# A vállalati döntések modellezése

Profitmaximalizálás

# Profit függvény általánosan

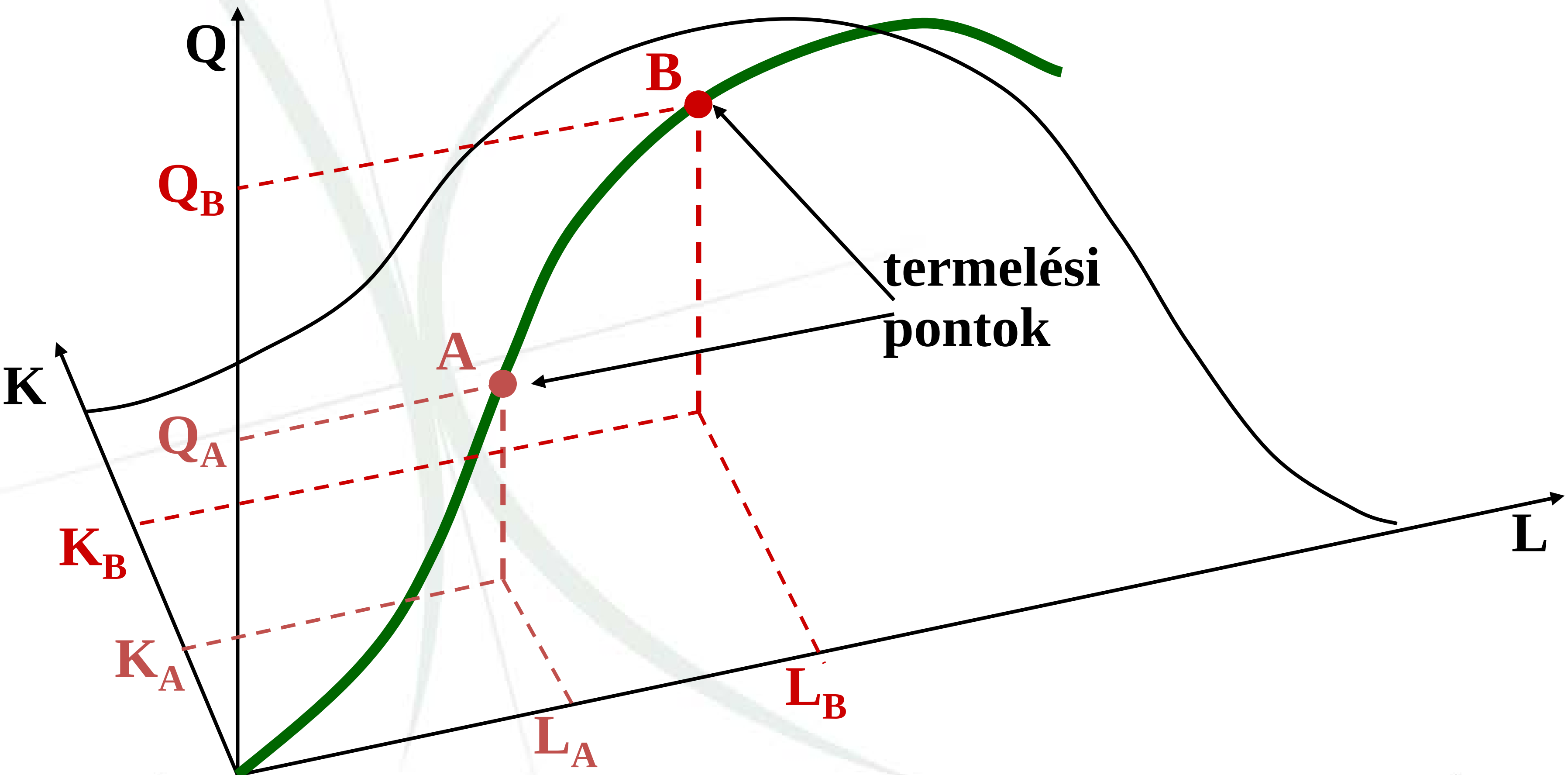
- $\prod$=TR-TC
- TR=QP – a piaci forma határozza meg
- TC – a technológia és a termelési tényezők ára határozza meg
- A technológiát a termelési függvény mutatja

# Termelési tényezők

- **Munka (L**abour**)**
- **Tőke (**Capital – **K)**
- **+**
- **Természeti tényezők (**l**A**nd**)**
- **Vállalkozói szolgáltatás (E**nterpreneur**)**

# A termelési függvény

## Két input esetén: Q=f(K,L)



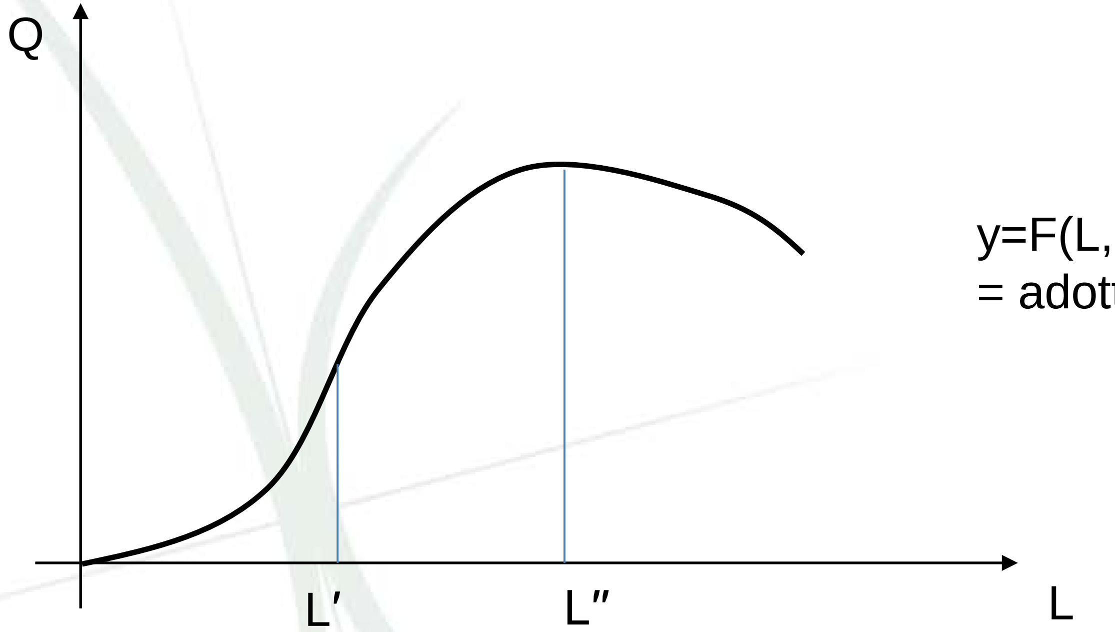
# A termelési függvény

- **Adott technológia mellett mutatja az output függését az inputoktól**
- Természetes mértékegységben
- **„Hosszú táv”= minden input változhat**
- **Fő kérdés az optimális üzemméret**

# Gazdasági időtávok

- Nagyon rövid táv (piaci)
- Rövid táv: egyes tényezők változatlanok, mások változnak (= fix és változó tényezők)
- Hosszú táv: minden tényező változik
- Nagyon hosszú táv: a technológia is változik → új termelési függvény

# Parciális (rövidtávú) termelési függvény = adott üzemméret (kapacitás kihasználás)




$y=F(L,K_0)$, K rögzített $K_0$ értéken = adott üzemnagyság

Ha $0 \leq L \leq L'$, akkor a munkaráfordítás növelésével a termelés növekvő ütembe nő, ha $L' \leq L \leq L''$ csökkenő ütemben nő; Ha $L'' < L$, akkor már csökken.

A termelési függvény meredeksége: **határtermék, határtermelékenység**

# Határtermék, határtermelékenység

- Jele $MP_L$ az az összterméknövekmény, amely egy újabb munkaegység bevonásával keletkezik, a termelési függvény meredeksége
- Matematikailag meghatározható a termelési függvény munka szerinti első deriváltjával, azaz: $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L}$
- Valójában a hozadéki szférákat határolja el
- (**Arányváltozási** hozadék)

# A termelés átlag- és határterméke (termelékenysége)

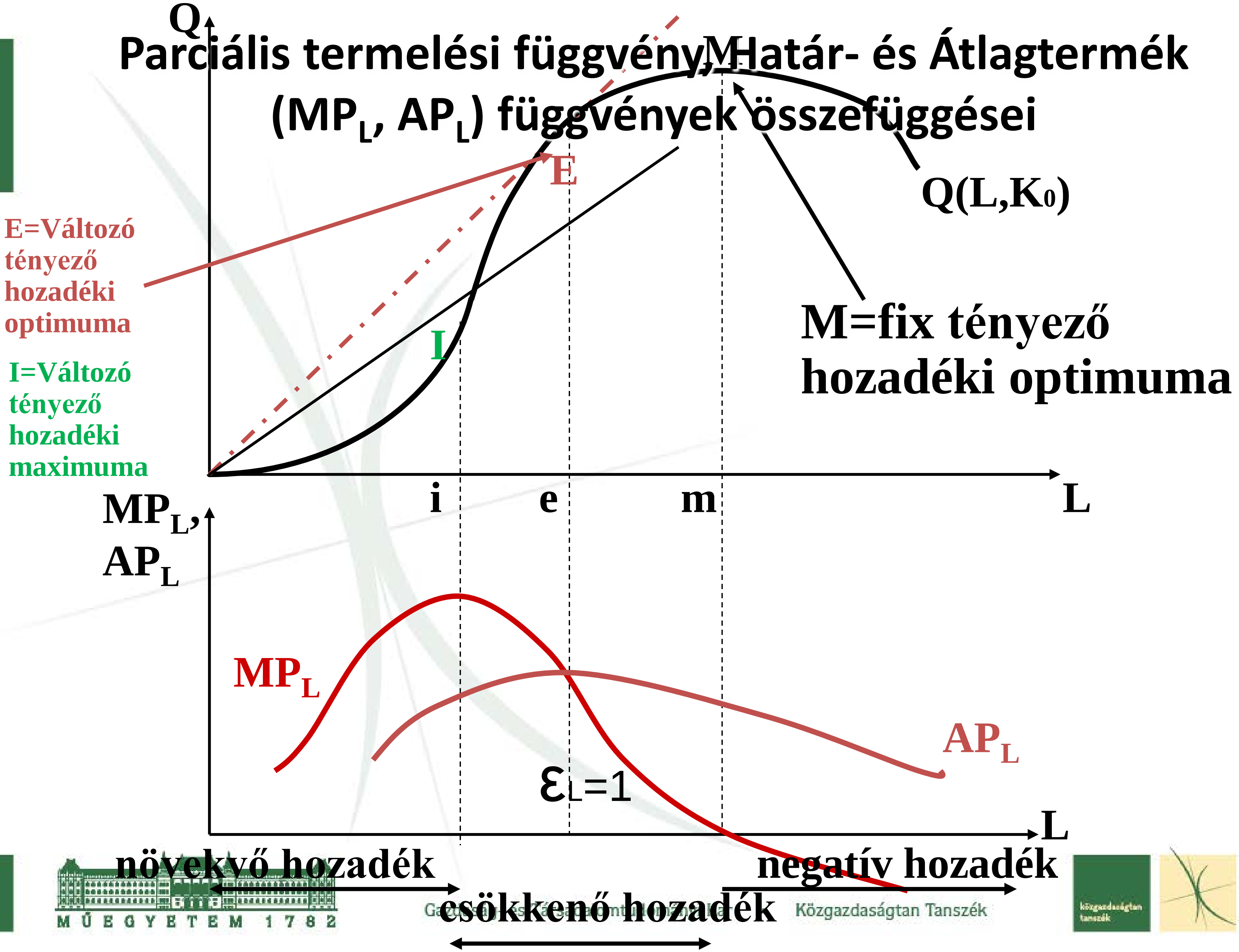
- Egy termelési tényező (munka) határterméke ($MP_L=dQ/dL$)
- Egy termelési tényező (munka) átlagterméke

  ($AP_L= Q/L$)
- Tényező parciális termelési rugalmassága

  ($\varepsilon_L=MP_L/AP_L$)

$$\varepsilon_L=\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}}=\frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{Q}{L}}$$

# Parciális termelési függvény, Határ- és Átlagtermék ($MP_L$, $AP_L$) függvények összefüggései



# $MP_L$ maximumában metszi $AP_{L}$–t

# Bizonyítás (általánosan)

- $Y = f(x)$, $\frac{f(x)}{x}$ szélsőértéke, ahol
- $\left(\frac{f(x)}{X}\right)'$=0, $\frac{f'(X)x - f(x)}{x^2} = 0$
- $f'$(x)x=f(x), $\frac{f(x)}{x}$=$f'$(x)

# Újra hosszú táv

- A termelési tényezők együttes (arányos) változása hogyan hat a termelésre
- Skálahozadék, mérethozadék, volumenhozadék
- Az üzemméret megválasztása!

# Homogén termelési függvények

- Ha a tényezők λ-szorosára nőnek Q hogyan változik
- Ha $f(\lambda K, \lambda L)$ akkor: $Q\lambda^r$ , r=?, ahol r a homogenitás foka

r>1, növekvő hozadék, pl.: $Q=L^2*K$

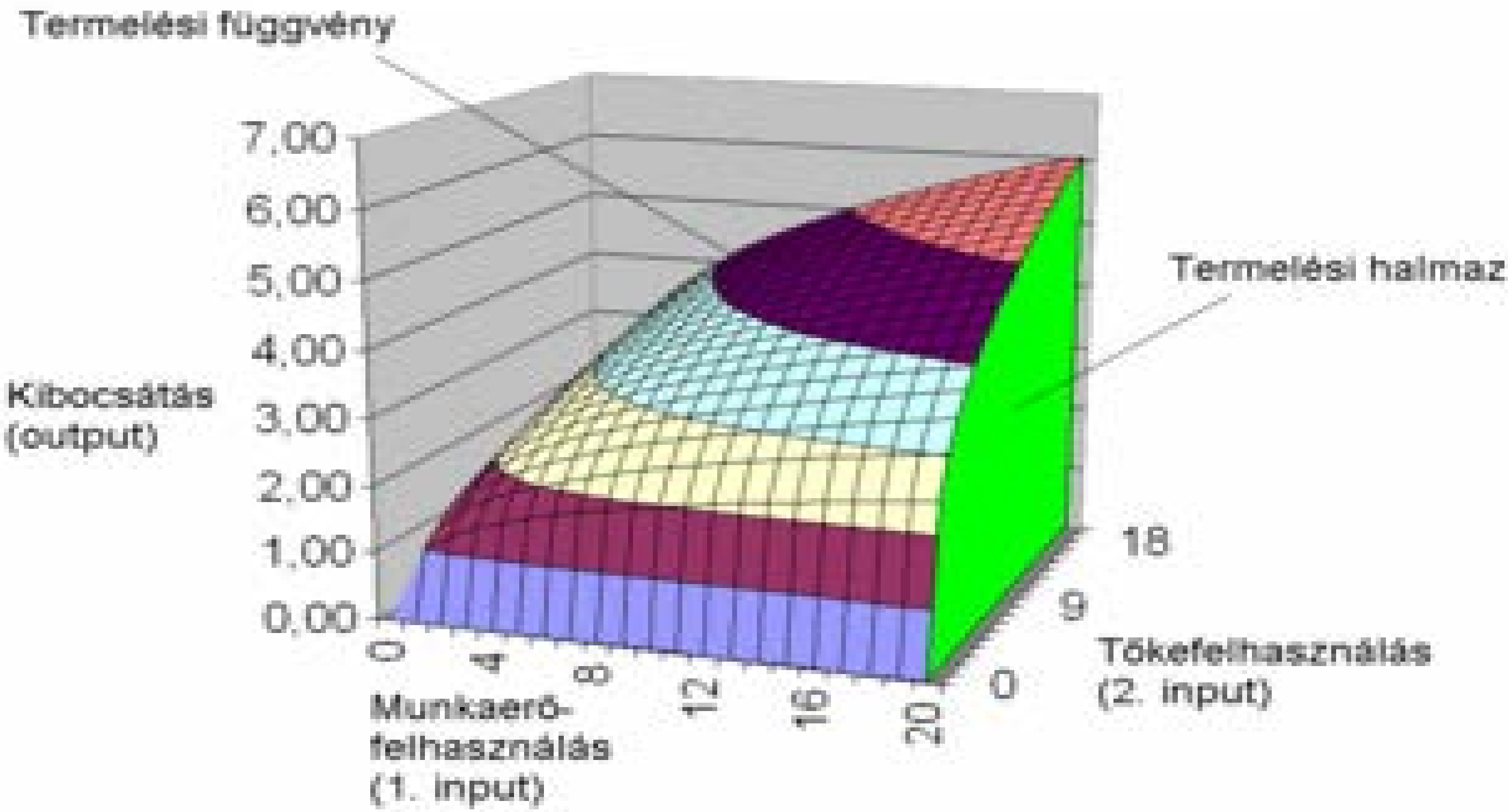
r=1, állandó hozadék, pl.: $Q=(L*K)^{1/2}$

r<1, csökkenő hozadék, pl.: $Q=(L*K)^{1/4}$

# Cobb-Douglash- típusú termelési függvény

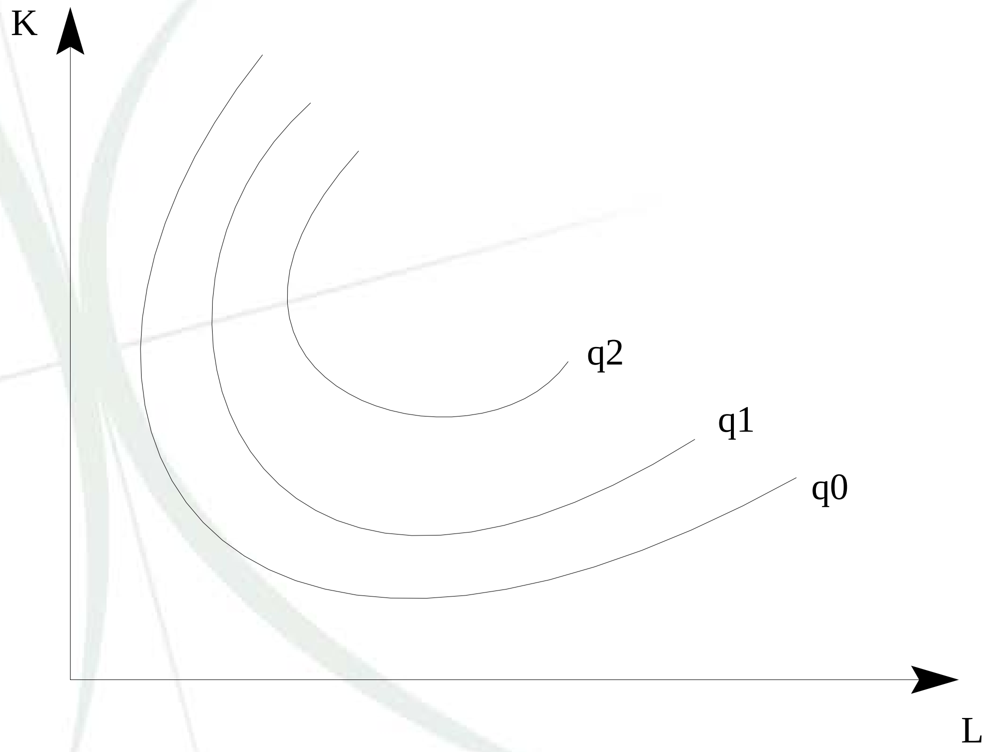
- Q=A$K^{\alpha}L^{\beta}$, $\alpha$+ $\beta$=r
- Q=A$(\lambda K)^{\alpha}(\lambda)^{\beta} = \lambda^{(\alpha+\beta)}$A$K^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{(\alpha+\beta)}$Q
- r a homogenitás foka
- Nem Cobb-Douglash-típusú, de homogén pl.
- Q=5$K^{2}$+3KL+4$L^{2}$
- Nem homogén pl.
- Q=5$K^{3}$+3KL+4$L^{2}$

# Az isoquantok levezetés a termelési



# Újra hosszú táv

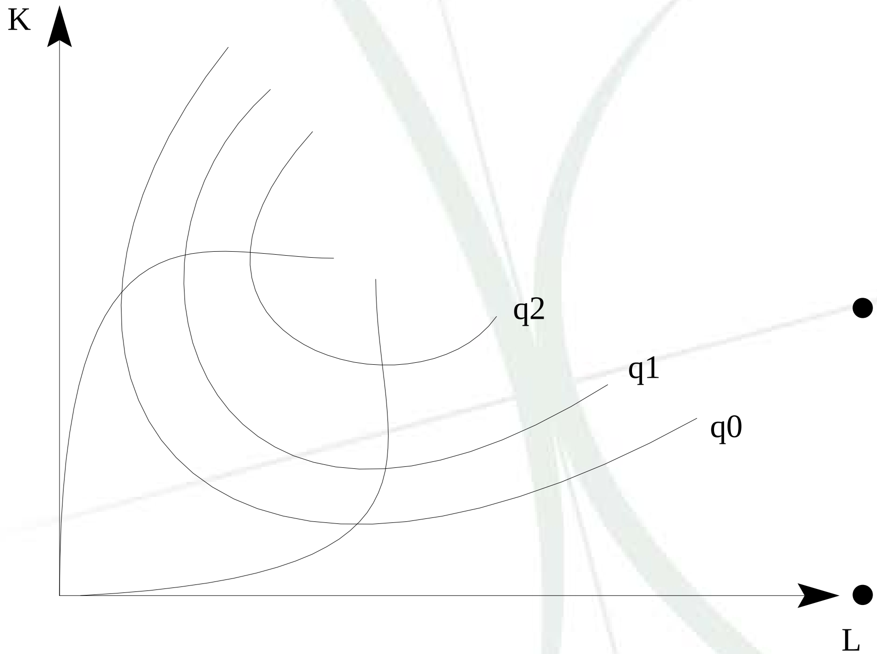
**Isoquantok (azonos termék görbék)**



# q0, q1 és q2 az egyes vizsgált termelési szinteket jelöli

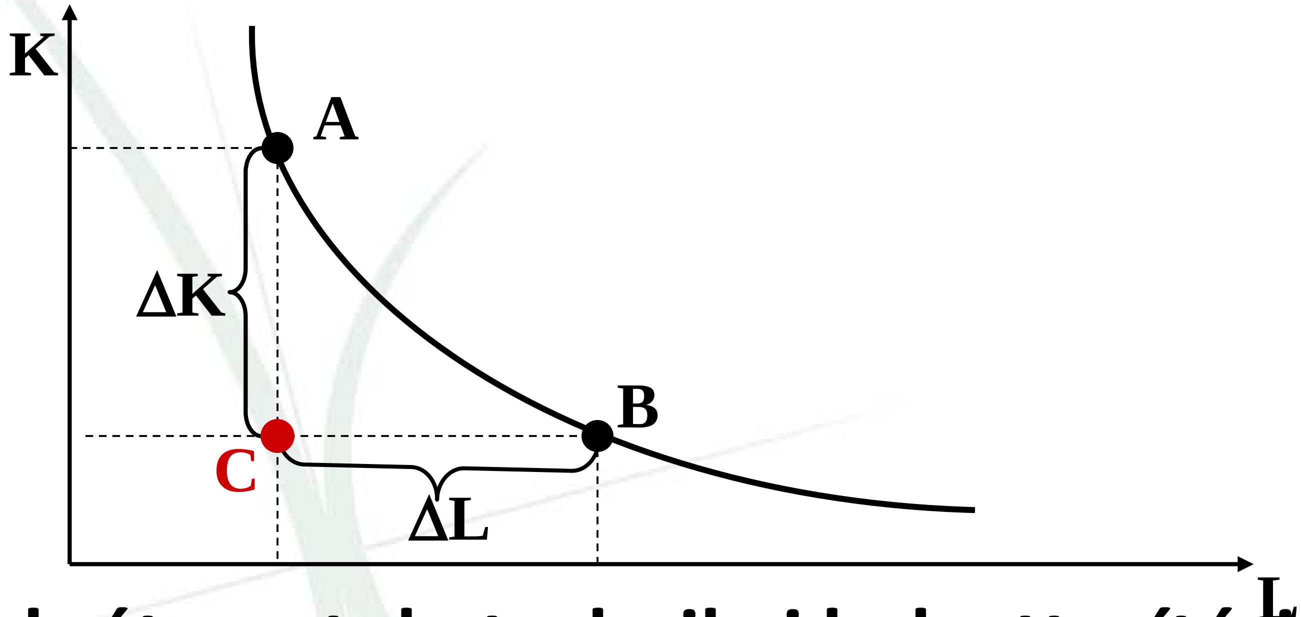
- Az origótól távolabb lévő isoquantok nagyobb termelési szintet jelentenek.
- a K, L koordinátarendszerbe végtelenül sok isoquant rajzolható be (folytonos term. fg).
- Az isoquantok nem metszhetik egymást.
- A jól viselkedő isoquantok negatív meredekségűek
- A visszahajló szakaszokat lemetsszük.

# A gerincvonal




- Az isoquantok visszahajló szakaszait a negatív meredekségű szakaszoktól elválasztó határvonal a gerincvonal.
- A gerincvonalakon kívül valamelyik termelési tényező felhasználása túlzott.
- A releváns tartományban konvex isoquntok („jól viselkedő isoquantok".

# Technikai helyettesítési határráta



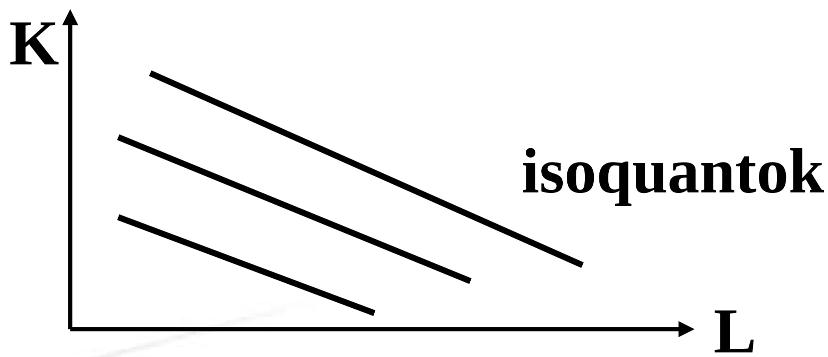

- **Diszkrét pontok: technikai helyettesítési ráta – RTS=$\frac{\Delta K}{\Delta L}$**
- **Folytonos elmozdulás: technikai helyettesítési határráta – MRTS= $\frac{dK}{dL}$**

# Mitől függ a helyettesítés?

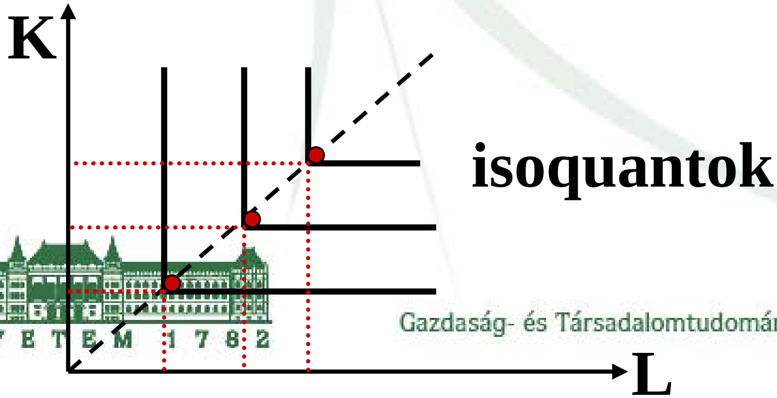
- **MPK*dK+MPL*dL=0**
- **MRTS=** $$\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

# Speciális isoquantok

- **Tökéletes helyettesítés** (MRTS=állandó)




- **Tökéletes kiegészítés**(Leontief termelési fg.)



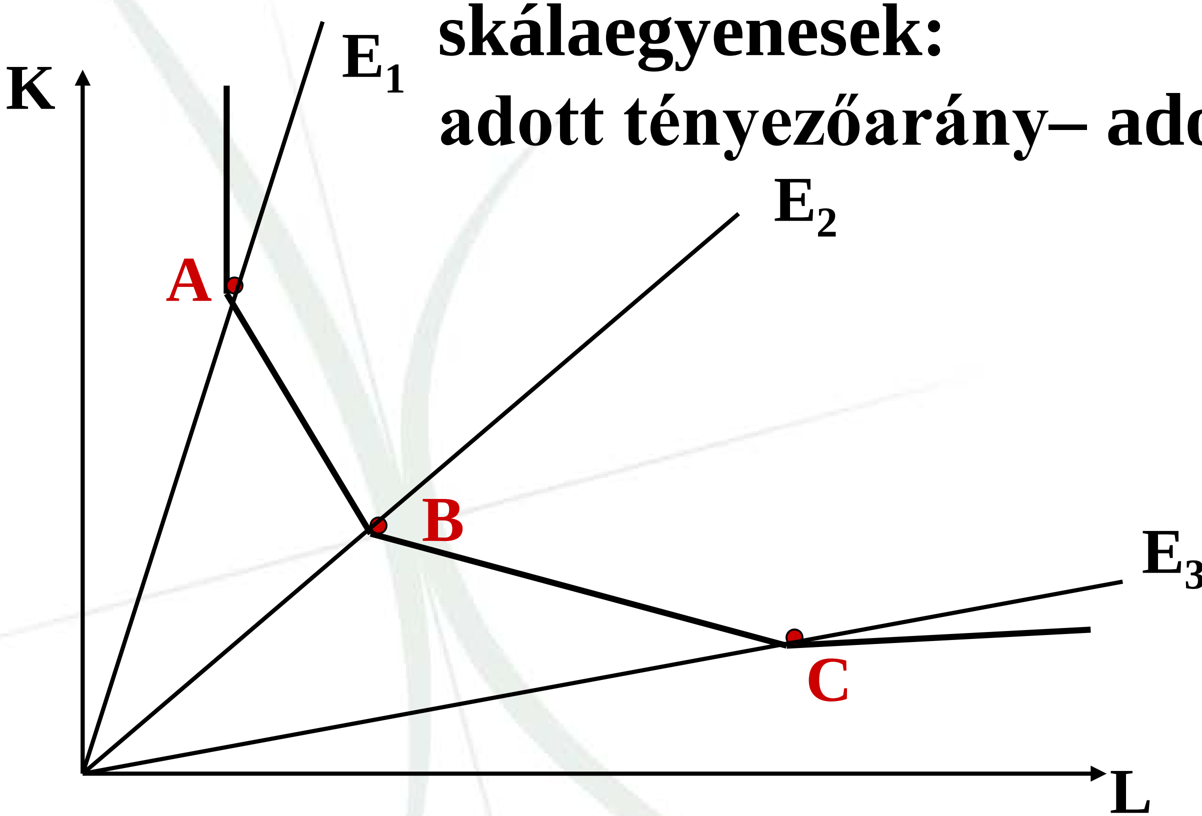
# Leontief termelési függvény

- $Q = MIN(aK, bL)$

- Q=aK Q=bL

- $\frac{K}{L} = \frac{b}{a} =$ konstans

# A törtvonalú isoquant



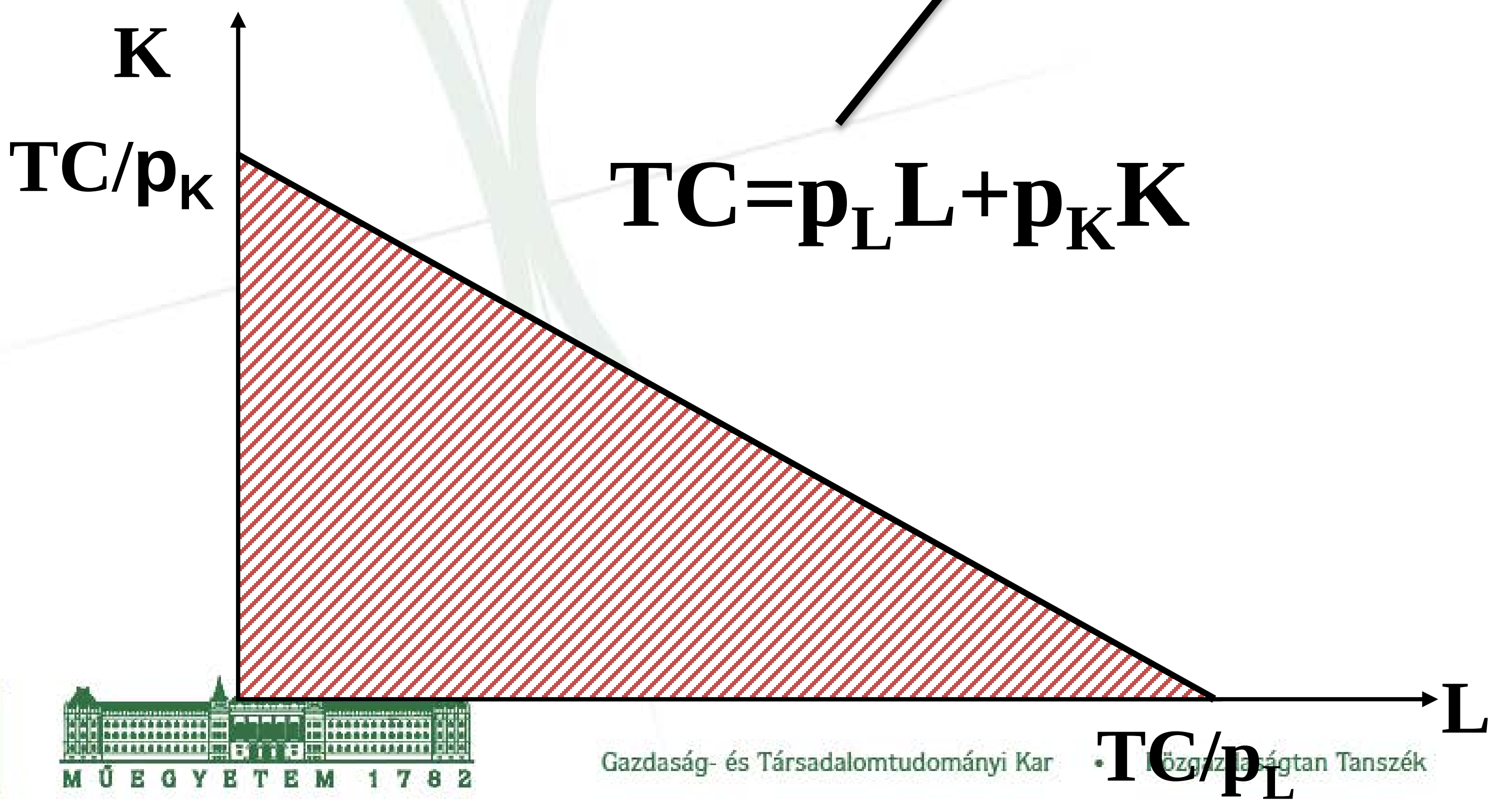

•Technológiák helyettesíthetősége (A-B és B-C)

# Költségkorlát, isocost egyenes

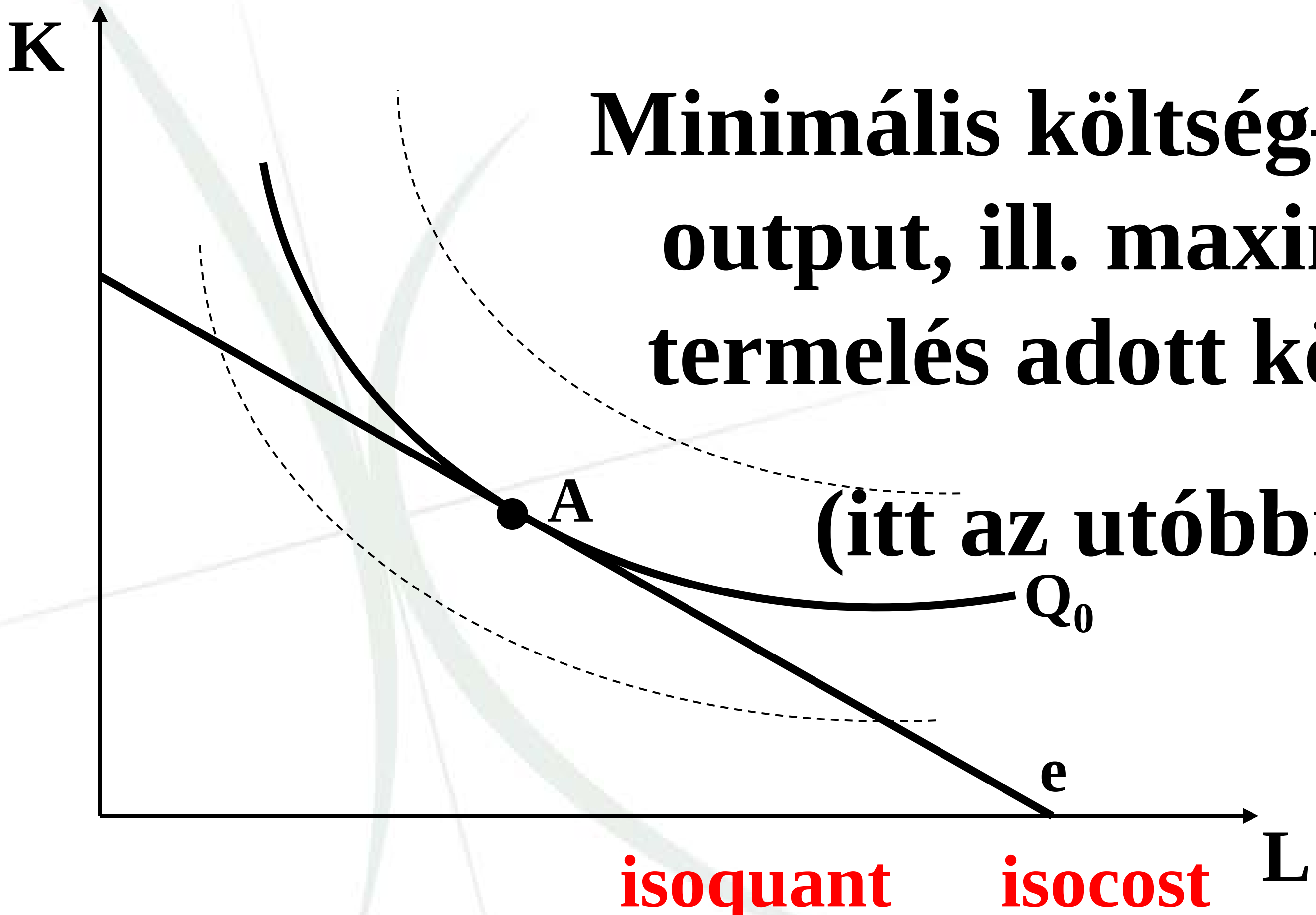
- Tényezőárak
- Összköltség

$$K=\frac{TC}{P_K} - L\frac{P_L}{P_K}$$

$$TC=p_L L+p_K K$$



# „Optimális” választás a termelésben

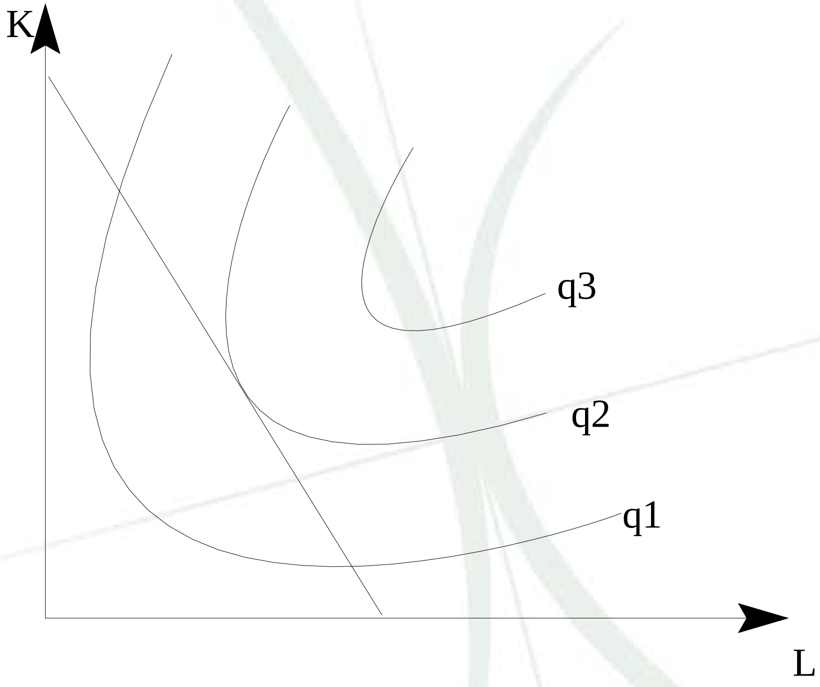



**Minimális költség– adott output, ill. maximális termelés adott költség**

**(itt az utóbbi)**

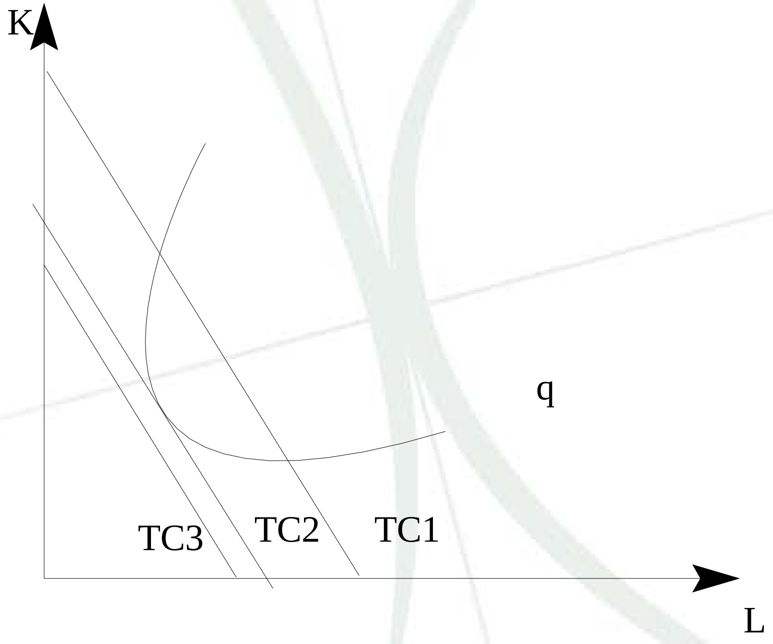
**Optimalizáció kritériuma: $MP_L/MP_K=p_L/p_K$**

# ***Termelés maximalizálás :*** *Adott költség mellett keressük a maximális termelési szintet*




- Ez az isocost egyenes és a legmagasabb termelési szintet jelentő isoquant közös, érintési pontja
- **Optimum:**
- $\mathbf{MP_L/MP_K=p_L/p_K}$

# ***Költségminimalizálás****: Adott termelési szinthez keressük a minimális költséget*




- Ez az adott isoquant és az isoquanthoz húzott, legkisebb összköltségű eljárást jelentő isocost egyenes közös,érintési pontja
- **Optimum:**
- $\mathbf{MP_L/MP_K=p_L/p_K}$

# Termelésmaximalizálás

- Egy vállalat teljes költsége 4000. A munka egységének ára 100, a tőkéé pedig 400. A termelési függvény:

$$q = 2\sqrt{KL}$$

- Mennyi a technikai helyettesítési határráta profitmaximalizáló kibocsátás mellett?
- Mennyi tőkét használ fel a vállalat hosszú távon?
- Mekkora a vállalat kibocsátása hosszú távon?

- A helyettesítési határráta:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{2\sqrt{K}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{L}}}{2\sqrt{L}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{K}}} = \frac{K}{L}$$

- **Optimum:**
- $\mathbf{MP_L/MP_K=p_L/p_K}$

# Az optimális inputfelhasználás és kibocsátás kiszámolható:

$$\frac{K}{L} = \frac{100}{400}$$

$$4000 = 100L + 400K$$

$$q = 2\sqrt{KL}$$

K=1/4L

4000=100L+400x1/4L

- K=5, L=20, q=20

# Költségminimalizálás

- Egy vállalat 2000 db terméket szeretne előállítani. A vállalat termelési függvénye:

$$q = K^{0,25} L^{0,75}$$

Mekkora az a minimális költség, amivel ez a termelés elérhető, ha egységnyi tőke ára 10000 pénzegység, a munka ára pedig egységenként 48 pénzegység?

- A technikai helyettesítési határráta:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K^{0,25}0,75L^{-0,25}}{L^{0,75}0,25K^{-0,75}} = \frac{3K}{L}$$

$$\frac{3K}{L} = \frac{48}{10000}$$

$$TC = 48L + 10000K$$

$$2000 = K^{0,25}L^{0,75}$$

- $K = \frac{2000^4}{L^3}$ és $K = \frac{16L}{10000}$
- L=10000, K=16, TC=640000

# Költségminimalizálás

- Egy vállalat 100 db terméket szeretne előállítani. A vállalat termelési függvénye:

$$q = \sqrt{KL}$$

Mekkora az a minimális költség, amivel ez a termelés elérhető, ha egységnyi tőke ára 40 pénzegység, a munka ára pedig egységenként 10 pénzegység?

# Vagy így:

- q=100=$\sqrt{KL}$, K=10000/L
- TC=40K+10L=400000/L+10L
- dTC/dL=-400000/L’+10=0
- L=200, K=50, TC=4000

- 3. példa: Egy vállalat két inputot, munkát és tőkét használ fel. A munka ára 400, a tőke ára 1000. A vállalatnál az utolsóként felhasznált inputegységek határtermékei:

$$MP_L = 200, MP_K = 600$$

- Véleménye szerint optimálisnak tekinthető-e a vállalat által alkalmazott tényezőkombináció? Válaszát indokolja meg!
- Amennyiben nem optimális, akkor hogyan lenne célszerű változtatni a tőke és munka mennyiségét?

# Megoldás

- Az optimum feltétele, hogy a tényezőár-aránynak meg kell egyeznie a határtermékek hányadosával. Ez itt nem teljesül.

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{200}{600} \neq \frac{400}{1000} = \frac{P_L}{P_K}$$

# Gossen II: a termelésben

- Akkor haladunk az optimum felé, ha a vállalat növeli a tőkefelhasználást és csökkenti a munkafelhasználást.
- *A pénz határterméke legyen azonos minden tényező esetén*
- $\frac{MP_L}{P_L} < \frac{MP_K}{P_K}$ $\frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$ illetve: $\frac{P_L}{MP_L} = \frac{P_K}{MP_K} = (\mathrm{MC})$