sin(\alpha)$$

$$dB = K_m \frac{Idl}{r^2} \sin(\alpha)$$

Legyen $\underline{u_T}$ az áram irányába mutató egységvektor, és legyen $\underline{u_P}$ az áramelemtől a P ponthoz mutató egységvektor:

$$d\underline{B} = K_m I \frac{\underline{u_T} \times \underline{u_P}}{r^2} dl$$



Ez az áramelem mágneses erőterére vonatkozó Biot-Savart törvény, amit néha Ampére-Laplace törvénynek is neveznek.

Teljes áramkörre vonatkozó Biot-Savart törvény:

$$\underline{B}(P) = K_m I \oint_L \frac{u_T \times u_P}{r^2} dl$$

K_m arányossági tényezőt egy másik állandóval szokás helyettesíteni $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$

$$\underline{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{u_T \times u_P}{r^2} dl$$

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Sztatikus mágneses erőtér alaptörvényei

Magnetosztatika Gauss törvénye

Indukcióvektor esetén bevezethető az A felületre vonatkozó indukciófluxus:

$$\Phi_B = \int_A \underline{B} d\underline{A}$$

Az indukciófluxus számértéke megadja a felületet átmetsző indukcióvonalak számának előjeles összegét.

Az áramok által létrehozott mágneses erőtér azt mutatja, hogy az indukcióvonalak az áramot körülvevő zárt vonalak, amelyek nem kezdődnek és nem végződnek sehol. Ez azt jelenti, hogy egy zárt felület által határolt térfogatba belépő indukcióvonalaknak záródniuk kell. Vagyis az indukcióvonalak kétszer metszik a zárt felületet, és a két metszés ellenkező előjelű.

$$\oint_A \underline{B} d\underline{A} = 0$$

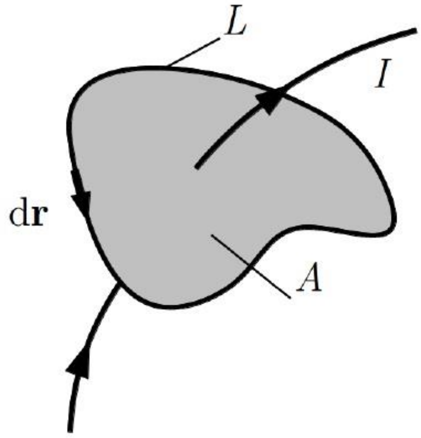
Ezt a törvényt gyakran a sztatikus mágneses erőtér II. alaptörvényének nevezik. A törvény azt fejezi ki, hogy mágneses erőtérben nincsen olyan rész, ahol az indukcióvonalak kezdődnek vagy végződnek, vagyis a mágneses erőtér forrásmentes.

Differenciális alakban kifejezve a törvény

$$div\, \underline{B} = 0$$

Ampére féle gerjesztési törvény

Megpróbálhatjuk kiszámítani egy L zárt görbe mentén a $\oint_L \underline{B} d\underline{r}$ mennyiséget, ami az örvényerősség, vagy más szóval cirkuláció.



Az erőtér tanulmányozása után kiderül, hogy az örvényerősség csak akkor nem nulla, ha a zárt L görbe, amelyre az örvényerősséget számítjuk, áramot fog körül.

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} \sim I$$

Ha a felületet több áram metszi:

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} \sim \sum_k I_k$$

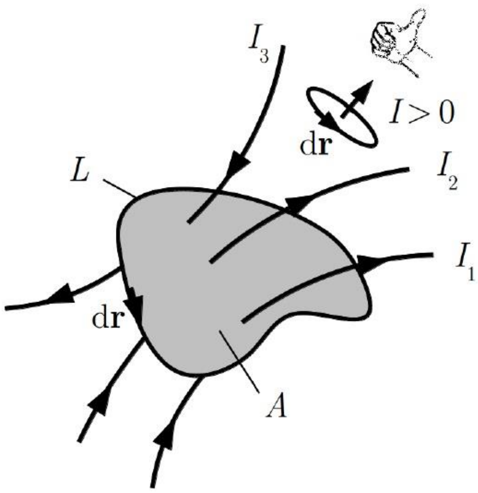
Az áram előjelét a körüljárási irány szabja meg, a jobbkéz szabály szerint. A törvény pontos alakjának felírásához ismerni kell az arányossági tényező értékét. Az egyenes vezetőben folyó I áram mágneses terének jellegét kísérletekből jól ismerjük, és az indukcióvektort a Biot-Savart törvény segítségével ki is tudjuk számítani.

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \oint_L Bdr = B \oint_L dr = B2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Az arányossági tényező tehát a μ_0.

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \sum_k I_k$$

Az összefüggést, ami bármilyen zárt görbére történő integrálásnál érvényes, a sztatikus mágneses erőtér I. alaptörvényének, vagy Ampére féle gerjesztési törvénynek nevezik.



$$\sum_k I_k = \int_A \underline{j}\, d\underline{A}$$

$$\oint_L \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 \int_A \underline{j} d\underline{A}$$

$$\oint_L \underline{B}\, d\underline{r} = \oint_A rot\underline{B}\, d\underline{A} = \mu_0 \int_A \underline{j} d\underline{A}$$

$$rot\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

Faraday törvény és az induktivitás

Kísérletek bizonyítják, hogy egy vezető hurokban vagy tekercsben indukált áram jön létre, ha a környezetében változik a mágneses erőtér. Az indukált áram annál nagyobb, minel gyorsabban változik a mágneses erőtér.

$$|I_{ind}| \sim \left|\frac{dB}{dt}\right|$$

Faraday-féle indukciótörvény

Ahhoz, hogy egy áramkörben tartósan áram folyjon, ott elektromotoros erőnek kell jelen lenni. Ebből következik, hogy az áramkörben először egy indukált elektromotoros erő jön létre, és ez hozza létre az indukált áramot, ami függ a hurok ellenállásától is. Emiatt célszerűbb az indukált elektromotoros erőre vonatkozó összefüggést keresni. Mivel az áram és a feszültség adott áramkörben egymással arányos:


Michael Faraday (1791-1867)

$$|\epsilon_{ind}| \sim \left|\frac{dB}{dt}\right|$$

A tapasztalat szerint az indukált elektromotoros erő arányos a vezető hurok A felületének nagyságával:

$$|\epsilon_{ind}| \sim A\left|\frac{dB}{dt}\right| = \left|\frac{AdB}{dt}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$$

$$|\epsilon_{ind}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$$

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{B} d\underline{A}\right)$$

$$\oint_L \underline{E}\, d\underline{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{B} d\underline{A}\right)$$

Ez a Faraday-féle indukciós törvény.

Az indukciós törvényből megállapítható, hogy a létrejött elektromos erőtér nem konzervatív, erővonalai önmagukba záródnak.

Változó erőtér esetén a $\oint_L \underline{E} d\underline{r} = 0$ nem érvényes.

$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{B} d\underline{A}\right)$$
$$\int_A \underline{E} d\underline{A} = -\frac{d}{dt}\int_A \underline{B} d\underline{A}$$
$$\int_A \left(rot\underline{E} + \frac{d\underline{B}}{dt}\right) d\underline{A} = 0$$
$$rot\ \underline{E} = -\frac{d\underline{B}}{dt}$$

Örvényáram

Az indukált áram a vezetőhurok belsejében olyan mágneses teret hoz létre, amely ellentétes a dB változással, vagyis az indukált áramot okozó változást csökkenteni igyekszik. Ezt a szabályt először Lenz ismerte fel, ezért Lenz törvénynek nevezik. Ezzel a törvénnyel magyarázható például, a változó mágneses erőtérbe helyezett, kiterjedt vezetőben az örvényáramok kialakulása miatt fellépő számos jelenség.

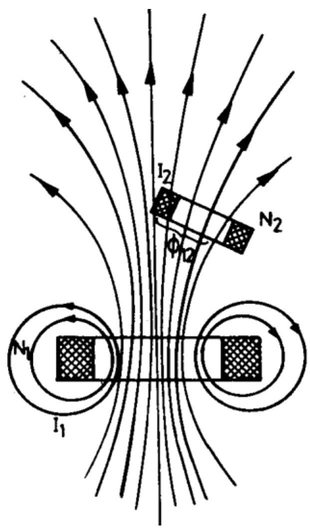
Heinrich Lenz
(1804-1865)

Az örvényáramok a vezetőben zárt hurkok mentén kialakuló áramok, amelyek azért lépnek fel, mert az indukált elektromos erőtér erővonalai zárt hurkok, és a vezetőben lévő mozgásképes töltések ezek mentén mozognak.

Az örvényáramok által okozott veszteségek kiküszöbölése érdekében készítik a transzformátorok vasmagját egymástól elszigetelt, összeragasztott lemezekből.

Kölcsönös indukció és önindukció

Ha egy árammal átjárt vezető hurok mellett egy másik vezető hurkot helyezünk el, akkor az első hurok I_1 árama által keltett mágneses erőtár a második hurok helyén is megjelenik. Ezért, ha az első hurokban változik az áram, akkor a második hurok környezetében is változik a mágneses erőtér, és a második hurokban elektromotoros erő és áram indukálódik. A gondolatmenet fordítva is érvényes, ha a második hurokban folyó I_2 áram változása az első hurokban hoz létre indukált elektromotoros erőt és áramot. Ezt a jelenséget kölcsönös indukciónak nevezik, és ez teszi lehetővé, hogy időben változó elektromos jeleket egyik áramkörből a másikba vigyünk át úgy, hogy a két áramkör között nincs kapcsolat. Az ilyen áramköröket csatolt áramköröknek nevezik.



A második hurokban létrejött indukált elektromotoros erő:

$$\epsilon_{ind2} = -\frac{d\Phi_2}{dt}$$
$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$
$$\epsilon_{ind2} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Ez fordítva is igaz:

$$\epsilon_{ind1} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

Mivel $M_{12} = M_{21}$, ezért bevezethetjük a kölcsönös indukciós együtthatót (M).
Tekercsek esetén:

$$\Phi_2 = N_2AB_1 = N_2A\frac{\mu_0N_1I_1}{l}$$

$$M = \frac{\mu_0N_1N_2A}{l}$$

Indukált feszültség nem csak két kölcsönható áramhurokban lép fel, hanem egyetlen hurokban is, ha benne változik az áramerősség. Ez a jelenség az önindukció. A fluxust a következő összefüggés adja meg:

$$\Phi_B = LI$$

L az önindukciós együttható, ami a geometriai viszonyoktól függ.

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

N menetű l hosszúságú tekercs esetén:

$$B = \frac{\mu_0NI}{l}$$

Egy menetre vonatkozó fluxus:

$$\Phi_{B1} = BA = \frac{\mu_0N^2A}{l}I$$

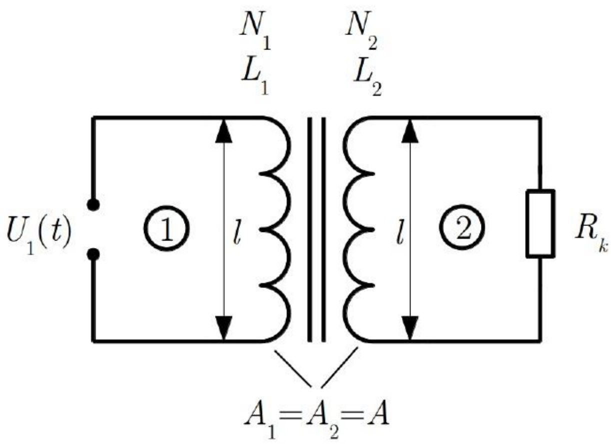
A teljes fluxus pedig:

$$\Phi_B = N\Phi_{B1} = \frac{\mu_0N^2A}{l}I$$

Vagyis:

$$L = \frac{\mu_0N^2A}{l}$$

Transzformátorok



Egyszerűsített transzformátor modellként használjuk azt az elrendezést, amelyben a kölcsönös indukciós együtthatót kiszámítottuk. A vizsgált áramkörben két egymásba tekercselt, azonos l hosszúságú és azonos A keresztmetszetű, N_1 és N_2 menetszámú tekercs van. Tegyük fel, hogy az első áramkörben egy változó $U_1(t)$ feszültségű áramforrás, a második áramkörben egy R_k ellenállású fogyasztó van. Minden más elhanyagolható.

Mivel a két tekercs egymásra van tekercselve, az indukcióvektor, és ennek következtében az egy menetre vonatkozó Φ_B indukciófluxus mindkét tekercsben azonos:

$$\Phi_{B1} = \Phi_{B2} = \Phi_B$$

Egy tekercsben az indukciófluxus:

$$\Phi_{B1} = N_1\Phi_B \qquad \Phi_{B2} = N_2\Phi_B$$

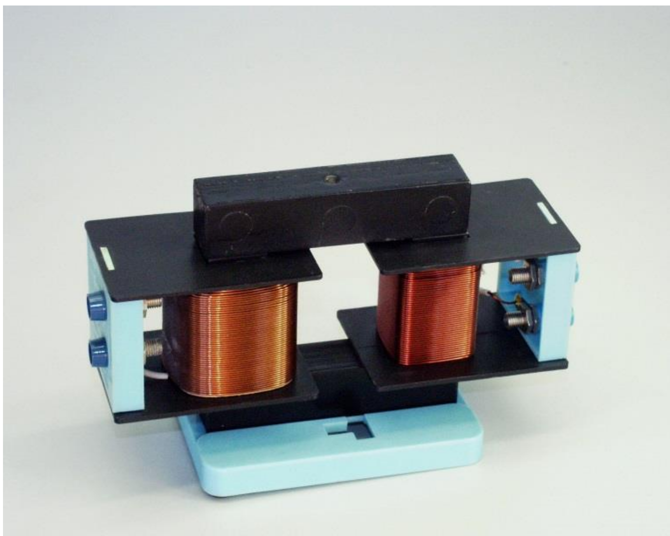
Felírva a Kirchhoff II. törvényét:

$$U_1 - \frac{d\Phi_{B1}}{dt} = 0 \quad U_1 - N_1\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$$

$$R_kI_2 - \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = 0 \quad R_kI_2 - N_2\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$$

$$\Phi_B = \frac{\mu N_1I_1}{l}A + \frac{\mu N_2I_2}{l}A$$

Ebből az összefüggésből a következőt kapjuk:



$$U_1 - N_1\frac{\mu N_1 A}{l}\frac{dI_1}{dt} - N_1\frac{\mu N_2 A}{l}\frac{dI_2}{dt} = 0 \quad U_1 - L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} = 0$$
$$R_k I_2 - N_2\frac{\mu N_1 A}{l}\frac{dI_1}{dt} - N_2\frac{\mu N_2 A}{l}\frac{dI_2}{dt} = 0 \quad R_k I_2 - M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt} = 0$$

A második áramkörben indukálódó U_2 feszültség:

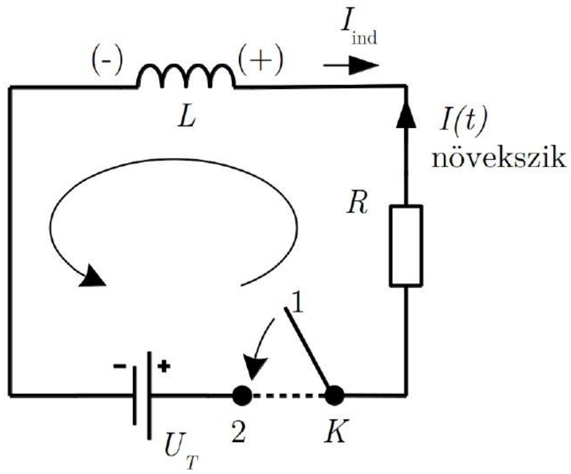
$$U_2 = -M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}U_1$$

RL áramkörök

Bekapcsolás

A bekapcsolás pillanatában még nem folyik áram:

$$I(0) = 0$$
$$U_T - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$
$$\frac{dI}{U_T - RI} = \frac{1}{L}dt$$
$$\int_0^I \frac{dI}{U_T - RI} = \int_0^t \frac{1}{L}dt$$
$$\frac{1}{R}\ln\left(\frac{U_T - RI}{U_T}\right) = \frac{1}{L}t$$
$$I(t) = \frac{U_T}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

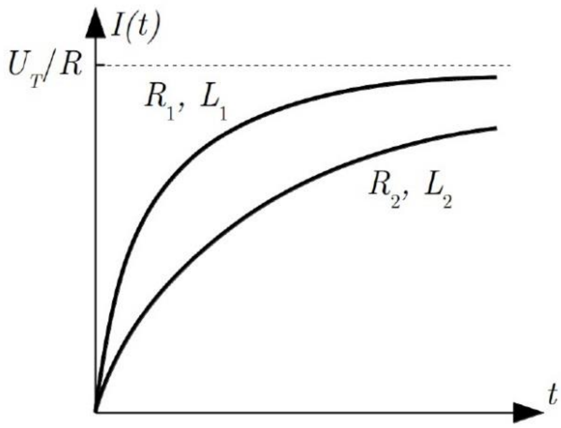


Ez azt jelenti, hogy bekapcsolás során az induktivitás akadályozza az áram növekedését. A növekedés annál lassúbb minél kisebb az R/L hányados.

Kikapcsolás

Ebben az esetben a kezdeti időben még az eredeti áram folyik:

$$I(0) = I_0$$
$$U_T = 0$$

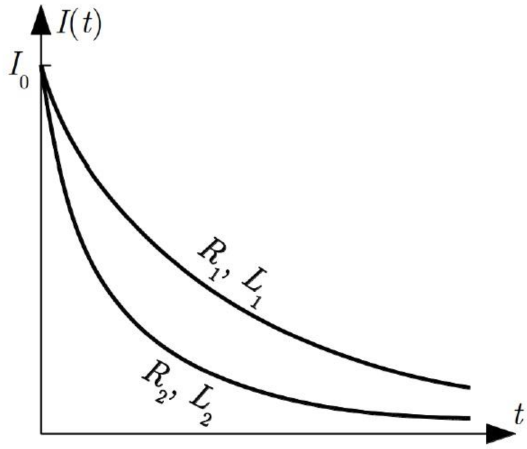


$R_2/L_2 > R_1/L_1$

Azt feltételezzük, hogy az áram megszűnik, mivel nincs feszültség forrás, de az induktivitás miatt csak fokozatosan csökken le nullára.

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$
$$-RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$
$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$
$$\int_{I_0}^0 \frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$
$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t$$
$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Látható, hogy az áram csökkenése annál meredekebb, minél kisebb az L induktivitás.



$R_2/L_2 > R_1/L_1$

Mágneses erőtér energiája

A tekercsben felhalmozott energia meghatározásához használjuk fel a bekapcsolási jelenségnél tárgyalt áramkört:

$$-IR - L\frac{dI}{dt} + U_T = 0$$

Ebből a dt idő alatt végzett munkát úgy kapjuk, hogy Idt-vel megszorzunk mindent:

$$-I^2Rdt - LI\frac{dI}{dt} + U_TIdt = 0$$

$$I^2Rdt + LI\frac{dI}{dt} = U_TIdt$$

Ebben az egyenletben az egyes tagokat megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy a bal oldalon az áramforrás által dt idő alatt végzett munka áll, a jobb oldal első tagja pedig az ellenálláson hővé alakuló munkát adja meg. Látható, hogy a telep munkájának csak egy része alakul át termikus energiává, a maradék a tekercsben a mágneses erőtérnek a dt idő alatt bekövetkező változásával összefüggő dE_{magn} energiaváltozás.

$$dE_{magn} = LI\frac{dI}{dt}dt = LIdI$$

Ebből már kiszámítható, hogy mekkora az E_{magn} mágneses energia, ha a tekercsben I áram folyik.

$$E_{magn} = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2}LI^2$$

Az önindukcióra kapott kifejezés:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

$$B = \frac{\mu NI}{l} \qquad I = \frac{Bl}{\mu N}$$

$$E_{magn} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}Al = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V, \text{ ahol V a tekercs térfogata.}$$

Az energia térfogati sűrűsége:

$$w_{mágn} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

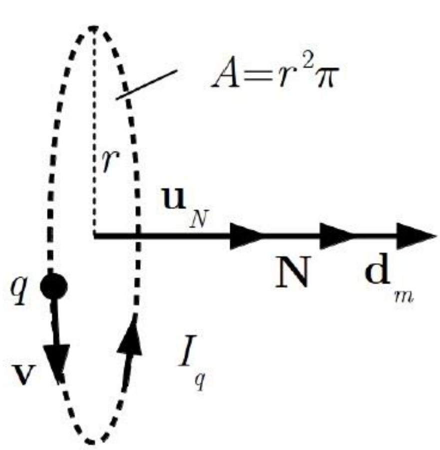
Ez azt jelenti, hogy a tekercs belsejében jelenlevő energiasűrűség csak az erőteret jellemző mágneses indukcióvektortól és a tekercset kitöltő anyag mágneses permeabilitásától függ.
A fenti összefüggés homogén, izotróp, lineáris anyag esetén

$$B = \mu H$$

$$w_{magn} = \frac{1}{2}\ \underline{H}\ \underline{B} = \frac{1}{2}HB, \text{ mivel } \underline{H}\|\underline{B}.$$

Anyag mágneses tulajdonságai

A mágnesség klasszikus értelmezése az atomról alkotott egyszerű modellen alapul. Az atomban található töltött részecskék mozgását ez a modell körmozgásnak tekinti, és az atomi mágnességet az ebből származó köráramok mágneses hatásának tekinti.



Töltött részecske perdülete,

$$\underline{N} = rmv\underline{u}_N$$

Mégneses dipólusa,

$$\underline{d}_m = IA\underline{u}_N$$

$$I = \frac{q}{T} = qf = q\frac{\omega}{2\pi} = \frac{q}{2\pi}\frac{v}{r}$$

$$A = r^2\pi$$

$$\underline{d}_m = \frac{qv}{2\pi r}r^2\pi\underline{u}_N = \frac{q}{2m}\underline{N}$$

Ez azt jelenti, hogy a körpályán mozgó töltés mágneses dipólmomentuma és perdülete egymással arányos:

$$g = \frac{q}{2m}$$

A g arányossági tényezőt giromágneses együtthatónak nevezik.

Paramágnesség

A paramágnesség az atomi elektronoknak az atommag körüli mozgásából származó mágneses hatásokkal magyarázható. A körpályán mozgó elektron mágneses dipólusként viselkedik, és a mágneses erőtérben fellépő forgatónyomaték igyekszik beállítani azt a $\underline{B}$ vektor irányába. Az így többé-kevésbé rendeződött dipólmomentumok mágneses erőtere hozzáadódik az eredeti erőtérhez, és ez okozza a paramágneses viselkedést. Ebben az esetben $\chi_m > 0$, és $\mu_r < 1$. Mivel egy paramágneses rúdban az elemi elektron-köráramok az erőtér irányába fordulnak, és mivel ez a helyzet energetikailag kedvező, a rúd maga is az erőtérrel párhuzamos helyzetbe áll be. Innen származik a paramágnesség elnevezés is.

Ebben az esetben:

$$\underline{d}_m = -\frac{e}{2m}\underline{N}$$

$$g_{el} = -\frac{e}{2m}$$

Ha az atom mágneses erőtérben van, akkor a dipólmomentum vektorra forgatónyomaték hat:

$$\underline{M} = \underline{d}_m \times \underline{B}$$

Mivel a keringő elektronnak perdülete is van, a forgatónyomaték miatt, úgy viselkedik, mint egy súlyos pörgettyű, és precessziós mozgást végez.

Diamágnesség

Miközben az elektron-pörgettyű a mágneses erőtérben precesszál, a körpálya is körbefordul. Az elektron precessziós mozgásához is tartozik mágneses dipólmomentum, ami a mágneses indukcióvektorral ellentétes irányú. A klasszikus modell szerint ez a dipólmomentum az oka a diamágnességnek. Az erőtér által rendezett, ellenkező irányú dipólmomentuk erőtere csökkenti az eredeti erőteret, ezért itt $\chi_m < 0$, és $\mu_r < 1$. Ez a jelenség minden elektron mozgásánál fellép, ezért a diamágnesség mindig jelen van, de a legtöbb esetben a paramágnesség mellett elhanyagolható. Mivel egy diamágneses rúdban az elemi precessziós elektron-köráramoknak megfelelő dipólmomentumok az erőtér irányával szemben állnak be, ez a helyzet energetikailag nem kedvező. Ez az oka annak, hogy a rúd igyekszik diagonális helyzetbe kifordulni az erőtér irányából, és ezzel csökkenteni a helyzeti energiáját. Innen származik a diamágnesség elnevezés.

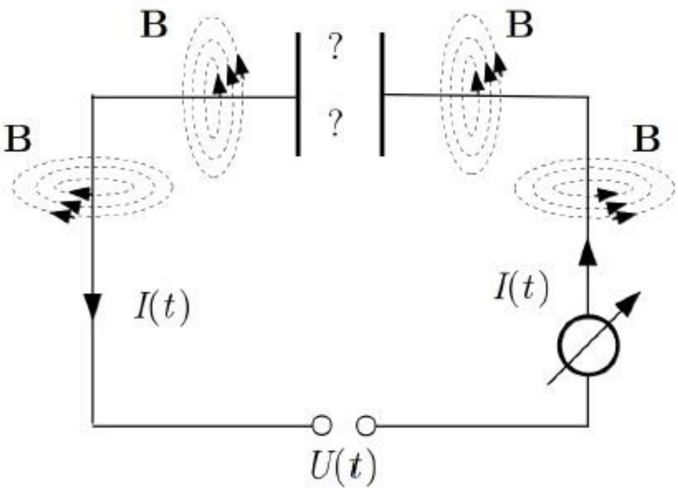
Ferromágnesség

A maradandó mágnességgel rendelkező ferromágneses anyagok mágnességének vizsgálata során kiderült, hogy azt nem az elektron pálya menti mozgásából származó dipólmomentum okozza. Ferromágneses atomok mágneses dipólusai a szomszédos dipólusokra erővel hatnak, így azok egy irányba rendeződnek, doménokat hozva létre. Az egyes domének mágnesezettsége lehet, hogy különbözik, de az eredő mágneses momentum zérus. Külső mágneses tér hatására azonban az erőtérrel megegyező irányú domének elkezdenek nőni. Ha a mágneses térerősség elég nagy, a domén összes dipólusa egyszerre rendeződik át. Ha megszüntetjük a külső mágneses teret, akkor a makroszkopikus mágneses momentum megmarad. Így permanens mágneses momentuma lesz az anyagnak.

Minden ferromágneses anyagnak van egy kritikus hőmérséklete (Curie-hőmérséklet), ami felett a doménrendezettség megszűnik a hőmozgás energiájának köszönhetően.

Elektromágneses hullám

Az eltolási áram



Ha az ábrán látható, kondenzátort tartalmazó áramkörbe időben változó feszültségű áramforrást kapcsolunk, akkor az árammérő áramot mutat, annak ellenére, hogy az áramkör nem zárt. Ennek az oka, hogy a kondenzátorra kapcsolt feszültség változása a rajta levő töltés megváltozásával jár, azaz a kondenzátorba befolyó, és onnan kifolyó töltések áramlását látjuk. Mivel a vezető szakaszokon áram folyik, természetesnek tűnik, hogy a vezető körül mindenhol kialakul egy mágneses erőtér, amely időben változik. A tapasztalat azt mutatja, hogy a lemezek közötti térrészben ugyanolyan jellegű mágneses erőtér alakul ki, mint a vezető körül, annak ellenére, hogy itt nyilván nem folyhat szokásos értelemben vett elektromos áram. Ha a létrejött mágneses erőteret vizsgáljuk, akkor úgy látszik, mintha az áramkör mégis zárt lenne, hiszen a mágneses erőtér mindenütt megjelenik. A lemezek közötti térrészben tehát kell lenni valamilyen mechanizmusnak, amely ugyanolyan hatást kelt, mint a valódi áram.

Számítsuk ki az elektromos erőtér változása és a vezetőben folyó áram közötti összefüggést egy egyszerű modell segítségével:

$$I_{vez} = \frac{dQ_{vez}}{dt} = \frac{dQ_C}{dt}$$

A vezetőben folyó áram kifelyezhető a kondenzátor lemezein levő töltéssűrűséggel:

$$\sigma = \frac{Q_C}{A}$$

$$I_{vez} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}A$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$I_{vez} = \frac{d\sigma}{dt}A = \epsilon\frac{dE}{dt}A$$

Feltételezzük, hogy a kondenzátort tartalmazó áramkör is zárt, akkor a lemezek közötti térrészben ugyanekkora áramot kell feltételeznünk. A fenti kifejezés ennek az áramnak a megadására alkalmasnak látszik, mivel a lemezek közötti térrészben bekövetkező térerősség változással kapcsolatban áll. Az így bevezetetett áramot eltolási áramnak nevezik.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az itt tárgyalt jelenség és a kapott összefüggés nem csak síkkondenzátort tartalmazó áramkörben igaz, hanem általánosabban is. Változó elektromos erőtér olyan hatást fejt ki, mint az elektromos áram, vagyis ha valahol változik az elektromos térerősség, akkor ott mágneses erőtér jön létre, amelynek indukcióvonalai a térerősség változását megadó vektort úgy veszik körül, mint a valódi elektromos áramot az általa keltett indukcióvonalak.

Az eltolási áram létezése azt jelenti, hogy az elektromos- és mágneses erőtér egyfajta szimmetriát mutat: a mágneses erőtér változása elektromos erőteret, az elektromos erőtér változása mágneses erőteret kelt. Ez a szimmetria teszi lehetővé, hogy egy elektromos vagy mágneses zavar tovaterjedjen a térben, és elektromágneses hullám jöjjön létre.

$$d\Phi_E = AdE$$

Bevezetve az elektromos eltolás vektort:

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$$

Ebben az esetben az eltolási áram:

$$I_{elt} = \frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{D} d\underline{A}\right) = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

Ez azt jelenti, hogy az eltolási vektor fluxusának változásával megadható az eltolási áram.
Az eltolási áram bevezetésével a hagyományos értelmezés szerint megszakítottnak számító áramkörök is zártaknak tekinthetők, és a gerjesztési törvény egy áramkör tetszőleges helyén eredeti alakjában érvényes, ha ott a törvényben áramként az eltolási áramot írjuk be.

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \frac{d\Phi_D}{dt}$$

Maxwell egyenletek

I. Faraday féle indukciós törvény

James Clerk Maxwell
(1831-1879)

$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{B} d\underline{A}\right)$$

Ahol A az L zárt hurok által bezárt felület. Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a mágneses indukcióvektor fluxusának időbeli változása olyan indukált elektromos erőteret hoz létre, ami nem konzervatív.

Az $\oint_L \underline{E} d\underline{r}$ mennyiséget az $\underline{E}$ erőtér örvényerősségének nevezik. Ha ez nulla, akkor az erőtér örvénymentes, ha nem akkor örvényes.

II.Gauss törvény

$$\int_A \underline{E} d\underline{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \underline{P_e}\, d\underline{A}$$

$$\int_A \underline{E} d\underline{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \underline{P_e}\, d\underline{A}$$

Ahol V a zárt A felület által közrezárt térfogat. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a töltések által keltett elektromos erőtér térerőosségvonalai töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek. Ezek a töltések lehetnek szabad töltések, vagy polarizációs töltések$\left(\underline{P_e}\ az\ elektromos\ polarizációs\ vektor\right)$, amelyeknek járulékát az egyenlet jobb oldali tagja adja meg.

$\int_A \underline{E} d\underline{A}$-t az elektromos erőtér forráserősségének nevezik, ami ha nulla, akkor az erőtér forrásmentes.

III.Ampére-Maxwell törvény

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \underline{P_m} d\underline{r} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A \left(\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P_e}\right) d\underline{A}$$

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \int_A \underline{j} d\underline{A} + \mu_0 \oint_L \underline{P_m} d\underline{r} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A \left(\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P_e}\right) d\underline{A}$$

Ahol A az L zárt hurok által bezárt felület. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a mágneses indukcióvektor a valódi áramokkal, a mágneses dipólusokkal, az elektromos térerősség- és az elektromos polarizáció fluxusának változásával írható le.

IV.Gauss törvény

$$\oint_A \underline{B} d\underline{A} = 0$$

Ez a törvény azt mutatja, hogy az indukcióvonalak sehol nem kezdődhetnek vagy végződhetnek.

Bevezetve az elektromos eltolás- $(\underline{D})$, valamint a mágneses térerősség $(\underline{H})$ vektorát:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P_e}$$

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{P_e})$$

Így a következő alakot kapjuk:

I. $\oint_L \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{B} d\underline{A}\right)$

II. $\oint_A \underline{D} d\underline{A} = Q$

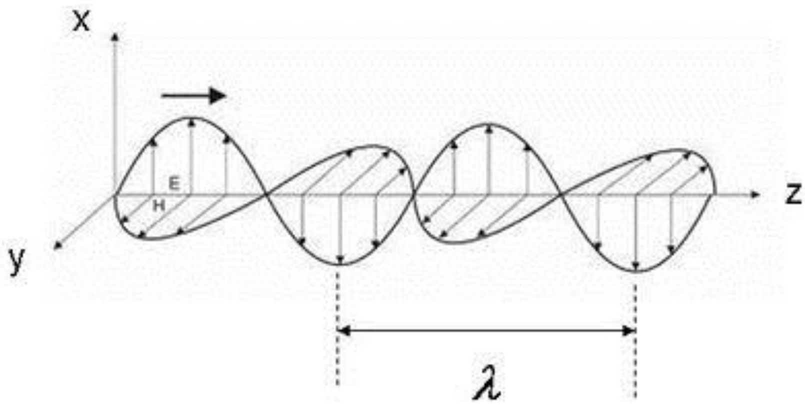
III. $\oint_L \underline{H} d\underline{r} = I + \frac{d}{dt}\left(\int_A D d\underline{A}\right)$

IV. $\oint_A \underline{B} d\underline{A} = 0$

A $\underline{D}$ és $\underline{H}$ bevezetésének az az előnye, hogy nem befolyásolja az anyag jelenléte.

Az elektromágneses hullám

Ha valahol változik a mágneses erőtér, akkor ott elektromos erőtér keletkezik, a változó elektromos erőtér pedig mágneses erőteret hoz létre. Bizonyos feltételek mellett ezek az egymást kölcsönösen keltő elektromágneses zavarok a térben szabadon terjedhetnek, és a zavar forrásától távol is megjelennek.



Hullámegyenlet elektromágneses hullámra

Megnevezés	Integrális alak	Differenciális alak
Gauss törvény	$\oint_A \underline{D} d\underline{A} = \int_V \rho dV$	$div\ \underline{D} = \rho$
Mágneses Gauss törvény	$\oint_A \underline{B} d\underline{A} = 0$	$div\ \underline{B} = 0$
Ampére-Maxwell törvény	$\oint_L \underline{H} d\underline{r} = \int_A \underline{j} d\underline{A} + \frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{D} d\underline{A}\right)$	$rot\ \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$
Faraday törvény	$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \underline{B} d\underline{A}\right)$	$rot\ \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

Vizsgáljunk egy hullámot egy pontszerű rezgő dipólustól annyira távol, hogy a hullám már síkhullámnak tekinthető. Az x tengelyt vegyük fel a hullám terjedésének irányában, az y tengelyt pedig a dipólussal és a vele árhuzamos elektromos térerősséggel párhuzamos irányban. Mivel a hullám az x tengely irányába terjed, az y illetve z koordinátáktól a hullámterjedésben szerepet játszó térmennyiségek nem függnek. Tegyük fel, hogy:

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$$
$$\underline{B} = \mu \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$
$$\underline{j} = 0 \text{ és } \rho = 0$$

Ezek következtében a hullámegyenletek:

$$\frac{\partial D_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

Ez azt jelenti, hogy E_x és B_x sem az időtől sem a helytől nem függ.

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

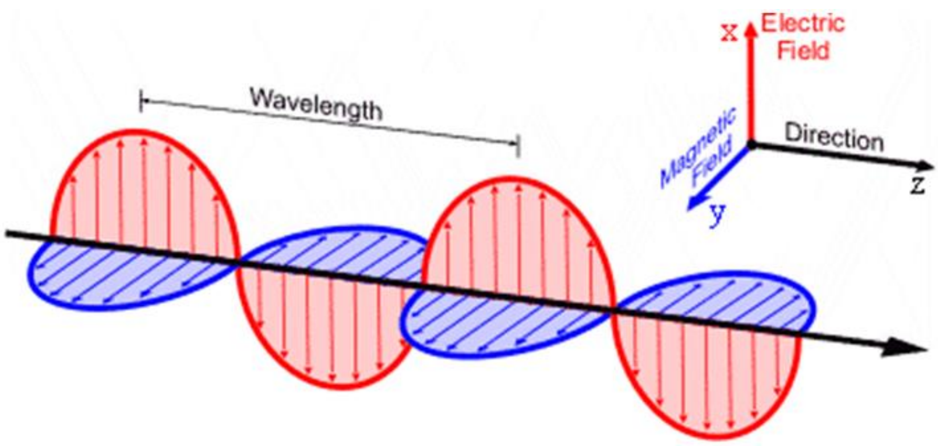
A feltevésünk szerint:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \text{ és } \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Ami azt jelenti, hogy az y komponens nem játszik szerepet a hullám terjedésében.

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Ebből az látható, hogy az elektromos térerősség y komponensének időbeli változása csak a mágneses indukció z komponensét, valamint a mágneses indukció z komponensének időbeli változása csak az elektromos térerősség y komponensét befolyásolja.



Ebből az következik, hogy ha a hullámban az elektromos térerősségnek csak y komponense van, akkor a mágneses indukcióvektornak csak z komponense van: az elektromágneses síkhullámban $\underline{E}$ és $\underline{B}$ egymásra merőleges, az $\underline{E} \times \underline{B}$ vektor pedig a hullám terjedési irányába mutat. Differenciáljuk az utolsó előtti egyenletet t szerint:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\epsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Az utolsó egyenletet pedig x szerint:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

Amiből következik:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$
$$\frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Ez az elektromos térerősség változását leíró hullámegyenlet. A hullám terjedési sebessége pedig:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$$

Vákuumban:

$$\epsilon_r = 1 \text{ és } \mu_r = 1$$
$$v_{vákuum} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3\ 10^8\ m/s$$

Ha az előző egyenletekben nem a mágneses indukcióvektort küszöböljük ki, hanem az elektromos térerősséget, akkor a mágneses erőtérre vonatkozó hullámegyenletet kapjuk:

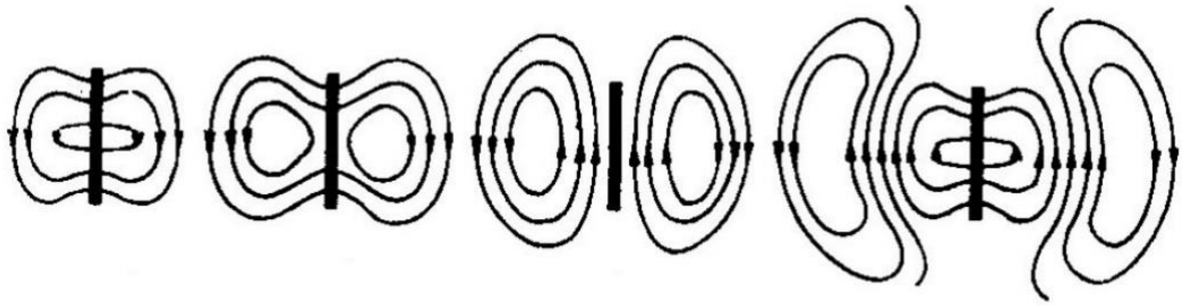
$$\frac{1}{\mu\epsilon}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Elektromágneses hullámok keltése

Az elektromágneses hullámok keltésének sok módja van, amik mind azon alapulnak, hogy a gyorsuló töltések elektromágneses sugárzást bocsátanak ki. A szabad elektromágneses hullám előállítására az egyik legegyszerűbb módszer egy egyenes vezető rúd hossztengelye mentén oszcilláló áram létrehozása. Ez a lineáris rezgés egy rezgő elektromos dipólus, amit szokás Hertz-dipólusnak is nevezni. A fém rúdban úgy lehet rezgéseket létrehozni, hogy középen megszakítjuk, és a két egyenes vezetőhöz egy nagyfrekvenciás generátort kapcsolunk. A generátor váltakozó feszültségének hatására a töltések a rúd mentén ide-oda mozognak. Az a megfigyelés, hogy az antennák párhuzamos állásánál maximális-, egymásra merőleges állásnál pedig minimális jelet észlelünk, ami arra utal, hogy a dipól sugárzása poláros, vagyis transzverzális hullámokról van szó. Hertz számos kísérletet végzett el, amelyek azt igazolták, hogy a dipólantenna sugárzására ugyanazok a törési és visszaverődési törvények érvényesek, mint a fényre. Hertz az állóhullámok hullámhosszából a frekvencia ismeretében meghatározta a sugárzás terjedési sebességét, amit azonosnak talált a fény terjedési sebességével. Ezekkel a kísérletekkel nem csak az elektromágneses hullámok létét igazolta, hanem azt is valószínűsítette, hogy a fény is elektromágneses hullám.


Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894)

A számítások és a kapott erővonalképek azt mutatják, hogy az elektromágneses hullámban az $\underline{E}$ és $\underline{B}$ vektorok egymásra és a hullám terjedési irányára merőlegesek. Ezek szerint az $\underline{E} \times \underline{B}$ vektor egyirányú a terjedés irányát megadó $\underline{k}$ hullámszám vektorral.



Elektromágneses hullám energiája és impulzusa

Egységnyi térfogatra eső elektromos energia, azaz az elektromos energiasűrűség:

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Mágneses energiasűrűség:

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\mathrm{w} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Mivel elektromágneses hullámban $E = vB$, valamint $v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}$, így:

$$\frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon v^2 B^2 = \frac{1}{2\mu} B^2$$

Ebből:

$$w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 = \epsilon E v B$$

A terjedés irányába mutató egységvektor:

$$\underline{u}_T = \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{EB}$$

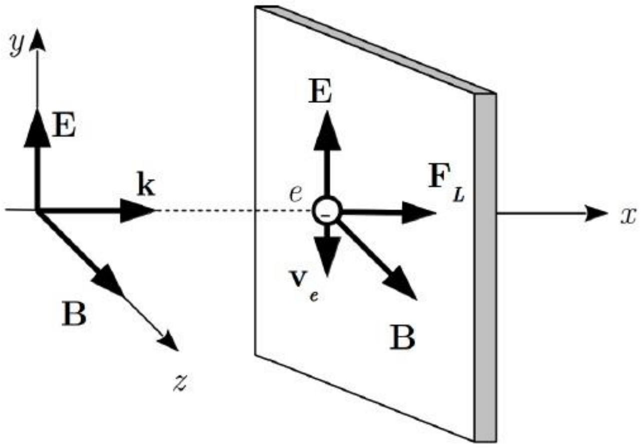
Ebből a hullám energiaáram sűrűsége (egységnyi idő alatt egységnyi felületen átáramló energia):

$$\underline{j} = \epsilon E B v^2 \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{EB} = \epsilon v^2 \underline{E} \times \underline{B}$$

$$\underline{j} = \frac{1}{\mu}\underline{E} \times \underline{B} = \underline{E} \times \underline{H}$$

Ezt a mennyiséget nevezik Poynting-vektornak:

$$\underline{S} = \underline{j} = \underline{E} \times \underline{H} = \frac{1}{\mu}\underline{E} \times \underline{B}$$



Az elektromágnességtan törvényeiből következik, és kísérletekkel is igazolható, hogy egy felületre érkező elektromágneses hullám a felületre erőt fejt ki, vagyis a hullámnak impulzusa is van. Vizsgáljunk meg egy vezető anyag felületére merőlegesen érkező elektromágneses síkhullámot. Egy ilyen hullámban az elektromos térerősség és a mágneses indukció vektora a felülettel párhuzamos. A hullám elektromos erőtere az anyag elektronjaira erőt fejt ki, és azokat mozgásba hozza. A mozgó töltésekre a mágneses erőtér a hullám haladási irányába mutató erőt fejt ki:

$$\underline{F}_L = q\underline{v}_e \times \underline{B}$$

A hullámban az elektromos és mágneses erőtér változik, ezért az erő nagysága időben változik, viszont az iránya mindig ugyanolyan marad, mivel az elektromos térerősség és a mágneses indukció a síkhullámban egyszerre vált irányt. Ez azt jelenti, hogy a beérkező hullám a terjedési irányba mutató impulzust ad át az anyagnak.

$$\underline{v} = \mu\underline{E} = \mu\underline{E}_0 \sin(\omega t)$$

$$\underline{F}_L = q\left(\mu\underline{E}_0 \sin(\omega t)\right) \times \underline{B}_0 \sin(\omega t) = q\mu \sin^2(\omega t)\, \underline{E}_0 \times \underline{B}_0$$

$$\left|\underline{F}_L\right| = q\mu \sin^2(\omega t) \frac{\left|\underline{E}_0\right|^2}{c}$$

A teljesítmény pont egyenlő lesz az elektromágneses hullám által egységnyi idő alatt elvesztett energiával. Ha azt feltételezzük, hogy az elektromágneses hullám teljes energiája disszipálódik a testen, akkor az egységnyi felületet érő erő:

$$p_f = \frac{\left|\sum_i \underline{F}_L^i\right|}{A} = \frac{|\underline{S}|}{c}$$

Newton II. törvénye alapján felírható a $\underline{p}$ impulzus idő szerinti differenciálhányadosát:

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = \left|\sum_i \underline{F}_L^i\right| = p_f A = \frac{|\underline{S}|}{c} A = \left|\frac{dE_{EM}}{dt}\right| \frac{1}{c}$$

E_{EM} az elektromágneses tér energiája. Ezt integrálva:

$$|\underline{\mathrm{p}}| = E_{EM} \frac{1}{c}$$

Ugyanilyen kapcsolat áll fent az impulzus térfogati sűrűsége és az energiasűrűség között:

$$P = \frac{w}{c} = \frac{\epsilon c E B}{c} = \epsilon E B = \frac{\epsilon}{c} E^2$$

Az impulzusvektor a hullám haladási irányába mutat, így az impulzussűrűség-vektor:

$$\underline{P} = \epsilon \underline{E} \times \underline{B}$$

Egy A nagyságú felületre merőlegesen beeső hullám Δt idő alatt adott impulzust szállít a felületre:

$$\Delta p = P \Delta V \Delta t = P A c \Delta t$$

Amiből a felületre ható erő:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = P A c$$

Ebből a nyomás:

$$p = \frac{F}{A} = P c = \frac{\epsilon}{c} E^2 c = \epsilon E^2 = w$$

A sugárzási nyomás tehát a sugárzást teljesen elnyelő felület esetén az energia térfogati sűrűségével egyenlő. Ha a sugárzás teljesen visszaverődik a felületről:

$$p = 2Pc = 2\epsilon E^2 = 2w$$

Optika

Geometriai Optika

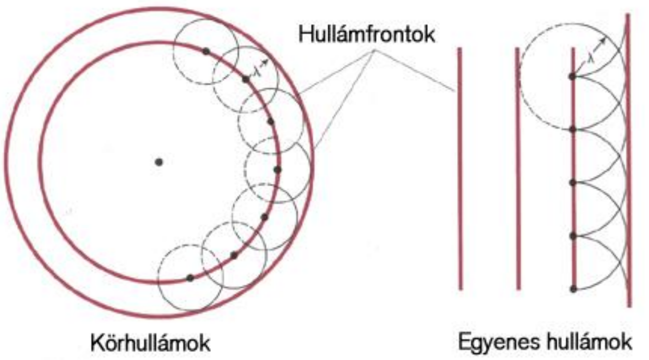
Hullámfrontok és fénysugarak

Tekintsünk egy pontszerű fényforrást, ami λ hullámhosszú fényt bocsát ki. Ha a pontforrástól távolodó hullámokat vizsgáljuk, akkor a víz felszínén terjedő gömbhulláméhoz hasonlót kapunk. A pontforrásból kibocsájtott hullámnál a gömbfelület minden egyes pontjában a hullám fázisa ugyanakkora. Az azonos fázisú felületeket hullámfrontnak nevezzük. A hullám terjedési iránya mindig merőleges a hullámfrontra. Nagyon nagy távolságban a pontforrástól a hullám tekinthető síkhullámnak.

Huygens-elv

Christaan Huygens
(1629-1695)

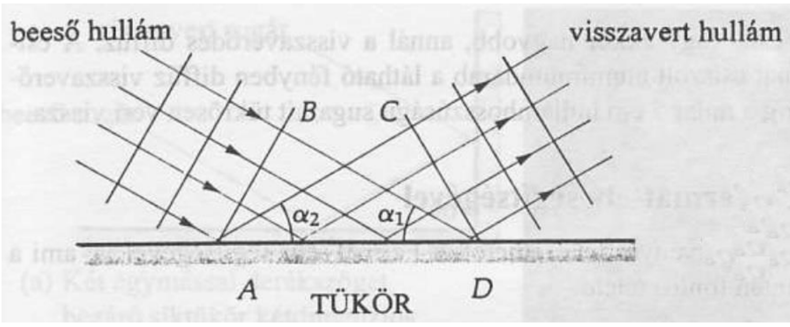
A Huygens-elv szerint a hullámfront minden egyes pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja. Az elemi hullámok fénysebességgel terjednek tovább. Egy adott t időpillanatban a hullámfront helyzetét az elemi hullámok burkolója adja.



Fényvisszaverődés síktükrön

Huygens-elv

Amint az AB hullámfront eléri a síktükröt, az A pontból gömbhullámok indulnak a CD hullámfronton C pont felé. Ez idő alatt a B pontból induló hullám tovább halad D pont felé. Ha a hullámvonulatnak annyi idő kell az A C pontok közötti út megtételéhez,



mint a B D pontok közötti út megtételéhez, akkor a C és D pontok azonos fázisban lesznek. Az ABD derékszögű háromszög egybevágó az ACD derékszögű háromszöggel, minek a következtében szögeik is egyenlők. Ennek következménye, hogy a beesési szög, illetve a visszaverődési szög is egyenlő.

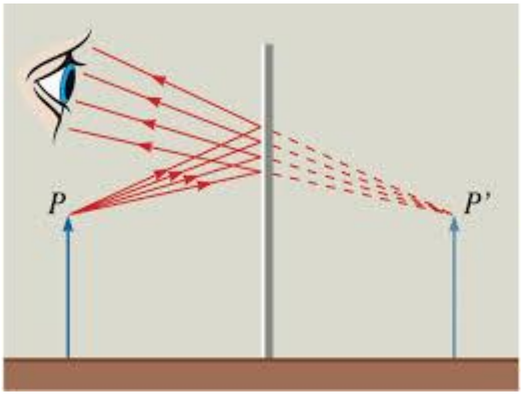
$$\Theta_{bees} = \Theta_{visszavert}$$

Az optikában a szögeket a felületre merőleges, normális iránytól szokás mérni.

Diffúz visszaverődésről akkor beszélünk, ha a sugarak nem párhuzamosan, hanem különböző szögekben verődnek vissza.

Fermat-elv

A Fermat-elv szerint a fénysugár az egyik pontból a másikba azon az úton terjed, amely a legkevesebb időt veszi igénybe.



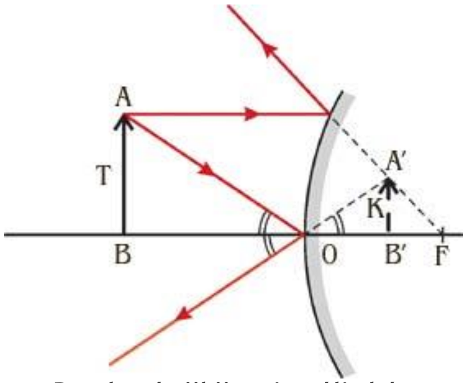
Pierre de Fermat
(1601-1665)

Szerkesszünk néhány sugarat a visszaverődési törvénynek megfelelően, ami a forrásból kiinduló és a tükörről visszaverődött sugarakat mutatja. A visszavert sugarak meghosszabbítása a P' pontban metszik egymást, ami azt az érzést kelti, hogy a tárgy ott helyezkedik el. Ez a P pont képe. Legyen t a tárgytávolság, és k pedig a képtávolság. A k képtávolság egyenlő a t tárgytávolsággal. Ezt a következtetést pontszerű tárgyra vonatkozóan nyertük, viszont véges kiterjedésű tárgyakra is igaz, mivel a véges kiterjedésű tárgy felfogható pontszerű fényforrások eloszlásaként.

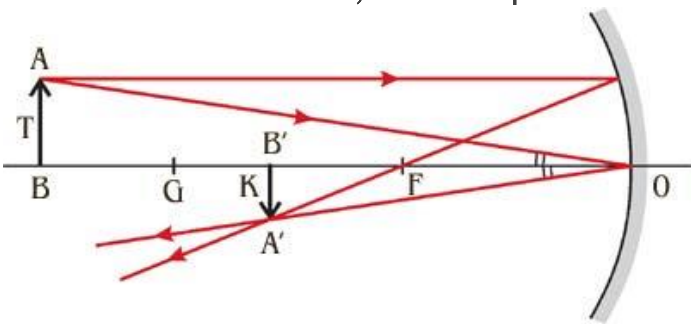
Gömbtükör

A gömbtükrök között megkülönböztetünk homorú illetve domború tükröket. A gömbtükrök képalkotásának jellemzésére sugármeneteket szerkesztünk. Tekintsünk egy optikai tengelyen elhelyezkedő pontot, majd vizsgáljuk meg. Visszaverődés után a sugarak vagy széttartanak, és látszólagos képet alkotnak, vagy összetartóvá válnak, és valódi képet alkotnak. A valódi azt jelenti, hogy a fénysugarak tényleg metszik egymást a kép helyén, és ott képet alkotnak. Virtuális kép esetén a fénysugarak nem mennek át a képponton, így ha ernyőt helyezünk oda, azon nem jön létre kép.

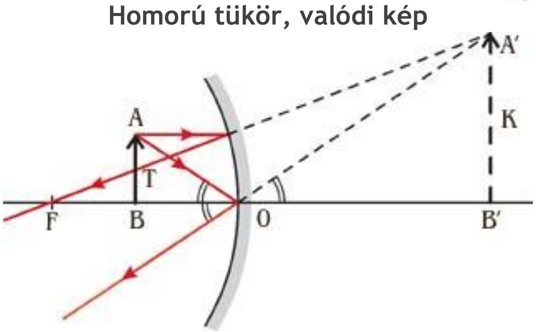
A kép helyének meghatározásához két sugarat húzunk meg, amik segítenek. Mivel minden sugár egy ponton halad át, így két pont is elég a kép helyének meghatározásához.



Domború tükör, virtuális kép



Homorú tükör, valódi kép



Homorú tükör, virtuális kép

A tükrök leképezési törvénye:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R}$$

Azonban el kell fogadnunk az előjelkonvenciót, hogy minden esetben igaz legyen az egyenlet:

- t számértékének előjele pozitív, ha a tükörhöz érkező sugarak divergálnak.
- k számértékének előjele pozitív, ha a visszavert sugarak konvergálnak.
- R számértékének előjele pozitív, ha a tükör homorú, és negatív, ha a tükör domború.

Gyakran használjuk még a fókusztávolságot.

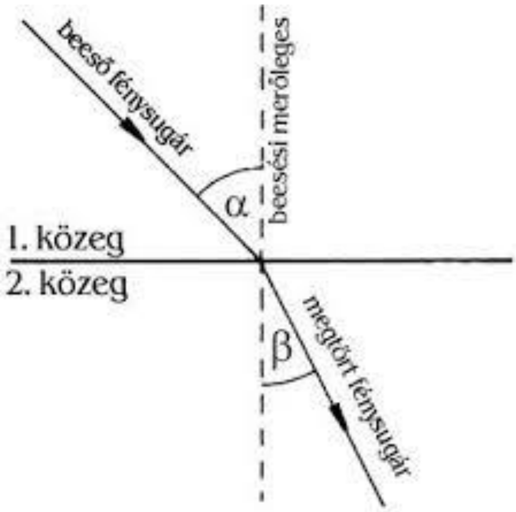
$$f = \frac{R}{2}$$

Amiből következik:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Fénytörés sík felületen

A c a fény vákuumbeli sebességét jelöli. Más közegben ez a sebesség kisebb. A c/v sebességek hányadosát törésmutatónak nevezik. Optikailag sűrűk azok az anyagok amiknek nagy a törésmutatója. Amikor a fény két különböző törésmutatójú felület határához ér, akkor a fénysugár iránya megváltozhat. Ezt a jelenséget nevezik fénytörésnek. Az n_1, illetve az n_2 törésmutatójú közegben a fény sebessége:



$$v_1 = \frac{c}{n_1}$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2}$$

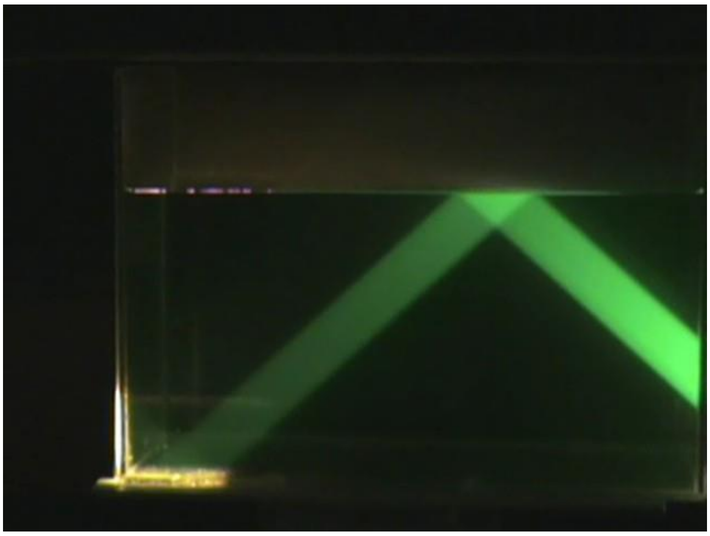
Snellius fénytörési törvénye alapján:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Ez a törvény akkor is érvényes, amikor a fény a nagyobb törésmutatójú közegből megy a kisebb törésmutatójú közeg felé. Ha a fény irányát megfordítjuk, akkor az ugyan azon az úton fog haladni visszafelé. Ez a fénysugár megfordíthatóságának elve.

Teljes visszaverődés

Ha a fény két különböző törésmutatójú közeg határára ér, és átlép a határfelületen, akkor a határfelületről mindig visszaverődik egy része. Speciális eset, amikor a második közeg törésmutatója kisebb, mivel ilyen esetben bekövetkezhet a teljes visszaverődés. Ez belátható a Snellius törvényből kiindulva:



$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Ha a beesési szög növekszik, akkor a törési szög 90^{o}felé tart. Ha ezt eléri:

$$\sin\theta_1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)1$$

Ha a beesési szög nagyobb a kritikus szögnél, akkor teljes visszaverődés következik be.

$$\sin\theta_c = \left(\frac{n_2}{n_1}\right), \qquad n_2 < n_1$$

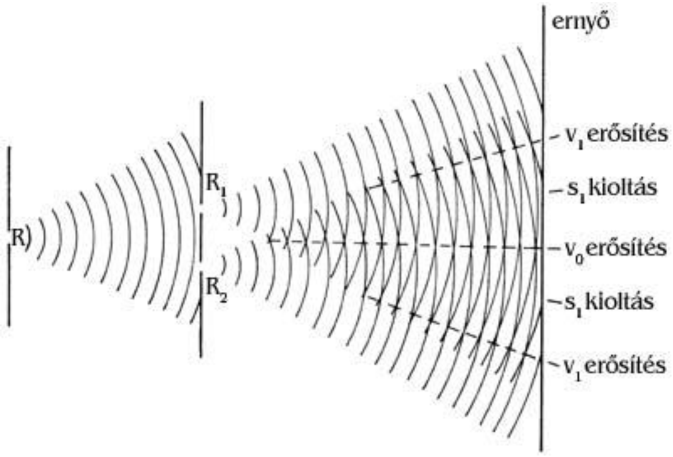
Fizikai optika

Kétréses interferencia

Thomas Young
(1773-1829)

Young átlátszatlan ernyőn lévő két kicsi lyukon áthaladó fényt megfigyelve azt állapította meg, hogy a lyukak mögé helyezett ernyőn világos illetve sötét gyűrűk jelennek meg. Ez a jelenség nem magyarázható meg a fény részecskeelméletével. A csíkos mintázatot az magyarázza, hogy a résből érkező fényhullámok szuperponálódnak. A lineáris szuperpozíció elve szerint, amikor két hullám szuperponálódik, akkor az eredő hullám pillanatnyi értéke minden pontban az összetevő hullámok pillanatnyi értékének összege. Ha az ernyő egy adott pontjában a hullámok azonos fázisban vannak, akkor erősítik egymást, míg ha más fázisban vannak, akkor leronthatják egymást. A fényhullám interferenciája hozza létre az interferencia képet. Ennek az a feltétele, hogy a hullámok koherensek legyenek. Két fényforrásból jövő hullám akkor koherens, ha hullámhosszuk egyenlő és fáziskülönbségük bármely időpillanatban állandó. Transzverzális hullámok interferenciájának feltétele, hogy:

- A résből kiinduló hullámok koherensek legyenek.
- Az elektromos térerősség rezgéseinek síkja nem kell, hogy egyezzen, hogy a lineáris szuperpozíció elve érvényesüljön.



Ha a fényforrás a kétréstől egyenlő távolságban van, akkor a két résen áthaladó fény azonos fázisban lesz, amplitúdóik egyenlők, és az elektromos térerősség rezgéseinek az iránya megegyezik. Tekintsük most azt az elrendezést, amikor az ernyőn a szimmetriatengelytől y távolságra van a P pont. Ekkor az alsó résből érkező fény késik a másik résből érkező fényhez képest, mert hosszabb utat kell megtennie. Az út különbség:

$$\Delta r = d \sin\theta$$

Ahol d a rések távolságát jelöli. Ez fáziskülönbséget okoz a két hullám között:

$$\Phi = w\pi\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right)$$

P pontban az elektromos térerősség pillanatnyi értéke:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \Phi)$$

Az intenzitások maximumainak helye ott van, ahol Δr a hullámhossz egész számú többszöröse.

$$k\lambda = d \sin\theta$$

A gyakorlatban gyakran megesik, hogy $d \gg y$, így $\sin\theta \approx tg\,\theta \approx \theta$.

$$k\lambda = d\left(\frac{y}{d}\right)$$

A minimumok helye hasonlóan meghatározható:

$$\left(l + \frac{1}{2}\right)\lambda = d \sin\theta$$

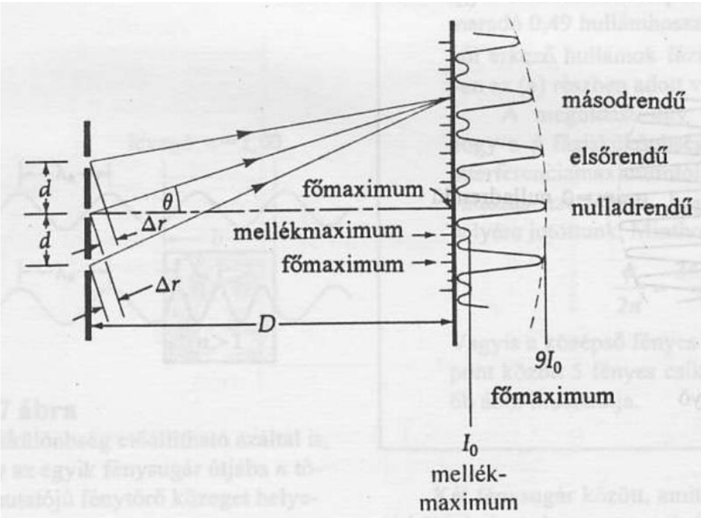
$$\left(l + \frac{1}{2}\right)\lambda = d\left(\frac{y}{d}\right)$$

A központi csík a nulladrendű csík. Innen bármelyik irányba elindulva az erősítéseket sorra első rendű ($m = \pm 1$), másodrendű ($m = \pm 2$) erősítésnek nevezzük.

Kétréses interferencia esetén megfigyelhető, hogy amit a rések távolsága csökken, úgy a csíkok távolsága nőni kezd.

Többréses interferencia

A kétréses interferenciánál használt technika könnyen átalakítható három, illetve többréses interferencia tárgyalására is. A rések elrendezése hasonló, mint az előbb. Azonban az ernyőn megjelenő minta meg fog változni. egymás után több kisebb nagyobb maximumot kapunk, ezért megkülönböztetünk főmaximumot, illetve mellékmaximumot. A főmaximumok ugyan azon törvényszerűség alapján követik egymást, mint kétréses interferencia esetén, feltéve hogy a rések d távolsága egyenlő.

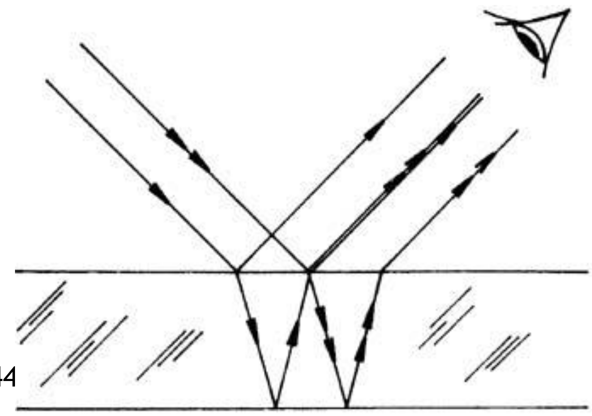


$$d \sin\theta = m\lambda$$

A fő- illetve mellékmaximumok felváltva követik egymást. Intenzitásmaximumok $\phi = \frac{\pi}{3}$ szögenként alakulnak ki. A rések számának növelése következtében, a mellékmaximumok száma is növekszik a főmaximumok között. Két főmaximum között a mellékmaximumok száma mindig kettővel kevesebb, mint a rések száma. Ha nő a rések szám, akkor a mellékmaximumok egyre kisebbek lesznek, míg a főmaximumok egyre nagyobbak.

Interferencia vékony rétegen

Tekintsünk egy fénytörő anyagú vékony réteget. A ráeső fény az alsó illetve a felső felületéről is visszaverődhet. A visszavert fénysugarak mind a két helyről a megfigyelő szemébe jutnak, és interferálnak egymással.



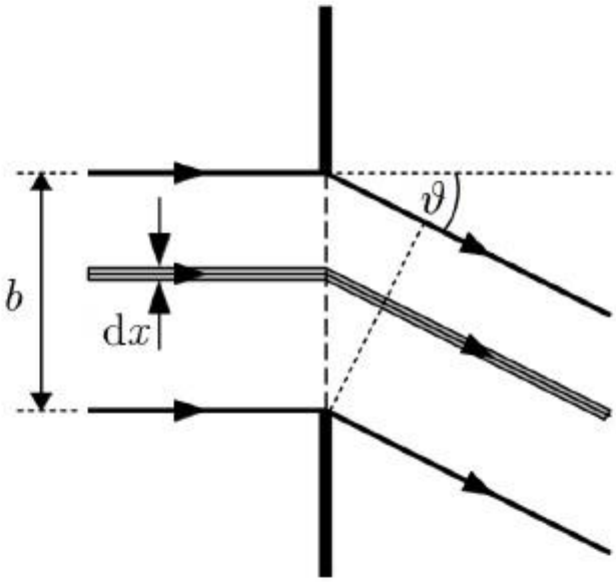
A fény visszaverődésekor:

- Amikor a fény nagyobb törésmutatójú közeg határáról verődik vissza, a fázisa π radiánnal megváltozik.
- Ha a fény kisebb törésmutatójú közeg határfelületéről verődik vissza, akkor nincs fázisváltozás.

Elhajlás résen

Fresnel zónák

A problémát korlátozzuk két dimenzióra, azaz az ábra síkjára merőleges elhajlási képet nézzük. A rést zónákra osztjuk úgy, hogy egy zóna széléről induló fénysugár úthossza fél hullámhosszal legyen nagyobb, mint a szomszédos zóna széléről indulóé. Ezek a Fresnel zónák. Az elhajlási képen a minimumok ott jelennek meg, ahonnan nézve a rés páros számú Fresnel zónát tartalmaz. Az intenzitásminimum ott fog megjelenni, ahol a rés egyik szélétől érkező fénysugár a hullámhossz egész számú többszörösével több utat tesz meg, mint a másik szélétől érkező fénysugár. A minimumhelyek:



$$m\lambda = b \sin\theta$$

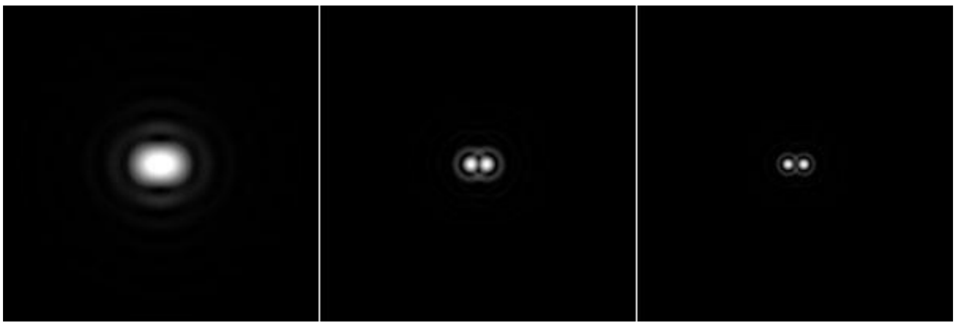
Elhajlás köralakú nyiláson

Az elhajlási jelenségek korlátokat szabnak azokon az elektromágneses színkép felbontóképességére nézve. A legtöbb ilyen berendezésben kör alakú aperatúrát alkalmaznak. Egy D átmérőjű köralakú aperatúra esetén a minimumok helye:

$$D \sin(\theta) = p_m \lambda$$

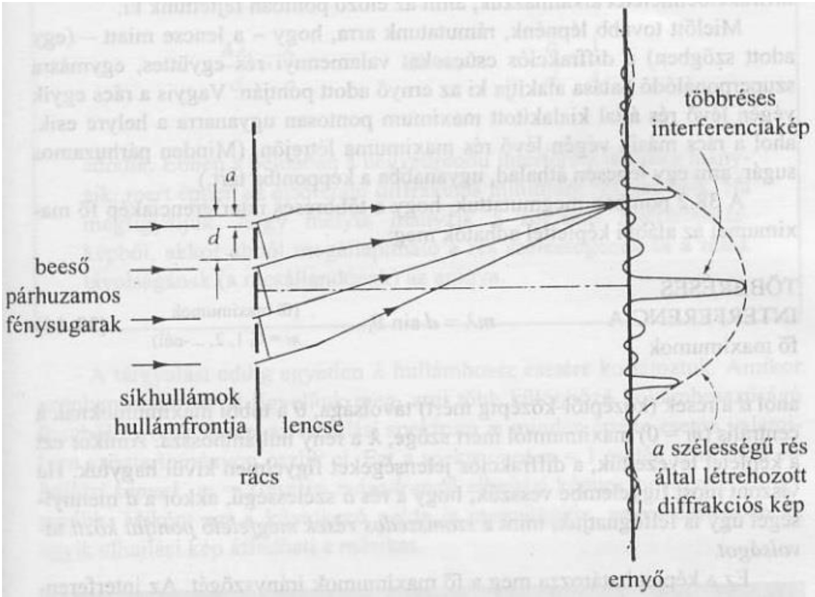
Ahol $p_1 = 1{,}220$ $p_2 = 2{,}233$ $p_3 = 3{,}238$ $p_4 = 4{,}241$ $p_5 = 5{,}243$.

Rayleigh kritériuma két egyenlő pontforrás megkülönböztethetőségére vonatkozik. Két fényforrás megkülönböztetéséhez az szükséges, hogy az egyik elhajlási képének a csúcsa a másik elhajlási képében a maximális értékhez ne essen közelebb, mint az első minimum. Minimális felbontási szög meghatározása:



$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$$

Elhajlás rácson



A diffrakciós rács sok, egymáshoz közeli keskeny résből áll. Mivel egy centiméteren belül nagyon sok rács van, így a rések szélessége igen kicsi. Ennek következtében nagyszögű elhajlási jelenségek jönnek létre. Így a rács működése egyszerre alapszik az egyréses diffrakción illetve a többréses elhajláson.

Többréses interferencia esetén a főmaximumok

$$m\lambda = d\sin\theta$$

Viszont ekkor nem vettük figyelembe a diffrakciós jelenséget. Egy b szélességű rés esetén a d-t úgy is felfoghatjuk, mint a szomszédos rések megfelelő pontjai közötti távolságot.

Röntgen-diffrakció

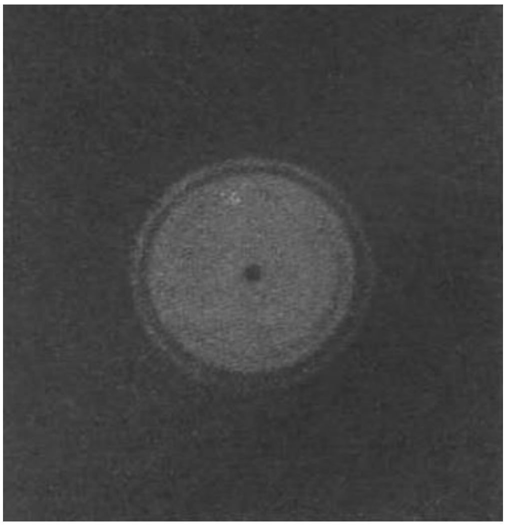
A röntgensugárzás számára a kristályszerkezetbe rendeződött atomok háromdimenziós diffrakciós rácsként viselkednek, azaz a beeső sugárzást elnyelik az elektronok, és elemi hullámokat sugároznak ki. Adott irányokban a szórt hullámok azonos fázisúak lesznek, így ezekben az irányokban nagy intenzitású szórt sugárzás jön létre. Röntgen-diffrakció esetén az erősítés feltételét a Bragg-féle szórási feltétel mondja ki:

$$m\lambda = 2d\sin\phi$$

Ahol $m = 1, 2, 3, \ldots$ a szórás rendszáma, ϕ a beeső sugár s iránya az atomsíkhoz képest és d az atomsíkok távolsága. A háromdimenziós rács igen sok szórócentrumból áll, minek következtében a főmaxmimumok nagyon élesek és intenzívek, míg a mellékmaximumok igen kicsik.

Fresnel-féle diffrakció, kör alakú nyílások és akadályok

Amikor átlátszatlan lemezen egy kicsi kör alakú lyukon párhuzamos fény halad át, akkor az elhajlási kép nagyobb lesz, mint a lyuk, megjelennek a diffrakciós gyűrűk, és még lehet hogy a lyuk mögött sötét folt keletkezik. Ezek az elhajlási képek a Fresnel-féle diffrakció eredményeként jönnek létre, amikor a fény a lyukon áthaladó, vagy az akadályt elkerülő hullámfront különböző részeiből különböző szögekben érkezik az ernyőre.



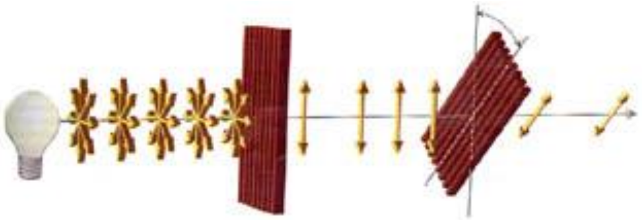
Fresnel-féle elhajlás kör alakú nyíláson

Poláros fény

Polarizálatlan fénynek nevezzük azt a fényt, amiben a hullámvonulatok elektromos térerősségvektorainka iránya teljesen véletlen.

A polárszűrő

Ideális esetben egy polárszűrő a beeső polarizálatlan sugár intenzitásának 50%-át elnyeli. A gyakorlatban ez inkább 40%, vagy annál is kevesebb. Ha két polárszűrőt keresztezünk, azaz úgy helyezzük el őket, hogy a transzmissziós tengelyeik merőlegesek egymásra, akkor a fény intenzitásának kb. 90%-át elnyelik. Ha két polárszűrőt használunk, akkor az elsőt polarizátornak, míg a másikat analizátornak nevezzük.



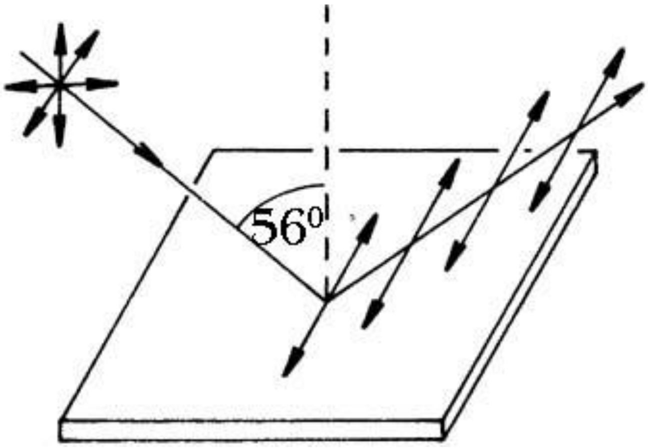
Vegyük azt az esetet, amikor két polárszűrő egymással θ szöget zár be. Ebben az esetben, ha a polarizátorból érkező fény elektromos térerősségének amplitúdója E_0, akkor az analizátor után a térerősség $E_0 \cos\theta$ lesz. Mivel az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos, így az intenzitás:

$$I = I_0 \cos^2\theta$$

Ahol I_0 az analizátorra eső intenzitás amplitúdója.

Polarizáció visszaverődéskor és szóráskor

Polarizált fényt elő lehet állítani úgy is, hogy a fény útjába helyezünk valamilyen sík szigetelő felületet. A felületről visszavert fény részben, vagy teljesen polarizált lesz. Az üvegről visszaverődött fény abban az esetben lesz polarizált, ha a beeső fénysugár pont merőleges a visszavert fénysugárra. Jelölje θ_p a beesési szöget. Akkor kapunk polarizált fényt ha:



$$\theta_p + \theta_v = 90°$$

Ezt behelyettesítve a Snelius törvénybe, megkapjuk Brewster törvényét:

$$tg\ \theta_p = n$$

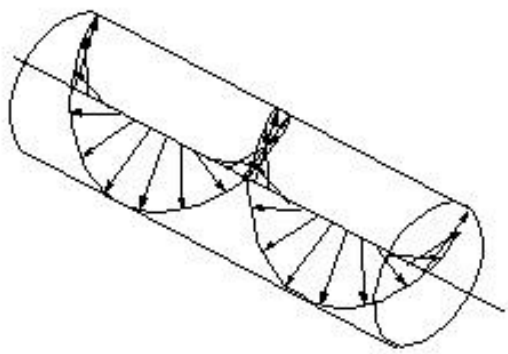
$$n = \frac{n_2}{n_1}$$

Ezt a szöget Brewster szögnek nevezzük. Viszont a törvény csak dielektrikumok esetén érvényes.

Kettőstörés

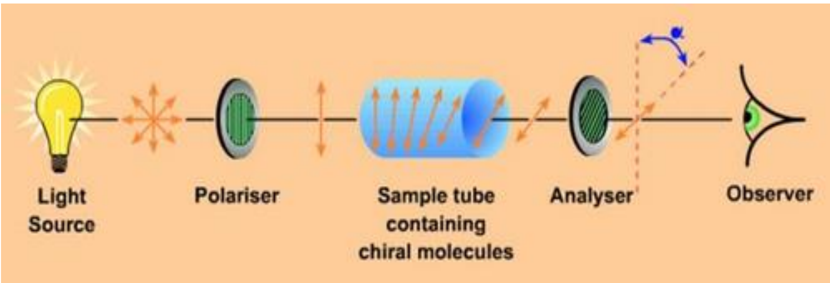
Néhány kristályos anyagban az atomok úgy rendeződnek, hogy a rendszernek nagyfokú szimmetriája van, így ezek egyetlen törésmutatóval jellemezhetők. Ezeket az anyagokat optikailag izotópnak nevezzük. Azonban vannak anyagok, amik nem így viselkednek. Ezen anyagok molekuláris szerkezete aszimmetriát mutat. Ez az optikai tulajdonságaikban úgy jelenik meg, hogy a beeső fény polarizációjának irányától függően két törésmutatója van. Ezeket az anyagokat anizotróp vagy kettősen törő anyagoknak nevezzük. Polarizálatlan fény ha anizotróp anyagra esik, akkor két polarizált összetevőre bomlik fel. Ordinárius, illetve extraordinárius sugárra. Az ordinárius sugár követi a Snellius-Descartes törvényt, ellenben az extraordináriussal.

A fázistoló lemezek és a cirkuláris polarizáció



A kettősen törő anyagoknak két törésmutatójuk van. Az egyik az o sugárra vonatkozik, míg a másik az e sugárra. A fény ezeken az anyagokon két különböző terjedési sebességgel halad végig. Ha a két sugár közötti fáziskülönbség éppen 180°, akkor $\lambda/2$ lemeznek nevezzük a hasábot. A $\lambda/4$-es lemez 90°-os fáziskülönbséget hoz létre. 90°-os fáziskülönbséggel találkozó elektromos térerősségkomponensek egymáshoz képest cirkulárisan polarizált fényt hoznak létre.

Optikai aktivitás



Vannak anyagok, amik a különböző forgásirányú cirkulárisan polarizált fényt engedik át különböző sebességgel. Ennek hatására a lineárisan polarizált fény polarizációs iránya elfordul. Ezek az optikailag aktív anyagok. Ez úgy magyarázható, hogy a lineárisan polarizált fény felfogható két ellentétes irányba forgó cirkulárisan polarizált fény eredőjeként, és az egyik cirkulárisan polarizált fény gyorsabban terjed az anyagban, mint a másik.

Interferenciaszínek és feszültségoptika

Ha egy kettősen törő anyagot két polárszűrő közé helyezünk, akkor az átmenő fény különböző színekben jelenik meg. Ennek oka, hogy az anyag egyes részei a vörös fény számára $\lambda/4$ lemezként viselkednek, míg mások a kék fényre alkotnak $\lambda/2$ lemezt. Ennél fogva a ráeső fény polarizációs irányát egyes színekre különbözőképp forgatja el, és ennek következtében az analizátor egyes színeket átenged, míg másik színeket nem.

Sugárzás kvantumos természete

A fekete test sugárzásának spektruma

A tökéletes fekete testet a legjobban az közelíti meg, hogy ha durva falú üreges testen kisméretű lyukat vágunk. Ebben az esetben elenyésző annak a valószínűsége, hogy a lyukon beeső sugárzás a falakról visszaverődve a lyukon távozzon. Ahogy a fal elnyeli a sugárzást úgy a hőmérséklete egyre nő, és egyre jobban sugároz. Ez addig folytatódik, amíg el nem éri a termikus egyensúlyt, és az elnyelt sugárzás mennyisége megegyezik a kisugárzott mennyiséggel. Az üregben ezt a kialakult sugárzást nevezik feketetest sugárzásnak. A falon lévő lyuk pedig a feketetest. A feketetest által kisugárzott összes energia arányos a hőmérséklet negyedik hatványával:

$$R \sim T^2$$

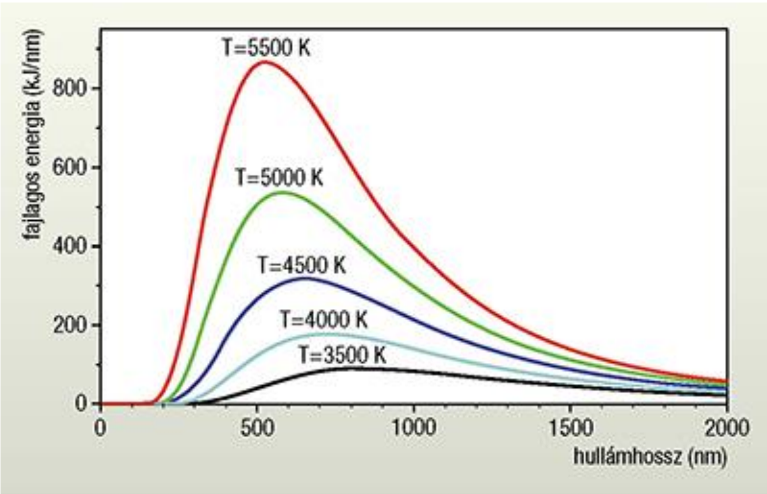
A hőmérsékletet Kelvinben mérve. Az arányossági tényező pedig a Stefan-Boltzmann állandó:

$$R = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}672\ 10^{-8}\ W/m^2K^4$$

A sugárzás spektrális eloszlása nem függ az üreg anyagától, csak z abszolút hőmérséklettől.

A feketetest sugárzás különböző értelmezései



Sok fizikus próbált meg magyarázatot találni a feketetest spektrális sugárzására, ami a λ és a $\lambda + d\lambda$ közti hullámhosszúságra esik. Ezt matematikailag az $f(\lambda, T)$ függvény írja le. A hőmérséklet emelkedésével a görbék a rövidebb hullámok felé tolódnak. Az erre vonatkozó empirikus törvény, azaz a Wein-féle eltolódási törvény:

$$\lambda_m T = konstans.$$

A konstans a kísérletek alapján meghatározható: $2{,}898\ 10^{-3}\ mK$

Wein elmélete

Wein továbbfejlesztette Boltmann elméletét és arra a következtetésre jutott, hogy az energiaeloszlás csak a λT szorzattól függ. A sugárzás emissziójának és az abszorpciójának a természetére tett feltételekke élve levezetett egy kifejezést a spektrális eloszlás függvényre:

$$du_\lambda = f(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)}} d\lambda$$

A c_1 és c_2 állandókat úgy kell megválasztani, hogy a kísérleti adatokhoz a görbe a lehető legjobban illeszkedjen.

Planck elmélete


Max Planck
(1858-1947)

Feltételezte, hogy az f frekvenciájú egyszerű harmonikus oszcillátor számára csak olyan energiaállapotok megengedettek, amelyek energiája: $0, hf, 2hf, 3hf$ ...

$$E = nhf$$

A h egy állandó, aminek az értékét Planck meg is határozta:

$$h = 6{,}626\ 10^{-34}\ Js$$

$$h = 4{,}136\ 10^{-15}\ eVs$$

Planck azt javasolta, hogy az oszcillátor csak ΔE nagyságú energia kvantumokat tudjon elnyelni vagy kibocsátani.

$$\Delta E = hf$$

A kvantált egyszerű harmonikus oszcillátor átlagenergiája:

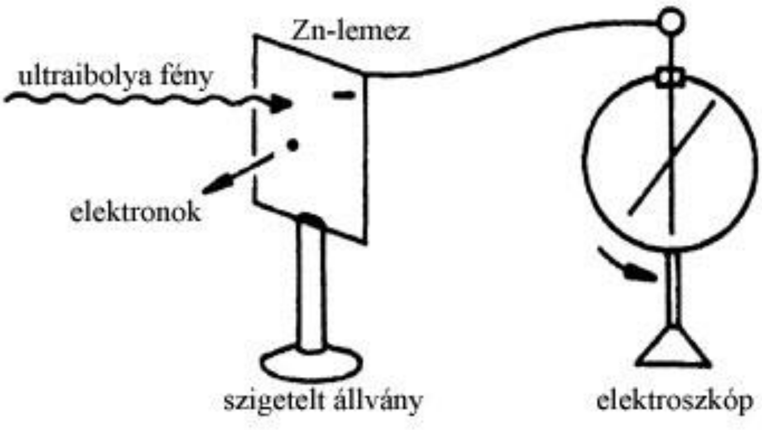
$$E = \frac{\left(h\frac{c}{\lambda}\right)}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kt}} - 1\right)}$$

Ha az oszcillátornak ennyi az átlagenergiája, akkor ennyi kell legyen az üregben kialakult állóhullámok átlagos energiája. Ezek alapján a Planck-féle sugárzási törvény:

$$du_\lambda = f(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi h v \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

Fényelektromos hatás

Először Hertz kísérletezett azzal, hogy a Maxwell-egyenletek által megjósolt elektromágneses hullámokat kimutassa.



A klasszikus hullámelmélet szerint a beeső fény elektromos erőtere energiát adhat át a fém felszínéhez közel levő elektronoknak, minek következtében az elektronok ki tudnak lépni. Ezek alapján, ha a fény intenzitását növeljük, akkor a kilépő fotoelektronok mozgási energiája is nőni fog. Azonban a tapasztalatok nem ezt igazolták.

Einstein azt feltételezte, hogy az f frekvenciájú sugárzás emissziója és abszorpciója mindig kvantumok formájában történik, aminek energiája:

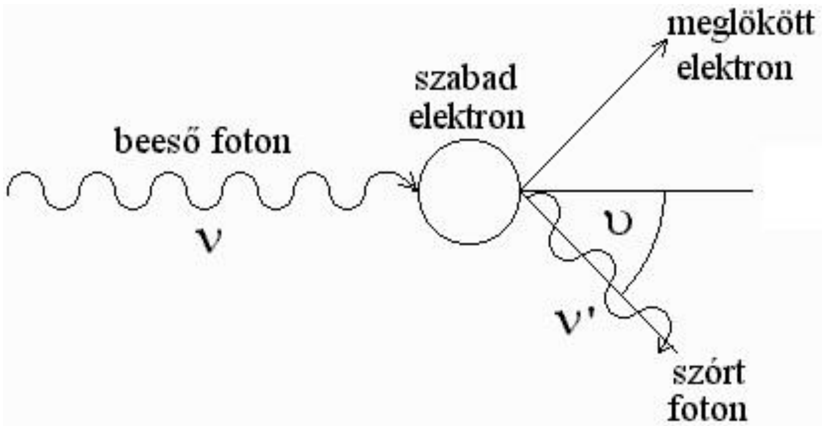
$$E = hf$$

Einstein érvelése szerint a folyamatban a fotont egyetlen elektron nyeli el. A fotonból nyert energia egy része a kilépési munkára fordítódik, míg a maradék, mozgási energia formájában jelenik meg. A kilépéshez szükséges minimális energia a W_0 kilépési munka.

$$hf = K_{max} + W_0$$

Compton-effektus

Compton vékony szénlapra monokromatikus röntgensugárnyalábot irányított és azt vette észre, hogy a lapról különböző szögekben szórt röntgensugarak λ' hullámhossza nagyobb, mint a beeső sugarak λ_0 hullámhossza.



Compton a fotonmodellel próbálta magyarázni a kísérleti eredményeit.

$$E = hf \text{ és } E = mc^2$$

Ha a két képletet összevetjük, akkor:

$$hf = mc^2$$

Amiből a foton impulzusa:

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$E^2 = c^2 p^2 + (mc^2)^2$$

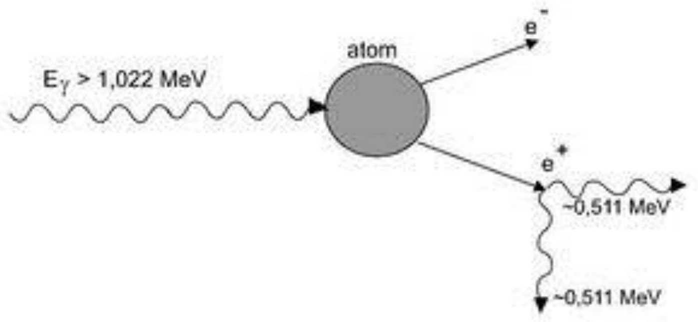
Azonban a tömeget tartalmazó tag nulla. A relativisztikus energia- és impulzus-megmaradási törvények alapján a hullámhosszeltolódás:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c \equiv h/mc \ = 0.00243\ nm$$

Párkeltés

A párkeltés egy kölcsönhatás, amiben a foton részecskeként viselkedik. Ha elegendő nagy energiájú foton atommag közelében halad el, a foton eltűnhet, és elektron-pozitron párt kelthet.



$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

A pár nyugalmi energiája:

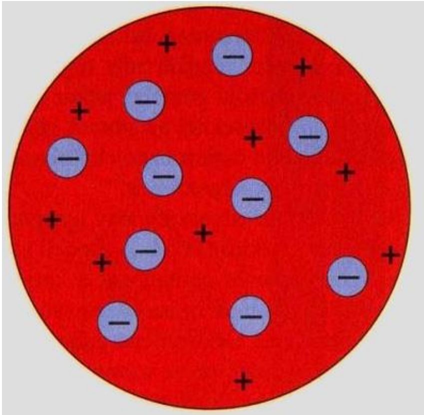
$$E_{nyug} = 2m_e c^2 = 1.022\ MeV$$

$$hf = 2m_e c^2 + K_1 + K_2$$

Azaz a fotonnak minimum ekkora energiával kell érkeznie. Ha ennél több energiával érkezik a foton, akkor az elektron és a pozitron mozgási energiáját növeli. Az elektromos töltés a reakció során megmarad, mivel a pár tagjainak töltése ellentétesen egyenlő.

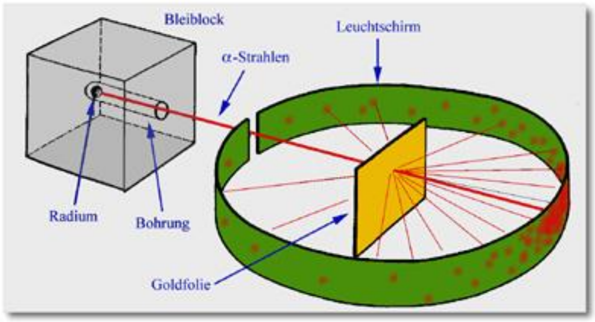
Részecskék hullámtermészete

Atommodellek



Thomson modell

Thomson szerint az atom tömegének nagy részét egy pozitív töltésű gömb tartalmazza, aminek a belsejében vannak a negatív töltések. Feltevése szerint az elektronok rezgéseket végeznek és így az adott frekvenciákon sugárzást bocsátanak ki. Azonban a színkép frekvenciák nem egyeztek a számított frekvenciákkal.



Rutherford modell

Rutherford alfa-sugarak szóródását tanulmányozta arany lemezen. Rutherford elmélete szerint a pozitív töltés az atom közepében, az atommagban helyezkedik el, ami maximum $10^{-14} m$ nagyságú lehet.

Bohr modell

Bohr modellje a Bohr-féle posztulátumokon alapszik, miszerint:

- Az elektron a proton körüli körpályán mozog, a klasszikus mechanika törvényei szerint
- Az elektronok csak bizonyos sugarú körpályákon mozoghatnak, és ezeken nem sugároznak. Ezeken a pályákon az energia állandó, az elektronok stacionárius állapotban vannak.
- Megengedett pályák azok, amiken az elektron impulzusnyomatéka a 2π-vel osztott Planck-állandó egész számú többszöröse:

  $$mvr = n\hbar$$

- A stacionárius állapotok között az elektron az egyik pályáról átugrik a másikra, és közben elektromágneses hullámot bocsát ki vagy nyel el. A két energiaállapot közötti különbség egyenlő a kibocsátott sugárzás energiakvantumával:

  $$hf = E_{vég} - E_{kezd}$$

Niels Bohr (1885-1962)

Korrespondencia elve

A klasszikus elektrodinamika szerint a körpályán mozgó elektron által kibocsátott sugárzás f_0 frekvenciája pont a keringési frekvenciára a következő formula adódik:

$$f_0 = \frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^3 n^3}$$

Bohr elmélete szerint:

$$hf = E_{vég} - E_{kezd}$$

Amiből:

$$hf = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

Igen nagy n esetén:

$$\lim_{n \gg 1}\left(\frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\right) = \frac{2}{n^3}$$

$$f \approx \frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^3 n^3}$$

A korrespondencia elve szerint minden új elméletnek arra a klasszikus elméletre kell redukálódnia, amely megfelel a klasszikus helyzetre illő körülményekre alkalmazva. Vagyis az új elméletnek speciális esetként tartalmaznia kell a régi elméletet.

A de Broglie-hullámok

de Broglie feltételezése szerint az elektromágneses sugárzás fotonjai $p = h/\lambda$ impulzussal rendelkeznek, de mivel részecske tulajdonságai is vannak az impulzusa mv ként is számolható. ennek következtében:

$$mv = h/\lambda$$

Azaz egy adott p impulzussal rendelkező részecske hullámhossza:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

De Broglie kimutatta, hogy ha az elektronoknak is megfeleltetünk anyaghullámokat, akkor az impulzusnyomatékra vonatkozó Bohr-féle kvantumfeltételre magyarázatot kapunk. Ez a magyarázat az elektron állóhullám alakzata. Ezek szerint a körpálya kerületén csak a hullámhossz egész számú többszöröse férhet el.

$$n\lambda = 2\pi r$$

$$\lambda = h/mv$$

$$mvr = n\left(\frac{h}{2\pi}\right)$$

Hullámmechanika

A nem relativisztikus részecskék mozgási energiája a p inpulzus segítségével a következő alakban írható fel:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

Ha U a potenciális energia, akkor a teljes energia:

$$E + K + U = \frac{p^2}{2m} + U$$

Ebből p-t kifejezve

$$p = \sqrt{2m(E - U)}$$

Ha ezt behelyettesítjük a de Broglie összefüggésbe:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$$

Felírva a tetszőleges mechanikai hullám leírására alkalmas, csak a térbeli változással foglalkozó hullámegyenletet:

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

λ értékét behelyettesítve megkapjuk az időtől független Schrödinger egyenletet:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2m(E-U)}{h^2}\right)\psi = 0$$

Ahol $\psi = \psi_{max} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

A határozatlansági elv

A kvantummechanika már nem olyan fizikai modellre épül, mint a korábbi elméletek. Nem adja meg egzaktul hol van az elektron vagy hogyan mozog, csak azt, hogyan becsülhető meg a tartózkodási helye egy adott tartományban, ha közben adott sebességgel halad. A Heisenberg féle határozatlansági elv kimondja, hogy egy részecske helyének és impulzusának egyidejű mérésekor a határozatlanságok szorzata nagyobb vagy olyan nagyságrendű, mint a ħ. Az anyag hullám-részecske kettőssége miatt maga a mérés megzavarja a rendszert, oly módon, hogy azt nem lehet elkerülni.

A komplementaritási elv

A bohr-féle komplementaritási elv szerint a kvantumos jelenségek körében a hullám és a részecske tulajdonságok egymást kiegészítik. Bár az egyik leírási mód eleve kizárja a másik egyidejű használatát, a teljes megértéshez mindkettőre szükség van.

Atomfizika

A Schrödinger-féle hullámegyenlet

Erwin Schrödinger
(1887-1961)

Az egydimenziós, időtől független Schrődinger egyenlet:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

Egy gyakoribb alakja:

$$\left(-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\psi = E\psi$$

Három dimenzióra kiterjesztve:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + U(x,y,z)\psi = E\psi$$

Ahol a potenciális energia:

$$U(x,y,z) = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{e^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Gömbi polárkoordinátákra áttérve:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right) + U(r)\psi = E\psi$$

A spin-pálya csatolás

A spektrumvonalak finomszerkezete két mágneses dipólusmomentum kölcsönhatására jön létre, az egyik az elektron spinjéből származik, míg a másik a pályamenti mozgásból. A két momentum kölcsönhatása a spin-pálya csatolás, vagy L-S csatolás.

A pálya mozgásából eredő $\underline{L}$ impulzusmomentum és az $\underline{S}$ spin-impulzusmomentum vektoriális összege adja a teljes impulzusmomentumot:

$$\underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$$

A $\underline{J}$ nagysága az $\underline{L}$-hez és $\underline{S}$-hez hasonlóan kvantált.

A Pauli-féle kizárási elv és az elemek periódusos rendszere

Az elektronok mindig a legalacsonyabb energiaállapotot igyekeznek elfoglalni. Azonban nem mindig a legalacsonyabb energiaállapotokat keresik, mivel akkor minden elektron az 1s állapotban lenne. Pauli megállapította a lehetséges energiaállapotok és az alapállapotok konfigurációja közötti kapcsolatot, a Pauli-elvet. A Pauli-féle kizárási elv kimondja, hogy egy atomban nem lehet két olyan elektron, amelynek mind a négy kvantumszáma azonos.

Az atom alapállapotú konfigurációjában az elektronok a lehető legalacsonyabb energiaállapotban helyezkednek el, de úgy, hogy közben nem sértik meg a Pauli-féle kizárási elvet.