Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
9-10. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.05.28.

1. feladat

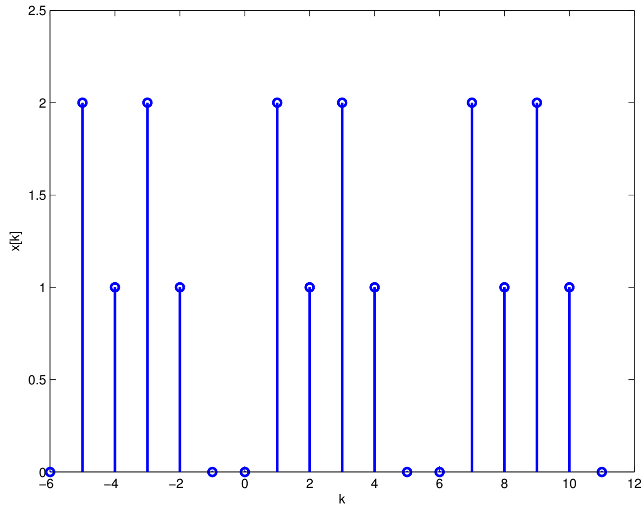
Számítsuk ki annak a DI periodikus jelnek a Fourier-sorát komplex és mérnöki valós alakban is, amelynek egy periódusa

$$x = \{0; 2; 1; 2; 1; 0\}$$

Számítsuk ki a jel teljesítményét!

A jel periódusa $L = 6$, alapkörfrekvenciája

$$\Theta = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$



1. ábra. Az $x[k]$ periodikus jel

1.1. A komplex alak

A DI Fourier-együtthatók kiszámítására levezetett összefüggésbe helyettesítünk, az L egymást követő $x[k]$ értéket 0 és $L - 1$ között vesszük fel:

$$X_p^c = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-jp\frac{2\pi}{L}k} = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-jp\Theta k}$$

- $p = 0$ (a hozzá tartozó komplex exponenciális jel frekvenciája $\vartheta = 0$, vagyis az egyenösszetevő)

$$X_0^c = \frac{1}{6}(0 + 2 + 1 + 2 + 1 + 0) = 1.$$

- $p = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{3}$:

$$X_1^c = \frac{1}{6}\left(0 + 2e^{-j\pi/3} + 1e^{-j2\pi/3} + 2e^{-j\pi} + 1e^{-j4\pi/3} + 0e^{-j5\pi/3}\right) = -0{,}333 - 0{,}289j = 0{,}441e^{-j2{,}43}$$

- $p = 2$, $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$:

$$X_2^c = \frac{1}{6}\left(0 + 2e^{-j2\pi/3} + 1e^{-j4\pi/3} + 2e^{-j2\pi} + 1e^{-j8\pi/3} + 0e^{-j10\pi/3}\right) = -0{,}289j = 0{,}289e^{-j\pi/2}$$

- $p = 3$, $\vartheta = \pi$:

$$X_3^c = \frac{1}{6}\left(0 + 2e^{-j\pi} + 1e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi} + 1e^{-j4\pi} + 0e^{-j5\pi}\right) =$$

$$X_3^c = \frac{1}{6}\left(0 + 2\cdot(-1) + 1\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)^3 + 1\cdot(-1)^4 + 0\cdot(-1)^5\right) = -0{,}333$$

További számítás nem szükséges, az ismert szimmetriatulajdonságok miatt a maradék két Fourier-együttható azonnal megadható. Mivel az $x[k]$ jel valós, ezért a levezetett

$$X_{L-p}^c = X_{-p}^c = (X_p^c)^*$$

összefüggések alapján $p = 4$, $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$-ra

$$X_4^c = (X_2^c)^* = 0{,}289j = 0{,}289e^{j\pi/2},$$

és $p = 5$, $\vartheta = \frac{5\pi}{3}$-ra

$$X_5^c = (X_1^c)^* = -0{,}333 + 0{,}289j = 0{,}441e^{j2{,}43}.$$

Ezzel megvan a 6 Fourier-együttható, $p = 0, \ldots, L-1$, és tudjuk, hogy a Fourier-együtthatók is periodikusak L-el.

Ellenőrzés Matlab/Octave segítségével[1]:

```
>> x=[0 2 1 2 1 0];
>> Xc=1/6*fft(x)

Xc =

  Columns 1 through 4

   1.0000 + 0.0000i  -0.3333 - 0.2887i   0.0000 - 0.2887i  -0.3333 + 0.0000i

  Columns 5 through 6
```

[1] A Matlab/Octave/Ptolemy II/fftw DFT/FFT konvenciójában az $\frac{1}{L}$-es faktor éppen fordítva van, mint az általunk használt alakban, vagy ha úgy tetszik, az exponenciális kitevőjében van fordítva az előjel. A DFT/FFT elterjedt definíciója:

$$\mathrm{DFT}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{L-1} x[k]e^{-jp\frac{2\pi}{L}k}, \quad p = 0, \ldots, L-1$$

```
    0.0000 + 0.2887i    -0.3333 + 0.2887i

>> abs(Xc)

ans =

     1.0000    0.4410    0.2887    0.3333    0.2887    0.4410

>> angle(Xc)

ans =

          0   -2.4279   -1.5708    3.1416    1.5708    2.4279
```

Figyeljük meg, hogy mivel L páros, ezért szerepel $\vartheta = \pi$ körfrekvenciájú tag a sorban, amelynek együtthatója valós jel esetén biztosan valós.

1.2. A mérnöki valós alak

A mérnöki valós alakot ebben az esetben a $\pi/3$ és a $-\pi/3$, illetve a $2\pi/3$ és a $-2\pi/3$ frekvenciájú komplex exponenciálisok összevonásával kapjuk, amely a konjugált szimmetria miatt valós koszinuszos rezgést ad. Megmarad a nulla frekvenciás összetevő, valamint – mivel L páros – a π frekvenciájú összetevő, ami szintén valós.

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M} X_p \cos\left(p\frac{2\pi}{L}k + \xi_p\right) + X_{L/2}\cos(\pi k)$$

Esetünkben, mivel L páros, $M = L/2 - 1 = 2$, és van $L/2$-es tag. A valós alak együtthatói a fenti gondolatmenet alapján

$$\begin{gathered} X_0 = X_0^c, \\ X_p = 2|X_p^c|, \quad p = 1,2 \\ \xi_p = \arg X_p^c, \quad p = 1,2 \\ X_3 = X_3^c, \end{gathered}$$

a sor pedig

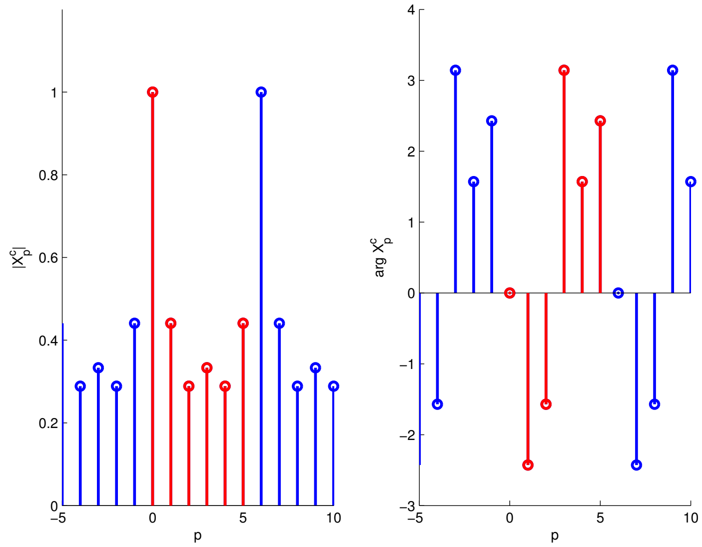
$$x[k] = 1 + 0{,}882\cos\left(\frac{\pi}{3}k - 2{,}43\right) + 0{,}578\cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{2}\right) - 0{,}333\cos(\pi k).$$

A mérnöki valós alakból a harmonikusok komplex csúcsértéke kiolvasható. A 2. ábrán a komplex Fourier-együtthatók abszolútértéke és fázisa látható, az együtthatók egy „periódusát” pirossal kiemeltük. Az ábrán is jól látszik, hogy a mérnöki valós alakot pl. a $p = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ egymást követő L együttható alapján számoltuk, ahol a $p = 3$ együtthatónak nincs negatív frekvencián „párja” azonos perióduson belül, míg a $p = 1$ és $p = 2$ együtthatóknak van.

1.3. A jel teljesítménye

Időtartományban:

$$P_x = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{6}\left(0^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2\right) = 10/6 = 1{,}67,$$



2. ábra. Az $x[k]$ periodikus jel Fourier-sora

vagy a Parseval-tétel alapján

$$P_x = \sum_{p=0}^{L-1} |X_p^c|^2 = 1^2 + 0{,}441^2 + 0{,}289^2 + 0{,}333^2 + 0{,}289^2 + 0{,}441^2 = 1{,}67.$$

Matlab/Octave segítségével:

```
>> Px1 = 1/6 * sum(abs(x).^2)

Px1 =

    1.6667

>> Px2 = sum(abs(Xc).^2)

Px2 =

    1.6667
```

2. feladat

Egy DI rendszer rendszeregyenlete

$$y[k] - 0{,}5y[k-1] = u[k],$$

a gerjesztése pedig az alábbi periodikus jel:

$$u[0] = 1; \quad u[1] = 1; \quad u[2] = 0; \quad u[3] = 0; \quad u[k+4] = u[k].$$

Határozzuk meg a rendszer válaszjelét állandósult állapotban!

A rendszeregyenlet sajátértéke ránézésre $p = 0{,}5$, ami az egységkörön belül van, a rendszer gerjesztés-válasz stabil, az állandósult állapot valóban beáll. A válasz számításához szükség van a gerjesztés Fourier-sorának valós alakjára, valamint a rendszer átviteli karakterisztikájának meghatározására.

A gerjesztés periódusa $L = 4$, az alapkörfrekvencia

$$\Theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

a Fourier-sort alkotó körfrekvenciák $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Az egyenösszetevő:

$$U_0^c = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} u[k] = 0{,}5,$$

az alapharmonikus

$$U_1^c = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} u[k]e^{-j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 0} + 1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 1}\right) = \frac{1}{4}(1-j) = 0{,}25 - 0{,}25j = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}} = 0{,}354e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

a 2. harmonikus

$$U_2^c = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} u[k]e^{-j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1\cdot e^{-j\pi\cdot 0} + 1\cdot e^{-j\pi\cdot 1}\right) = 0,$$

és valós jelről lévén szó,

$$U_3^c = (U_1^c)^* = 0{,}25 + 0{,}25j = 0{,}354e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Ellenőrzés Matlab/Octave segítségével:

```
>> u=[1 1 0 0]

u =

     1     1     0     0

>> Xc = 1/4 * fft(u)

Uc =

   0.5000 + 0.0000i   0.2500 - 0.2500i   0.0000 + 0.0000i   0.2500 + 0.2500i

>> abs(Uc)
```

```
ans =

    0.5000    0.3536         0    0.3536

>> angle(Uc)

ans =

         0   -0.7854         0    0.7854
```

A gerjesztés Fourier-sorának mérnöki valós alakja

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^{M} U_p \cos\left(p\frac{2\pi}{L}k + \xi_p\right) + X_{L/2}\cos(\pi k),$$

jelen esetben $M = 1$, és a konkrét gerjesztésre az $U_{L/2}$-es tag numerikus értéke nulla:

$$U_0 = U_0^c = 0{,}5$$

$$U_1 = 2|U_1^c| = 0{,}707; \quad \xi_1 = \arg U_1^c = -\frac{\pi}{4}$$

$$u[k] = U_0 + U_1\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \xi_1\right) = 0{,}5 + 0{,}707\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ellenőrizhetjük is, hogy numerikusan valóban visszaadja-e ez a sor a gerjesztés mintáit ($k = 0, 1, \ldots 8$ ütemekre):

```
>> k=0:8

k =

     0     1     2     3     4     5     6     7     8

>> uk=0.5 + 0.7071 * cos(pi/2*k-pi/4)

uk =

  Columns 1 through 8

    1.0000    1.0000    0.0000    0.0000    1.0000    1.0000    0.0000
0.0000

  Column 9

    1.0000
```

A rendszer átviteli karakterisztikájának normálalakja a rendszeregyenletből közvetlenül kiolvasható:

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{1}{1 - 0{,}5e^{-j\vartheta}}$$

A válasz Fourier-sorának együtthatóit az alábbi táblázat alapján számítjuk:

p	$\vartheta = p\Theta$	$\overline{U}_p$	$\overline{H}_p$	$\overline{Y}_p = \overline{H}_p \cdot \overline{U}_p$
0	0	0,5	2	1
1	$\pi/2$	$0{,}707e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$0{,}89e^{-0{,}46j}$	$0{,}6325e^{-j1{,}249}$

ahol az átviteli tényezők értékei

$$\overline{H}_0 = H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=0} = \frac{1}{1 - 0{,}5} = 2,$$

$$\overline{H}_1 = H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 - 0{,}5e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1 + 0{,}5j} = 0{,}89e^{-0{,}46j}.$$

A válasz Fourier-sorának mérnöki valós alakja a táblázat utolsó oszlopa alapján

$$\underline{\underline{y[k] = 1 + 0{,}6325\cos\left(\frac{\pi}{2}k - 1{,}249\right)}}$$

A válasz mintái

```
>> k=0:7

k =

     0     1     2     3     4     5     6     7

>> yk=1 + 0.6325 * cos(pi/2*k-1.249)

yk =

    1.2000    1.6000    0.8000    0.4000    1.2000    1.6000    0.8000
0.4000
```

Az eredményt fokozatos behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Többféleképpen is eljárhatunk, de a két bemutatott módszerben közös, hogy *belépő* gerjesztést vesz figyelembe. Tudjuk, hogy a kiszámolt periodikus állandósult állapot *nem belépő* gerjesztésre vonatkozik, azonban a szóban forgó rendszer egy kis rendszámú (másodrendű) rekurzív rendszer. A rendszer időállandójától függően néhány ütem után beáll az állandósult állapot.

Az egyik módszer a Matlab/Octave Signal Processing Toolboxának filter függvényét használja, ami a rendszeregyenlet direkt megvalósítását végzi fokozatos behelyettesítéssel:

```
>> help filter
 filter One-dimensional digital filter.
    Y = filter(B,A,X) filters the data in vector X with the
    filter described by vectors A and B to create the filtered
    data Y.  The filter is a "Direct Form II Transposed"
    implementation of the standard difference equation:

    a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + ... + b(nb+1)*x(n-nb)
                          - a(2)*y(n-1) - ... - a(na+1)*y(n-na)
```

Az első argumentum a rendszeregyenlet jobb oldalának (ill. az átviteli karakterisztika számlálójának) együtthatóit, a második argumentum a rendszeregyenlet bal oldalának (ill. az átviteli karakterisztika nevezőjének) együtthatóit, a harmadik argumentum a gerjesztő jel mintáit tartalmazza. Példánkban a gerjesztő jel több periódusát adjuk meg:

```
>> filter(1, [1 -0.5], [1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0])

ans =

  Columns 1 through 8

    1.0000    1.5000    0.7500    0.3750    1.1875    1.5938    0.7969
0.3984

  Columns 9 through 16
```

```
    1.1992    1.5996    0.7998    0.3999    1.2000    1.6000    0.8000
0.4000

  Columns 17 through 20

    1.2000    1.6000    0.8000    0.4000
```

Látható, hogy közelítőleg már a második periódustól visszakapjuk a saját megoldásunkat.