Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. május 6.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletekért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenlet összes komplex megoldását!

$$i \cdot \left(z^2 + \overline{z}\right) + \frac{3i+6}{2-4i} = 0$$

* * * * *

$\dfrac{3i+6}{2-4i} = \dfrac{(3i+6)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \dfrac{30i}{20} = \dfrac{3}{2}i.$ (1 pont)

Ezt beírva és átrendezve: $z^2 + \overline{z} = -\frac{3}{2}$. (1 pont)

Legyen $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. (1 pont)

Ekkor $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ és $\overline{z} = a - bi$, így $z^2 + \overline{z} = (a^2 - b^2 + a) + (2ab - b)i$. (2 pont)

Így az egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $a^2 - b^2 + a = -\frac{3}{2}$ és $(2a - 1)b = 0$. (1 pont)

Utóbbiból $b = 0$ vagy $a = \frac{1}{2}$ következik. Az első esetben az első egyenletből $a^2 + a + \frac{3}{2} = 0$ adódik, de ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Így $a = \frac{1}{2}$, amiből az első egyenlet miatt $b^2 = \frac{9}{4}$, vagyis $b = \pm\frac{3}{2}$ adódik. (2 pont)

Ezért az egyenlet két megoldása: $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ és $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. (2 pont)

2. Megválasztható-e a c paraméter értéke úgy, hogy az $x + 3y + c \cdot z = 22$ egyenletű sík merőleges legyen a $P(1; 3; -1)$ és a $Q(3; 9; 3)$ pontokat összekötő egyenesre?

* * * * *

A sík pontosan akkor merőleges a PQ egyenesre, ha egy $\underline{n}$ normálvektora párhuzamos $\overrightarrow{PQ}$-val, (2 pont)

azaz $\overrightarrow{PQ} = \lambda\underline{n}$ alkalmas λ-ra. (2 pont)

$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (2, 6, 4)$ (ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ az origóból a P-be, illetve Q-ba mutató helyvektor) (2 pont)

és a sík egy normálvektora $\underline{n} = (1, 3, c)$. (1 pont)

Ebből látszik, hogy $\overrightarrow{PQ} = \lambda\underline{n}$ teljesül ($\lambda = 2$ és) $c = 2$ esetén. (3 pont)

3. Legyen $V=\mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v}\in V$ és $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda\odot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot x\\y\end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

* * * * *

Például a $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ és $\lambda=\mu=1$ választással $(\lambda+\mu)\odot\underline{v}=2\odot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ és
$\lambda\odot\underline{v}\oplus\mu\odot\underline{v}=1\odot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\oplus1\odot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. (5 pont)

Ez azt jelenti, hogy nem teljesül a vektortér definíciójában szereplő $(\lambda+\mu)\odot\underline{v}=\lambda\odot\underline{v}\oplus\mu\odot\underline{v}$ axióma, így V **nem** vektortér az $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel. (5 pont)

A vektortér definícójában szereplő összes többi axióma teljesül a feladatbeli V, $\oplus$ és $\odot$ esetén. Bár ezek ellenőrzése közvetlenül nem visz közelebb a feladat megoldásához, mégis, a maradék hét axióma helyes leellenőrzéséért legföljebb 3 pont adható. (Ez a pontszám tehát *nem* az axiómák felsorolásáért jár, ez önmagában az útmutató elején írtaknak megfelelően nem ér pontot.)

4. Döntsük el, hogy az alábbi $\underline{v},\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\in\mathbb{R}^3$ vektorokra igaz-e a $\underline{v}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\rangle$ állítás!

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}3\\-1\\16\end{pmatrix},\ \underline{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\\3\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}6\\-10\\6\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}-3\\7\\2\end{pmatrix}\text{ és }\underline{d}=\begin{pmatrix}3\\-11\\-12\end{pmatrix}$$

* * * * *

$\underline{v}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\rangle$ definíció szerint azt jelenti, hogy léteznek olyan α, β, γ és δ valós együtthatók, amelyekre $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}+\delta\underline{d}=\underline{v}$. (2 pont)

Beírva a feladatbeli vektorokat és elvégezve a műveleteket:

$$\begin{pmatrix}3\alpha+6\beta-3\gamma+3\delta\\-5\alpha-10\beta+7\gamma-11\delta\\3\alpha+6\beta+2\gamma-12\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\16\end{pmatrix}.\qquad\text{(2 pont)}$$

Ez tehát egy 4 változós, 3 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer, (1 pont)
amelyet például a Gauss-eliminációval oldhatunk meg:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}3&6&-3&3&3\\-5&-10&7&-11&-1\\3&6&2&-12&16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-1&1&1\\0&0&2&-6&4\\0&0&5&-15&13\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-1&1&1\\0&0&1&-3&2\\0&0&0&0&3\end{array}\right)\qquad\text{(3 pont)}$$

Tilos sor keletkezett, így az egyenletrendszer nem megoldható, vagyis $\underline{v}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\rangle$ nem igaz. (2 pont)

5. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. Legyen továbbá a t valós paraméter minden értékére $\underline{a}=\underline{u}+\underline{v}-t\cdot\underline{w}$, $\underline{b}=\underline{u}+t\cdot\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{c}=t\cdot\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}$ és $\underline{d}=-\underline{u}+t\cdot\underline{v}+t\cdot\underline{w}$. A t paraméter milyen értékeire lesznek az $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorok lineárisan függetlenek?

* * * * *

Legyen $W=\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$. (1 pont)
W-ben $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ definíció szerint generátorrendszert alkot. (2 pont)
Szintén definíció szerint $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\in W$ is igaz (tetszőleges t-re). (2 pont)
Ismert tétel, hogy minden vektortérben minden lineárisan független rendszer legföljebb akkora elemszámú, mint bármely generátorrendszer. Így mivel W-ben van 3 elemű generátorrendszer, ezért nem lehet benne 4 elemű lineárisan független rendszer. Tehát $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ semmilyen t-re sem lineárisan független. (5 pont)

6. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 10 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 17 & 12 \\ -2 & -1 & 20 & 3 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A Gauss-elimináció lépéseit alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 10 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 17 & 12 \\ -2 & -1 & 20 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & 5 & 19 & 2 \\ 0 & 3 & 18 & 13 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 19 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot 9 \cdot 3 = 108.$$

A 10 ponthoz képest minden számolási hiba 1 pont levonást jelent. (Ha valaki nem veszi figyelembe, hogy a sorok skalárral szorzása a determináns értékét változtatja – és így például a fenti számolást követve eredménynek 3-at adna meg – az nem számolási, hanem elvi hiba; az ilyen, egyébként hibátlan számolás sem érhet többet 4 pontnál.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2-3 pontot érhet. Természetesen a kifejtési tételen alapuló (helyes) számolás is elfogadható (de például a Sarrus-szabály indoklás nélküli alkalmazása nem – ez ugyanis előadáson nem szerepelt).

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot!

* * * * *

a) Az A mátrix i-edik sora $\begin{pmatrix} x & 9-x & y & 9-y \end{pmatrix}$, a B mátrix j-edik oszlopa $\begin{pmatrix} z+1 & z+1 & -z & -z \end{pmatrix}^T$ alakú minden $1 \leq i, j \leq 4$ esetén. (4 pont)
Ezért az $A \cdot B$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem: $x(z+1) + (9-x)(z+1) - yz - (9-y)z = 9(z+1) - 9z = 9$. (5 pont)
Ezért $A \cdot B$ az a 4×4-es mátrix, melynek minden eleme 9. (1 pont)
Az indoklást nem szükséges a fenti részletességgel leírni; világosan kell látszania a megoldásból, hogy a megoldó tisztában van a mátrixszorzással és látja, hogy az adott esetben miért ez az eredmény.

2. Legyen A és B az **1**. feladatbeli két mátrix. Legyen továbbá C olyan (4×4)-es mátrix, melyre $A \cdot C = B \cdot C$ teljesül. Határozzuk meg C determinánsát!

* * * * *

Állítjuk, hogy $\det C = 0$. Indirekt tegyük fel, hogy $\det C \neq 0$. (1 pont)
Ekkor (a tanult tétel szerint) létezik a C^{-1} mátrix. (3 pont)
Az $A \cdot C = B \cdot C$ egyenletet jobbról C^{-1}-zel szorozva (és az asszociativitást, az inverz definícióját és az egységmátrix tulajdonságát használva): $A \cdot (C \cdot C^{-1}) = B \cdot (C \cdot C^{-1})$, $A \cdot E = B \cdot E$, $A = B$. (5 pont)
Mivel az $A = B$ állítás nyilvánvalóan hamis, $\det C = 0$ valóban következik. (1 pont)

3. Határozzuk meg az **1**. feladatbeli A mátrix rangját, $\mathrm{r}(A)$-t.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A Gauss-elimináció lépéseit alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & -18 & -2 & -16 \\ 0 & -36 & -4 & -32 \\ 0 & -54 & -6 & -48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1/9 & 8/9 \end{pmatrix} \qquad (5 \text{ pont})$$

Így $\mathrm{r}(A) = 2$, hiszen a kapott lépcsős alakban ennyi a vezéregyesek száma. (5 pont)
A lényegtelen számolási hibákért 1-1 pont levonás jár.

4. Legyen A és B $m \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(2 \cdot A + 3 \cdot B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$$

(ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Legyen W az az $\mathbb{R}^m$-beli altér, amit A és B oszlopai együttesen generálnak. (2 pont)
Legyen $k = \mathrm{r}(A)$ és A oszlopai közül k lineárisan független: $a_1, \dots a_k$. Hasonlóan, legyen $l = \mathrm{r}(B)$ és B oszlopai közül l lineárisan független: $b_1, \dots b_l$. (1 pont)
Ekkor A többi oszlopa már kifejezhető az $a_1, \dots a_k$ vektorokból lineáris kombinációval és ugyanez mondható el B-ről és a $b_1, \dots b_l$ vektorokról is. (1 pont)
Így minden W-beli vektor kifejezhető már az $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ vektorokból is lineáris kombinációval, azaz $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\}$ generátorrendszer W-ben. (2 pont)
Így W-ben minden lineárisan független rendszer elemszáma legföljebb $k+l$ (a tanult tétel szerint).(2 pont)
A $2A+3B$ mátrix minden oszlopa W-beli, hiszen egy A és egy B-beli oszlop lineáris kombinációja.(1 pont)
Ezért a $2A + 3B$ mátrix oszlopai közül sem lehet $k + l$-nél több lineárisan függetlent választani, vagyis $\mathrm{r}(2A + 3B) \leq k + l = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$ valóban igaz. (1 pont)

5. A Kenó játékban az $1, 2, 3, \dots, 80$ számok közül sorsolnak ki 20 különbözőt. Hányféle lehet a sorsolás eredménye, ha tudjuk, hogy a 20 nyerőszám közül 5 darab esik az $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$, 5 darab a $\{21, 22, \dots, 40\}$, szintén 5 darab a $\{41, 42, \dots, 60\}$ és ugyancsak 5 darab a $\{61, 62, \dots, 80\}$ halmazba?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az $\{1, \dots, 20\}$ halmazba eső 5 szám $\binom{20}{5}$-féleképpen választható ki („ismétlés nélküli kombináció").(3 pont)
Ugyanennyi a lehetőségek száma a másik három esetben is. (1 pont)
Mivel az első 5 szám kiválasztására vonatkozó $\binom{20}{5}$ lehetőség mindegyike $\binom{20}{5}$-féleképpen folytatható a következő 5 szám kiválasztásakor, ezért a 10 legkisebb szám kiválasztására már $\binom{20}{5}^2$ lehetőség van.(3 pont)
A gondolatmenenet ugyanígy folytatva adódik, hogy az összes lehetőségek száma $\binom{20}{5}^4$. (3 pont)
(A pontozás tehát úgy értendő, hogy aki a *hibás* $4 \cdot \binom{20}{5}$ eredményt adja, az legföljebb 4 pontot kaphat.)

6. Legyen V a térvektorok, W a síkvektorok szokásos vektortere. V-ben a B bázis álljon a $\underline{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$ és $\underline{b}_3 = (0, 1, 1)$ vektorokból. Az $\mathcal{A} : V \mapsto W$ lineáris leképezés a $\underline{v} = (x, y, z) \in V$ vektorhoz az $(x + y, y + z)$ vektort rendelje minden $\underline{v} \in V$ esetén. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis és egy W-beli (ismeretlen) C bázis szerint legyen a jobb oldalon látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A W-beli C bázis nyilván 2 elemű, álljon a $\underline{c}_1$ és $\underline{c}_2$ vektorokból. (1 pont)
A leképezés mátrixának definíciója szerint $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = 1 \cdot \underline{c}_1 + 0 \cdot \underline{c}_2 = \underline{c}_1$, $\mathcal{A}(\underline{b}_2) = 0 \cdot \underline{c}_1 + 1 \cdot \underline{c}_2 = \underline{c}_2$ és $\mathcal{A}(\underline{b}_3) = p \cdot \underline{c}_1 + q \cdot \underline{c}_2$. (3 pont)
Másrészt az $\mathcal{A}$-ra adott hozzárendelési szabályból $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = (2, 1)$, $\mathcal{A}(\underline{b}_2) = (1, 1)$ és $\mathcal{A}(\underline{b}_3) = (1, 2)$.(1 pont)
Így tehát $\underline{c}_1 = (2, 1)$, $\underline{c}_2 = (1, 1)$ (2 pont)
és p és q értéke könnyen megkapható a $p \cdot (2, 1) + q \cdot (1, 1) = (1, 2)$ egyenletből adódó (2 pont)
$2p + q = 1$, $p + q = 2$ egyenletrendszer megoldásával: $p = -1$, $q = 3$. (1 pont)