

1. Egy hengerkondenzátor sugarai $r_1 = 3$ mm és $r_2 = 6$ mm, hossza $l = 6$ mm, a szigetelőanyag dielektromos állandója $\epsilon_r = 4$. A belső és a külső elektróda töltése egyaránt 0, ugyanakkor a szigetelőben $\rho = 3 \mu\text{C}/\text{m}^3$ sűrűségű, egyenletes eloszlású térfogati töltés van jelen. Határozza meg a kondenzátor feszültségét!

A IV. Maxwell egyenletet felírva:

$$\oint_{A(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon} \oint_V \rho \, dV$$

Mivel tudjuk, hogy hengerszimmetrikus az elrendezés és a kialakult tér, így:

$$E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{1}{\epsilon} \rho (r^2 - r_1^2) \cdot \pi \cdot l$$

Az egyenletet átrendezve a következőt kapjuk a térerősségre:

$$E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon} \frac{(r^2 - r_1^2)}{r} = \frac{\rho}{2\epsilon} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right)$$

A két elektróda feszültségét megkaphatjuk a térerősség r_1 - r_2 -ig vett integráljaként:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} E(r) \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{2\epsilon} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right) \, dr = \frac{\rho}{2\epsilon} \left[\frac{r^2}{2} - r_1^2 \cdot \ln(r) \right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left[\left(\frac{r_2^2}{2} - r_1^2 \cdot \ln(r_2) \right) - \left(\frac{r_1^2}{2} - r_1^2 \cdot \ln(r_1) \right) \right] = \underline{0,307 \text{ V}} \end{aligned}$$

2. Elektrosztatikus térben a P_1 pont potenciálja $\Phi_1 = -20$ V. Az elektromos térerősség vektorának vonalintegrálja a P_1 ponttól a P_2 pontig, az őket összekötő egyenes mentén: $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -30$ V. Adja meg a P_2 pont Φ_2 potenciálját!

Mivel egy referenciaponthoz képesti potenciál:

$$\Phi(r) = \Phi(r_0) - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Ha a P_1 pont potenciálját vesszük referenciának:

$$\Phi_2 = \Phi(r_1) - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -20 \text{ V} - (-30 \text{ V}) = \underline{10 \text{ V}}$$

3. A P pont környezetében az elektromos térerősség vektora derékszögű koordinátákban kifejezve: $\vec{E} = (30; 40; 0)$ kV/m. Az elektromos eltolás vektora: $\vec{D} = (0,84; 1,12; 0)$ As/m². Az elektromos tér energiasűrűsége ugyanebben a pontban $w_e = 0,07$ J/m³. Mit állíthatunk ez alapján a teret kitöltő közeg P pontbeli viselkedéséről?

Amennyiben lineáris a közegünk a következőképpen számolhatjuk az energiasűrűséget:

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2$$

A feladatban megadott E és D alapján a következőt kapjuk az energiasűrűsége:

$$w_e = \frac{1}{2} 50 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \cdot 1,4 \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = 0,035 \text{ J}$$

Vagy másféleképpen: kiszámolhatjuk az elméleti permittivitást (mennyi lenne, ha tényleg lineáris lenne az anyag):

$$\varepsilon_x = \frac{D_x}{E_x} = 2,8 \cdot 10^{-11} \frac{As}{Vm} \quad \varepsilon_y = \frac{D_y}{E_y} = 2,8 \cdot 10^{-11} \frac{As}{Vm}$$

Ebből pedig számolhatjuk az energiasűrűséget:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 10^{-11} \frac{As}{Vm} \cdot \left(50 \frac{kV}{m}\right)^2 = 0,035 J$$

Látható, hogy nem a feladatban megadott értéket kapjuk, tehát nemlineáris az anyag.

4. Két légmagos tekercs egymáshoz közel helyezkedik el. Ha áramaik $I_1 = 2 A$ és $I_2 = 0$, akkor fluxusaik rendre $\Psi_1 = 2,5 Wb$ ill. $\Psi_2 = 0,6 Wb$. Mekkora lehet Ψ_1 fluxus, ha $I_1 = 0$ és $I_2 = 0,5 A$?

Definíció szerint tudjuk, hogy:

$$L_{12} = \frac{\psi_1}{I_2}, \quad \text{ha } I_1 = 0 \quad \text{és} \quad L_{12} = L_{21} = M$$

Így tehát:

$$M = \frac{\psi_2}{I_1} = 0,3 H$$

Ebből pedig számolhatjuk Ψ_1 -t $I_2 = 0,5 A$ esetén:

$$\psi_1 = M \cdot I_2 = \underline{0,15 Wb}$$

5. A $0,1 S/m$ fajlagos vezetőképességű talajban $h = 5 m$ mélyen egy $r_1 = 20 cm$ sugarú fém földelögömb van. Mekkora a földfelszínen, a gömb feletti pontban a potenciál (a végtelen távoli, 0 potenciálú ponthoz képest), ha a földelő árama $100 A$?

Az gömb kis sugara miatt és mivel úgyse a gömb belsejében érdekel minket a potenciál, vehetjük az pontszerű áramforrásnak a gömböt és ekkor a következő árameloszlást írhatjuk fel:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} = \frac{I}{4r^2\pi}$$

A differenciális Ohm törvényből:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{4r^2\pi\sigma}$$

Ebből a potenciált a következőképpen írhatjuk fel:

$$\Phi(r) = \Phi(\infty) - \int_{\infty}^r \mathbf{E} dr = - \int_{\infty}^r \frac{I}{4r^2\pi\sigma} dr = \frac{I}{4r\pi\sigma}$$

Mivel a levegő nem vezeti az áramot, így ezt is figyelembe kell vennünk, mely megtehető a tükrözéssel. Tehát felveszünk a földfelszínre tükrözve még egy pontszerű áramforrás szintén I árammal. Ekkor a potenciál a földfelszínen a földelögömb felett az eredeti és a fiktív áramforrás szuperpozíciója lesz. Tehát:

$$\Phi = \frac{I}{4h\pi\sigma} + \frac{I}{4h\pi\sigma} = \frac{I}{2h\pi\sigma} = \underline{31,83 V}$$

6. Egy 4 m hosszú, 75 Ω hullámimpedanciájú, ideálisnak tekinthető távvezeték 10 Ω belső ellenállású szinuszos generátor táplál. A távvezetéken a hullámhossz 2,5 m az adott frekvencián. Mekkora impedanciával kell lezárni a távvezeték a másik végén, hogy az a lehető legnagyobb hatásos teljesítményt vegye fel?

Ahhoz hogy a lehető legnagyobb legyen a felvett hatásos teljesítmény, úgy kell lezárni a távvezeték, hogy ne legyen reflexió. Ezt úgy lehet megvalósítani, hogy illesztjük a lezárást, tehát a lezárás vége felől a dezaktivizált hálózat bemeneti impedanciájának konjugáltjával egyenértékű lezárásra van szükségünk.

Bemeneti impedancia számítása ideális távvezeték esetén:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l)}$$

Ehhez azonban szükségünk van a β -ra, amit a következőképpen kaphatunk meg:

$$\text{Mivel } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Tehát:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l)} = 75 \cdot \frac{10 + j \cdot 75 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{2,5} \cdot 4\right)}{75 + j \cdot 10 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{2,5} \cdot 4\right)} = (15,14 + j53,02) \Omega$$

$$Z_2 = Z_{be}^* = \underline{(15,14 - j53,02) \Omega}$$

7. Ha egy 75 Ω hullámimpedanciájú, szinuszos forrással táplált ideális távvezeték $R_2 = 50 \Omega$ ellenállással zárunk le, akkor a távvezeték mentén a feszültség maximális amplitúdója 12 V. Mekkora értékre csökkenthető ez a maximum pusztán az R_2 ellenállás változtatásával, ha a forrás által betáplált hatásos teljesítmény állandó? (megj.: a távvezeték a hullámhossznál hosszabb)

Kezdjük a (forrás által) betáplált teljesítmény kiszámolásával. Tudjuk, hogy:

$$P_{be} = P^+ - P^- = \frac{1}{2Z_0} (|U_2^+|^2 - |U_2^-|^2)$$

Ehhez szükségünk van U_2^+ -ra és U_2^- -ra, de ismerjük az impedanciákat, így:

$$r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -0,2$$

$$U_{max} = U_2^+ (1 + |r|) \quad \rightarrow \quad U_2^+ = \frac{U_{max}}{(1 + |r|)} = 10 \text{ V} \quad \rightarrow \quad U_2^- = r \cdot U_2^+ = -2 \text{ V}$$

Ebből tehát már számolhatjuk a teljesítményt:

$$P_{be} = \frac{1}{2Z_0} (|U_2^+|^2 - |U_2^-|^2) = 0,64 \text{ V}$$

A maximális amplitúdó akkor lesz a legkisebb, ha a lezáráson nincsen reflexió ($r = 0$), ekkor $U_2^- = 0$, amit úgy tudunk elérni, hogy $Z_0 = Z_2$. Tehát a teljesítmény képletét átrendezve:

$$\text{Mivel } U_2^- = 0, \text{ ezért: } P_{be} = \frac{1}{2Z_0} (|U_2^+|^2) \quad \rightarrow \quad |U_2^+| = \sqrt{2Z_0 P_{be}} = 9,79 \text{ V}$$

$$\text{Ekkor mivel } r = 0, \quad U_{max} = U_2^+ (1 + |r|) = \underline{9,79 \text{ V}}$$

8. Levegőben terjedő, lineárisan polarizált síkhullámban az elektromos térerősség hely-, és időfüggvénye $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}_y \cdot 20 \text{ V/m} \cdot \cos(2\pi ft + \beta x)$, amelyben a frekvencia $f = 100 \text{ MHz}$. Adja meg a mágneses térerősség vektorát a $(2\text{m}; 3\text{m}; -1\text{m})$ koordinátájú pontban a $t = 0$ pillanatban.

E függvényéből láthatjuk, hogy x irányba terjed és y irányba mutat, ebből tehát felírhatjuk H időfüggvényét:

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = -\mathbf{e}_x \frac{E_0}{Z_0} \cos(2\pi ft + \beta x)$$

Ehhez szükségünk van β -ra, amit a következőképpen számolhatunk:

$$\text{Mivel } v = \frac{\omega}{\beta} \text{ és jelen esetben } v \text{ a fénysebesség, így: } \beta = \frac{2\pi f}{c} = 2,0958 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$Z_0 = \eta = 377 \Omega$$

Így a felírt egyenletbe behelyettesítve:

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = -\mathbf{e}_x \frac{20 \frac{\text{V}}{\text{m}}}{377 \Omega} \cos\left(2\pi \cdot 100 \text{ MHz} \cdot 0 + 2,0958 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \cdot 2\right) = \underline{\underline{\mathbf{e}_x \cdot 26,4 \frac{\text{mA}}{\text{m}}}}$$

9. Levegőből érkező, lineárisan polarizált síkhullám merőlegesen esik az ideális vezető közeg sík határfelületére. A beeső hullám elektromos térerősségének amplitúdója 53 V/m . Határozza meg a vezető anyag határán folyó felületi áramsűrűség amplitúdóját.

Az anyaghatárra a következő folytonossági egyenleteket írhatjuk fel ($z = 0$ a közegethatár):

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$H_{2t} = H_{1t} + K$$

A két közegben a hullám terjedése:

$$E_1(z) = E_1^+ e^{-\gamma z} + r E_1^+ e^{\gamma z}$$

$$H_1(z) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - r \frac{E_1^+}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$E_2(z) = E_2^+ e^{-\gamma z}$$

$$H_2(z) = \frac{E_2^+}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

A két anyag hullámimpedanciája és terjedési együtthatója (1-es anyag a levegő, 2-es a vezető):

$$Z_{01} = \eta = 377 \Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad \text{Mivel } \sigma \rightarrow \infty, \text{ ezért } Z_{02} \rightarrow 0$$

$$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad \text{Mivel } \sigma \rightarrow \infty, \text{ ezért } \gamma_2 \rightarrow \infty$$

Így a reflexió tényező:

$$r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = -1$$

Mivel a 2-es közeg terjedési együtthatója végtelen, így ott:

$$E_2(z) = E_2^+ e^{-\gamma z} \rightarrow 0$$

$$H_2(z) = \frac{E_2^+}{Z_0} e^{-\gamma z} \rightarrow 0$$

Az 1-es közeg egyenleteibe a reflexiós tényezőt beírva a következőt kapjuk az anyaghatárra ($z = 0$):

$$E_1(0) = E_1^+ + rE_1^+ = 0$$

$$H_1(0) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma \cdot 0} - r \frac{E_1^+}{Z_0} e^{\gamma \cdot 0} = \frac{2E_1^+}{Z_0}$$

Mivel a feladat megadta a beeső hullám amplitúdóját és tudjuk, hogy a 2-es közegben $H_2 = 0$, így:

$$H_1(0) = \frac{2E_1^+}{Z_0} = 0,2811 \frac{A}{m}$$

A folytonossági egyenletből: $H_{2t} = H_{1t} + K \rightarrow H_{2t} = K$

$$K = \underline{\underline{281,1 \frac{mA}{m}}}$$

10. Egy antenna irányhatása decibelben kifejezve $D_{dB} = 10 \cdot \log_{10}(D) = 3,52 \text{ dB}$. Az antenna által kisugárzott hatásos teljesítmény 2 kW. Legfeljebb mekkora lehet az elektromos térerősség amplitúdója az antennától 500 m távolságban? (távoltér)

A teljesítménysűrűség 500 m távolságban:

$$D = \frac{S_{max}}{\frac{P_s}{4r^2\pi}} \rightarrow S_{max} = D \cdot \frac{P_s}{4r^2\pi}$$

Mivel $D = 10^{\frac{D_{dB}}{10}} = 2,249$ így: $S_{max} = 1,432 \frac{mW}{m^2}$

Szabadtéri hullámterjedéssel számolva:

$$Z_0 = \eta = 377 \Omega$$

Mivel $H = \frac{E}{Z_0}$ és $\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{H}^*$ így:

$$E_{max} = \sqrt{2 \cdot S_{max} Z_0} = \underline{\underline{1,039 \frac{V}{m}}}$$