SZABTECH 3. GYAKORLAT ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEINEK KIDOLGOZÁSA

(1)

$$W_{PID}(s) = A_P + \frac{A_P}{T_i}\cdot\frac{1}{s} + A_P\cdot T_D\cdot s = \frac{A_P}{T_i}\cdot\frac{1+sT_i+s^2T_iT_D}{s}$$

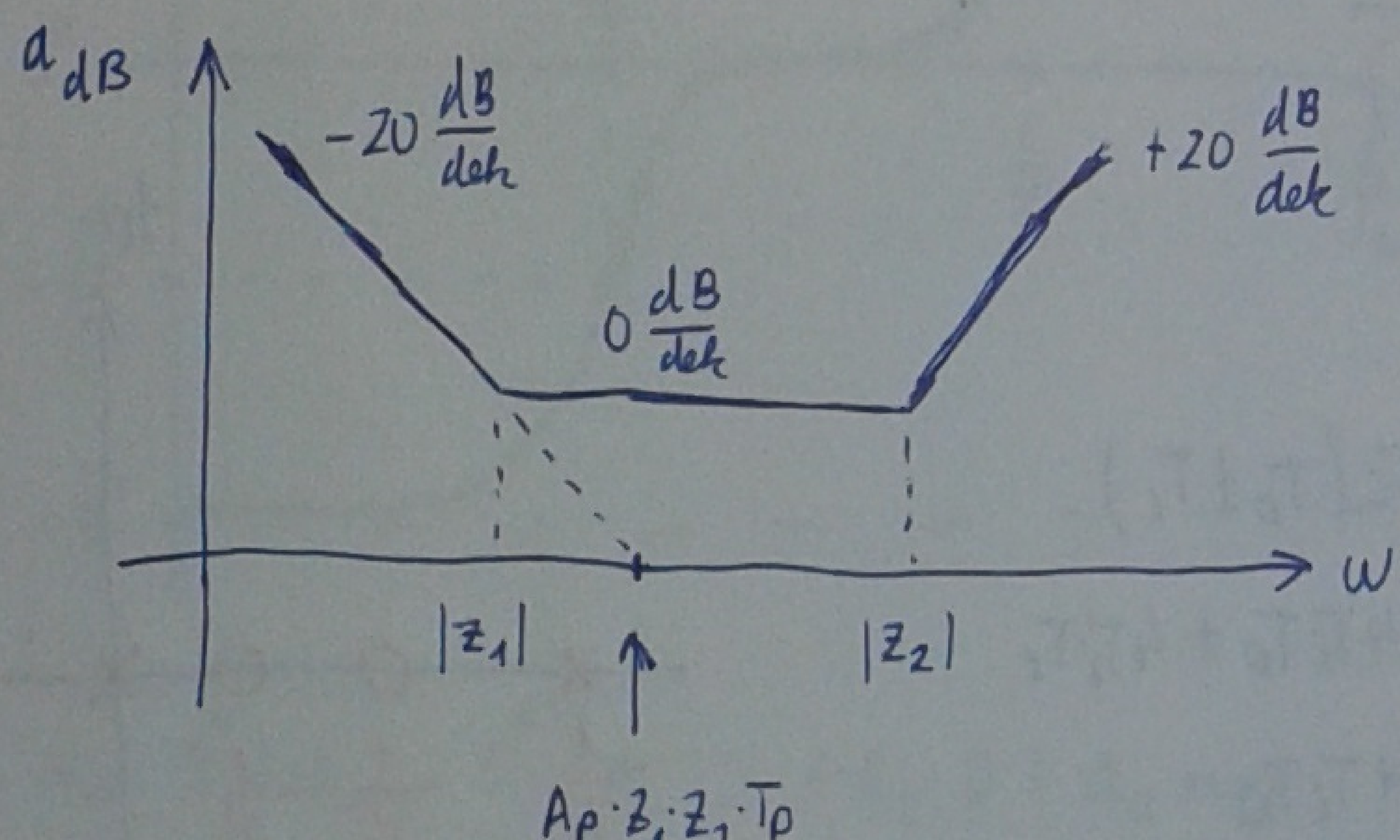
$$z_{1,2} = \frac{-T_i \pm\sqrt{T_i^2-4T_iT_D}}{2T_iT_D}$$ ← zérusok $\qquad s_1=0$ ← egyetlen pólus

A zérusok valósak, ha $T_i^2-4T_iT_D \geq 0$

$$T_i \geq 4T_D$$

(2)

$$W_{PID}(s) = \frac{A_P}{T_i}\cdot\frac{1+sT_i+s^2T_iT_D}{s}$$ ← Tfh: a zérusok valósak ($T_i \geq 4T_D$)

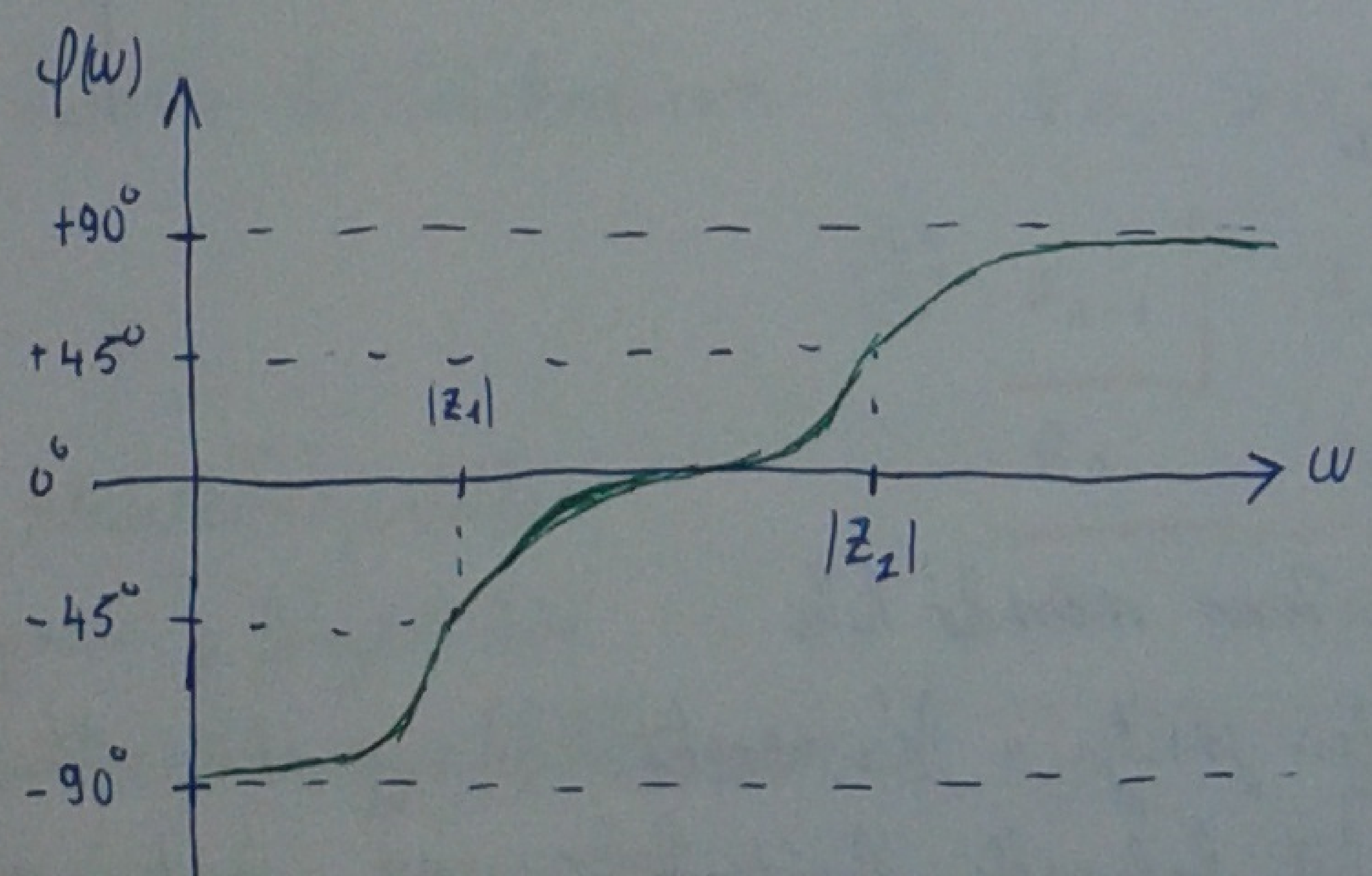


$$W_{PID}(s) = \frac{A_P}{T_i}\cdot T_i\cdot T_D\cdot\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)}{s} =$$

$$= A_P\cdot T_D\cdot z_1\cdot z_2\cdot\frac{\left(\frac{1}{-z_1}\cdot s+1\right)\cdot\left(\frac{1}{-z_2}s+1\right)}{s}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{1}{z_1}\right|\cdot\omega\right) + \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{1}{z_2}\right|\cdot\omega\right)$$

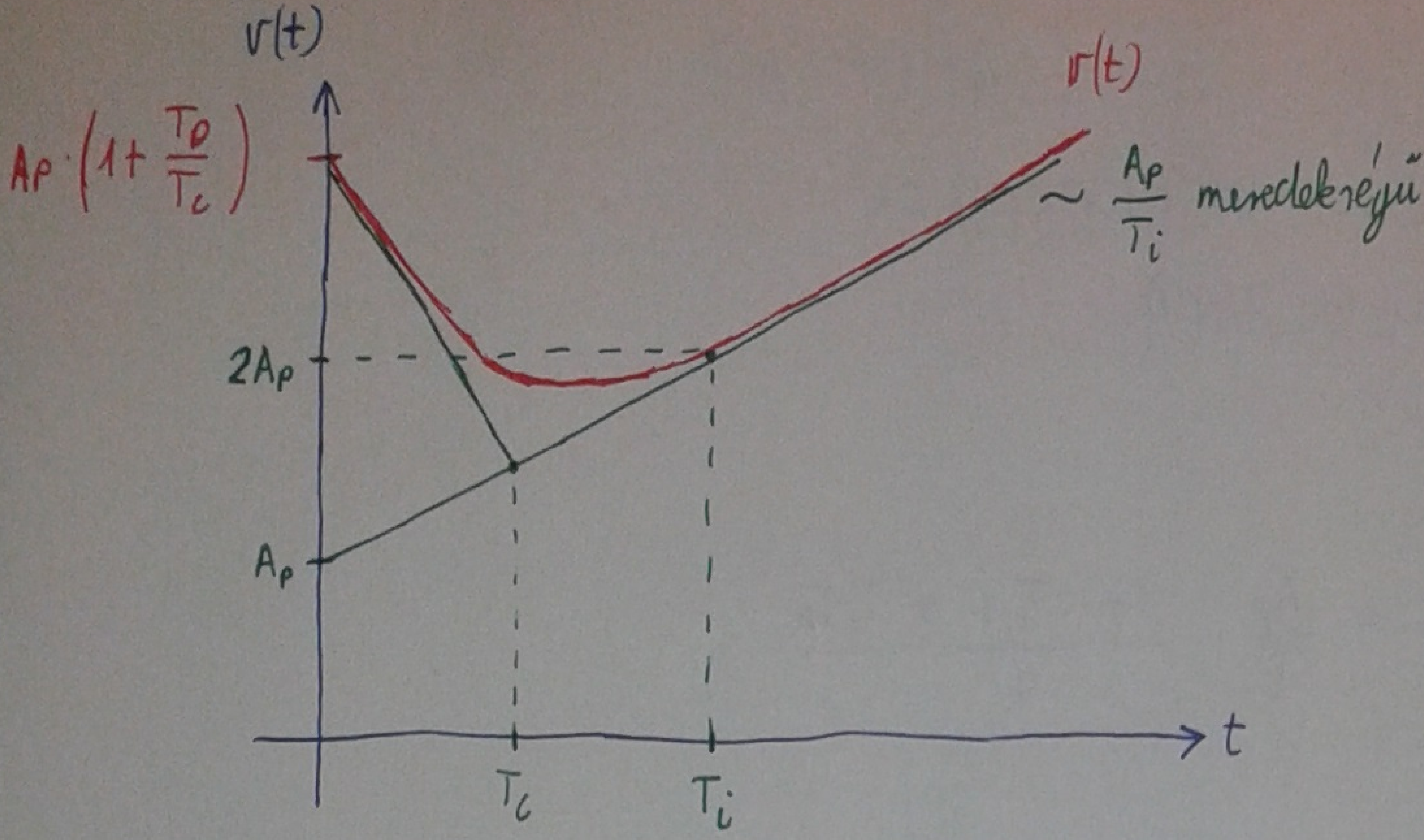
Pontos fázisfüggvény



(3)

$$W_{PID}(s) = A_P + \frac{A_P}{T_i}\cdot\frac{1}{s} + A_P\cdot\frac{sT_D}{1+sT_c} = \frac{A_P}{T_i}\cdot\frac{1+s\cdot(T_i+T_c)+s^2\cdot T_i\cdot(T_D+T_c)}{s\cdot(1+sT_c)}$$

$$v_{PID}(t) = A_P + \frac{A_P}{T_i}\cdot t + \frac{A_P\cdot T_D}{T_c}\cdot e^{-\frac{t}{T_c}}, \text{ ha } t \geq 0$$



- A_P meghatározható $v(t)$ végérték asszimptotájának y tengely metszetéből.
- Ezután leolvasható T_i értéke
- A kezdeti érintő és a végérték asszimptota metszéspontjánál leolvasható T_c értéke
- Majd számolható T_D értéke a kezdeti értékből

④ $$W_{PID}(s) = \frac{A_P}{T_i} \cdot \frac{1 + s\cdot(T_i + T_c) + s^2 \cdot T_i \cdot (T_D + T_c)}{(T_c s + 1)\cdot s} = \frac{A_P}{s T_i} \cdot \frac{(1+s\tau_1)\cdot(1+s\tau_2)}{(s T_c + 1)}$$

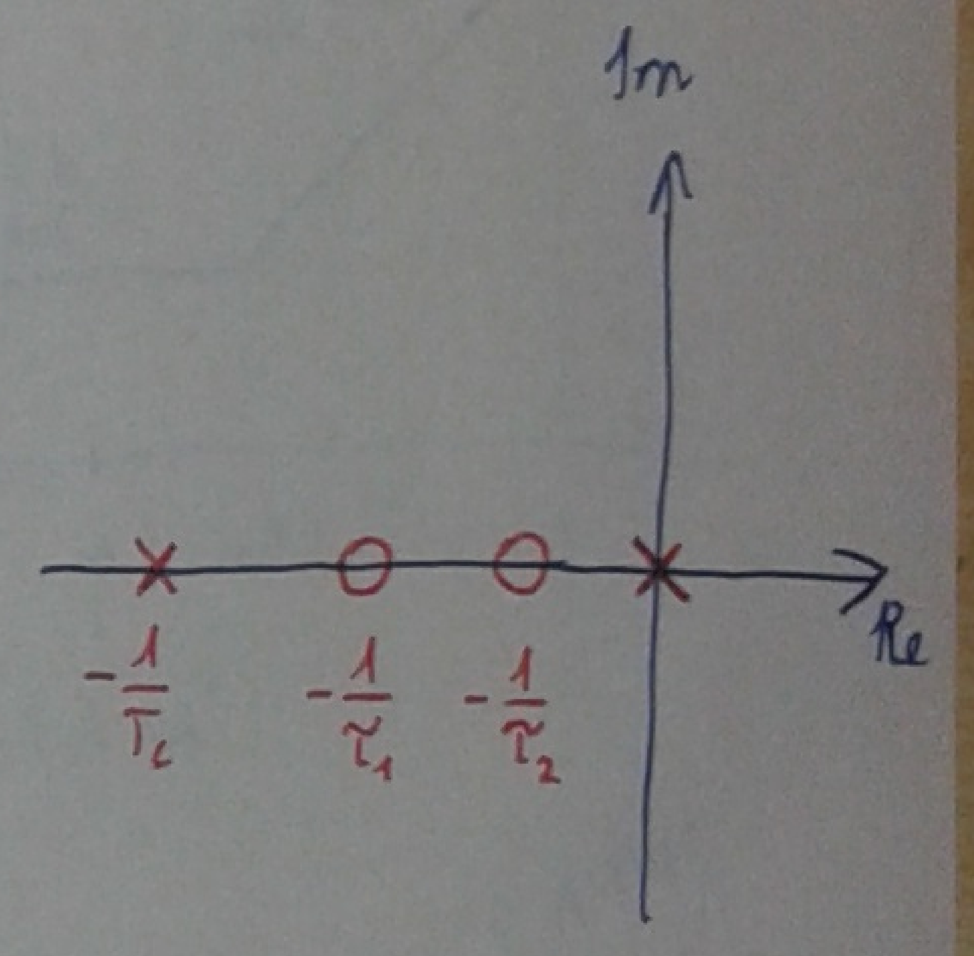
$$\tau_1 + \tau_2 = T_i + T_c$$
$$\tau_1 \cdot \tau_2 = T_i \cdot (T_c + T_D)$$

Pólusok: $s_1 = 0$
$s_2 = -\frac{1}{T_c}$

Zérusok: $$z_{12} = \frac{-T_i - T_c \pm \sqrt{(T_i + T_c)^2 - 4T_i \cdot (T_D + T_c)}}{2 \cdot T_i \cdot (T_D + T_c)}$$

↳ Két valós zérus, ha: $(T_i + T_c)^2 \geq 4T_i(T_D + T_c)$

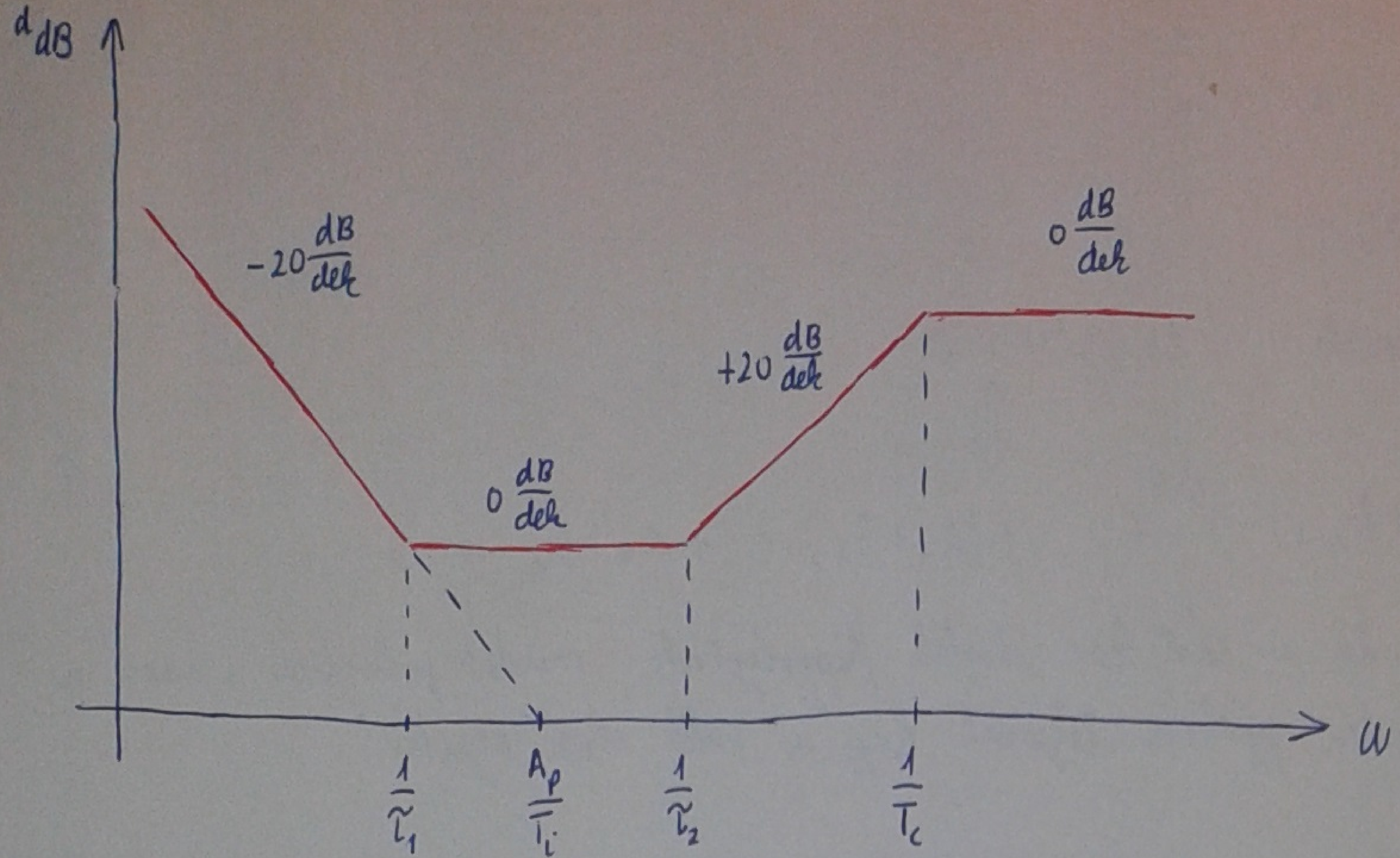
$$T_i^2 + 2T_iT_c + T_c^2 \geq 4T_iT_D + 4T_iT_c$$
$$(T_i - T_c)^2 \geq 4T_iT_D$$
$$\frac{(T_i - T_c)^2}{4T_i} \geq T_D$$

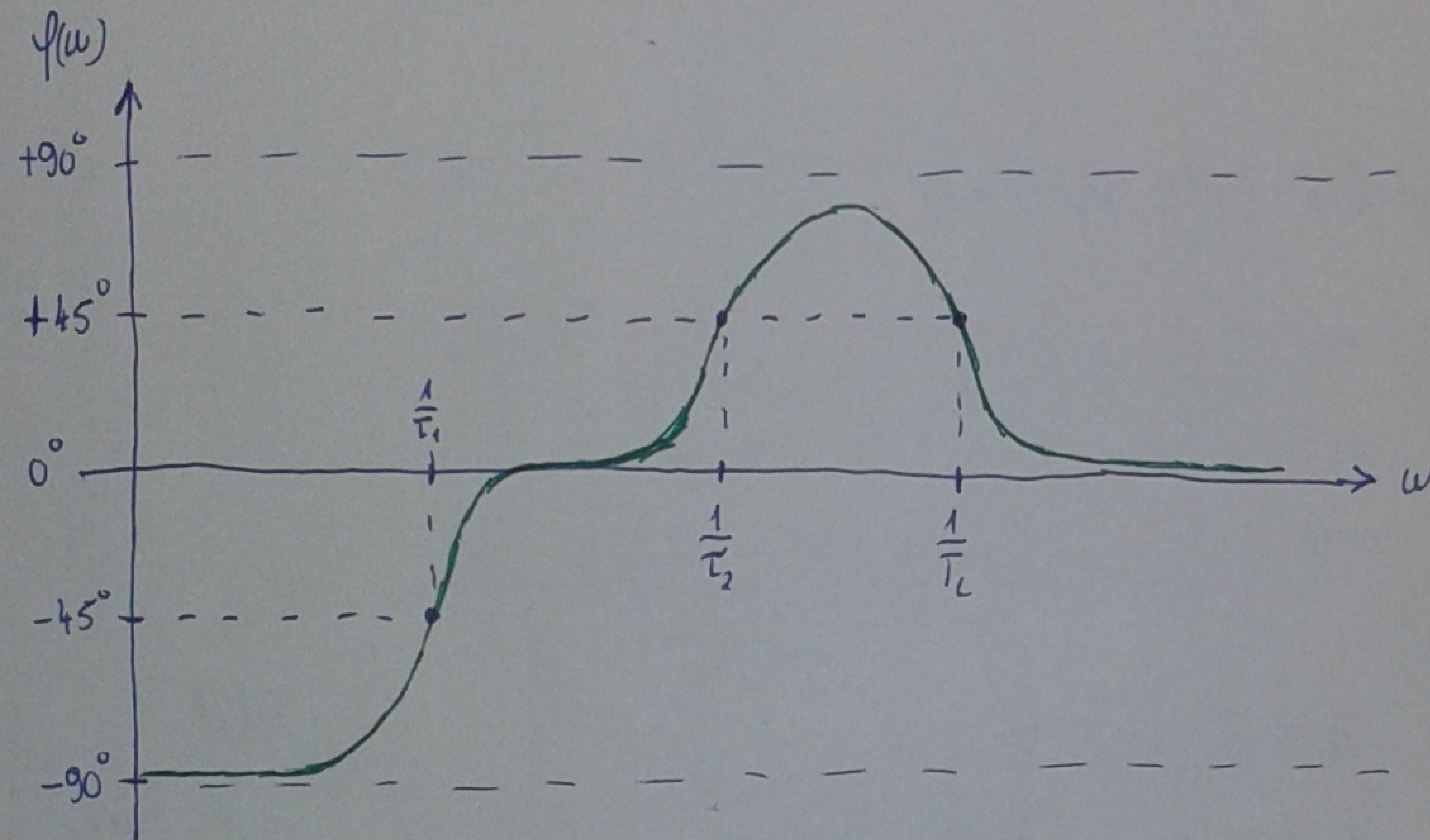


⑤ Lásd 3-as és 4-es feladat!

- A körerősítést A_P/T_i -szeresére növeli
- A szabályozási kör típusszámát 1-el növeli => Zérus maradó hiba
- A két zérushoz tartozó frekvenciák környezetében javítja a fázismenetet.
- A + két zérussal ki lehet ejteni a szakasz két leglassabb pólusát => Gyorsítja a rendszert!

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg}(\tau_1 \cdot \omega) + \operatorname{arctg}(\tau_2 \cdot \omega) - \operatorname{arctg}(T_c \cdot \omega)$$





⑥ $a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$ és $a_n > 0$

Hurwitz-stabilitáskritérium: ① $\forall a_i > 0$, $i = 0 \ldots n$

②
$$
\begin{array}{cccc}
\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \ldots & \Delta_n \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots \\
0 & a_n & a_{n-2} & \ldots \\
0 & 0 & a_{n-1} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

A feladatkiírás pontatlan, ugyanis a felnyitott kör karakterisztikus egyenletéből semmit sem tudunk. Ismerni kell a felnyitott kör átviteli függvényének számlálóját is!
A feladat viszont értelmes lesz, ha úgy vesszük, hogy ez a ZÁRT kör karakterisztikus egyenlete!

$\forall \Delta_i > 0$ ← minden speciális főátlóra támaszkodó aldetermináns pozitív!

(7) $$W_0(s) = \frac{b_{n-1}\cdot s^{n-1} + \ldots + b_1\cdot s + b_0}{a_n\cdot s^n + a_{n-1}\cdot s^{n-1} + \ldots + a_1\cdot s + a_0}$$

Zárt kör nevezője: $1 + W_0(s)$

Zárt kör karakterisztikus egyenlete: $1 + W_0(s) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$a_n\cdot s^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\cdot s^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)\cdot s + a_0 + b_0 = 0$$

A zárt kör akkor stabil, ha a zárt kör átviteli függvényének minden pólusára, azaz a karakterisztikus polinom minden gyökére teljesül, hogy a valós része negatív!

(8) $$W_0(s) = \frac{25\cdot(s+0,1)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+5)}$$

Zárt rendszer karakterisztikus egyenlete: $1 + W_0(s) = 0$

$$25\cdot(s+0,1) + s\cdot(s+1)\cdot(s+5) = 0$$
$$25s + 2,5 + s^3 + 6s^2 + 5s = 0$$
$$\underset{>0}{1}\cdot s^3 + \underset{>0}{6}s^2 + \underset{>0}{30}s + \underset{>0}{2,5} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ 6 & 2,5 & 0 \\ 1 & 30 & 0 \\ 0 & 6 & 2,5 \end{array}$$

$\Delta_1 = 6 > 0$ ✓

$\Delta_2 = 6\cdot 30 - 2,5\cdot 1 = 177,5 > 0$ ✓

$\Delta_3 = 2,5\cdot\Delta_2 > 0$ ✓

Tehát a zárt kör stabil!

(9) Nyquist-kritérium, ha a felnyitott körnek P darab labilis pólusa van:

A zárt kör akkor és csak akkor lesz stabil, ha $W_0(s)$ Nyquist-görbéje pontosan P-szer kerüli meg a komplex számsík -1 pontját az óramutató járásával ellentétesen!

$$\mathrm{EKVSZ}(W_0(j\omega), -1) = P$$

↑ Előjeles körülvételek száma

(10) Felnyitott kör labilis pólusai: $s_{1,2} = 1 \pm j10 \Rightarrow P = 2$

$$\mathrm{EKVSZ}(W_0(j\omega), -1) = 2$$

(11) Akkor használható, ha:

- $W_0(s)$ minden pólusa a bal félsíkon van (esetleg az origóban)
- Nincs 1-nél több olyan körfrekvencia, amelyen $|W_0(j\omega_c)| = 1$

Bode-kritérium $\Leftarrow$ Nyquist-kritérium speciális esete

stabilitás $\Longleftrightarrow$ $\varphi_t > 0$

ahol φ_t a fázistartalék, melynek értéke: $180^\circ + \varphi(\omega_c)$

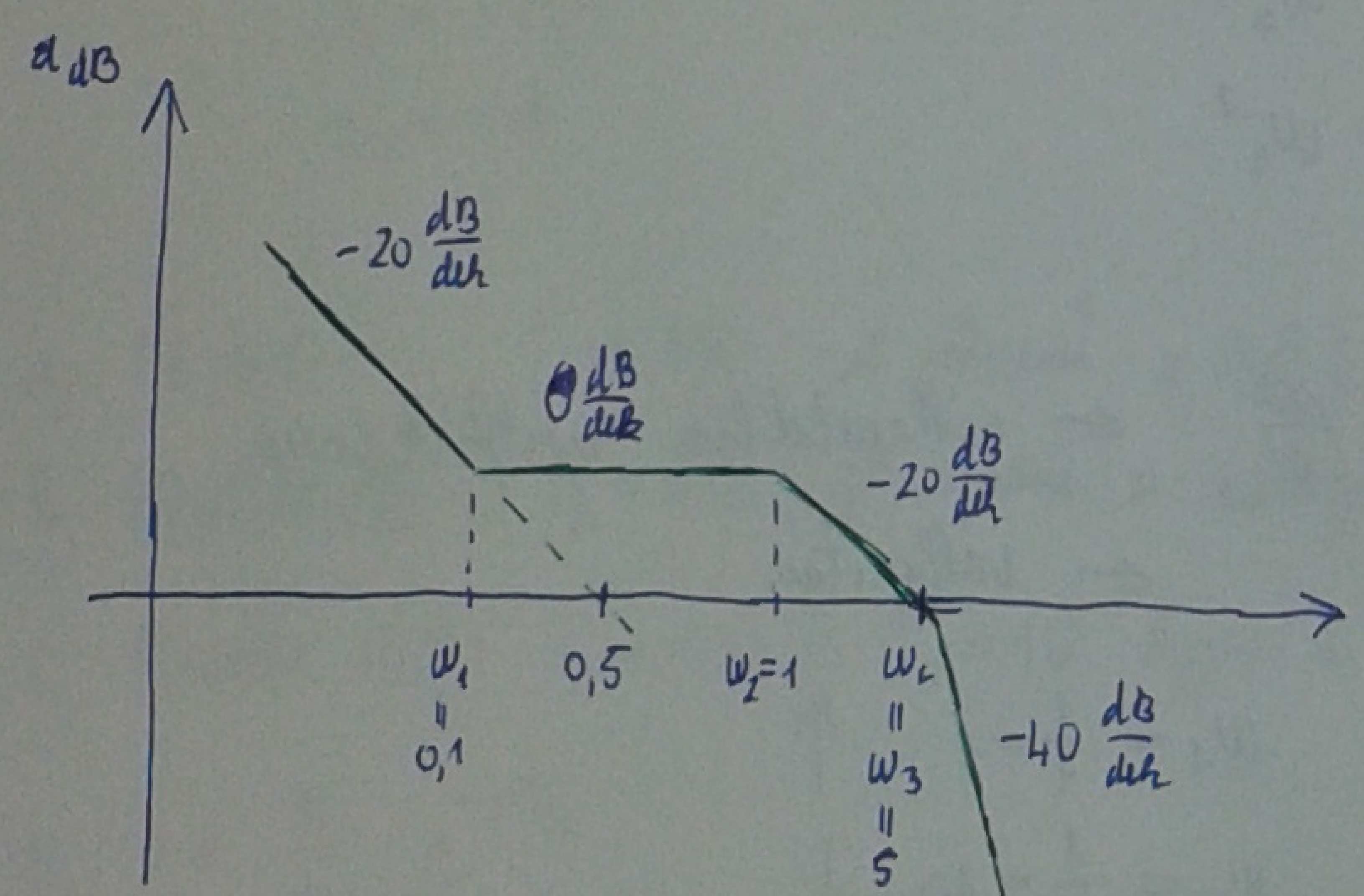
ω_c: Vágási frekvencia az a frekvencia, ahol az amplitúdó görbe metszi a 0 dB-es tengelyt, azaz ahol egységnyi a hurokerősítés!

φ_t: Fázistöbblet (fázistartalék) megadja, hogy a fázisgörbe mennyivel van -180° felett a vágási frekvenciánál!

(12) $W_0(s) = \dfrac{25}{s} \cdot \dfrac{(s+0,1)}{(s+1)\cdot(s+5)} =$ $\Longrightarrow$ Töréspontok: $\omega_1 = \frac{1}{10} = 0,1 \uparrow$ és $\omega_2 = \frac{1}{1} = 1 \downarrow$

$\omega_3 = \frac{1}{0,2} = 5 \downarrow$

$$= \frac{25 \cdot 0,1}{5 \cdot s} \cdot \frac{(10s+1)}{(s+1)\cdot(0,2s+1)} = \frac{0,5}{s} \cdot \frac{(10s+1)}{(s+1)\cdot(0,2s+1)}$$



$$\omega_c \approx \omega_3 = 5 \ \frac{rad}{sec}$$

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ + \operatorname{arctg}(10\omega_c) - \operatorname{arctg}(1\cdot\omega_c) - \operatorname{arctg}(0,2\omega_c)$$

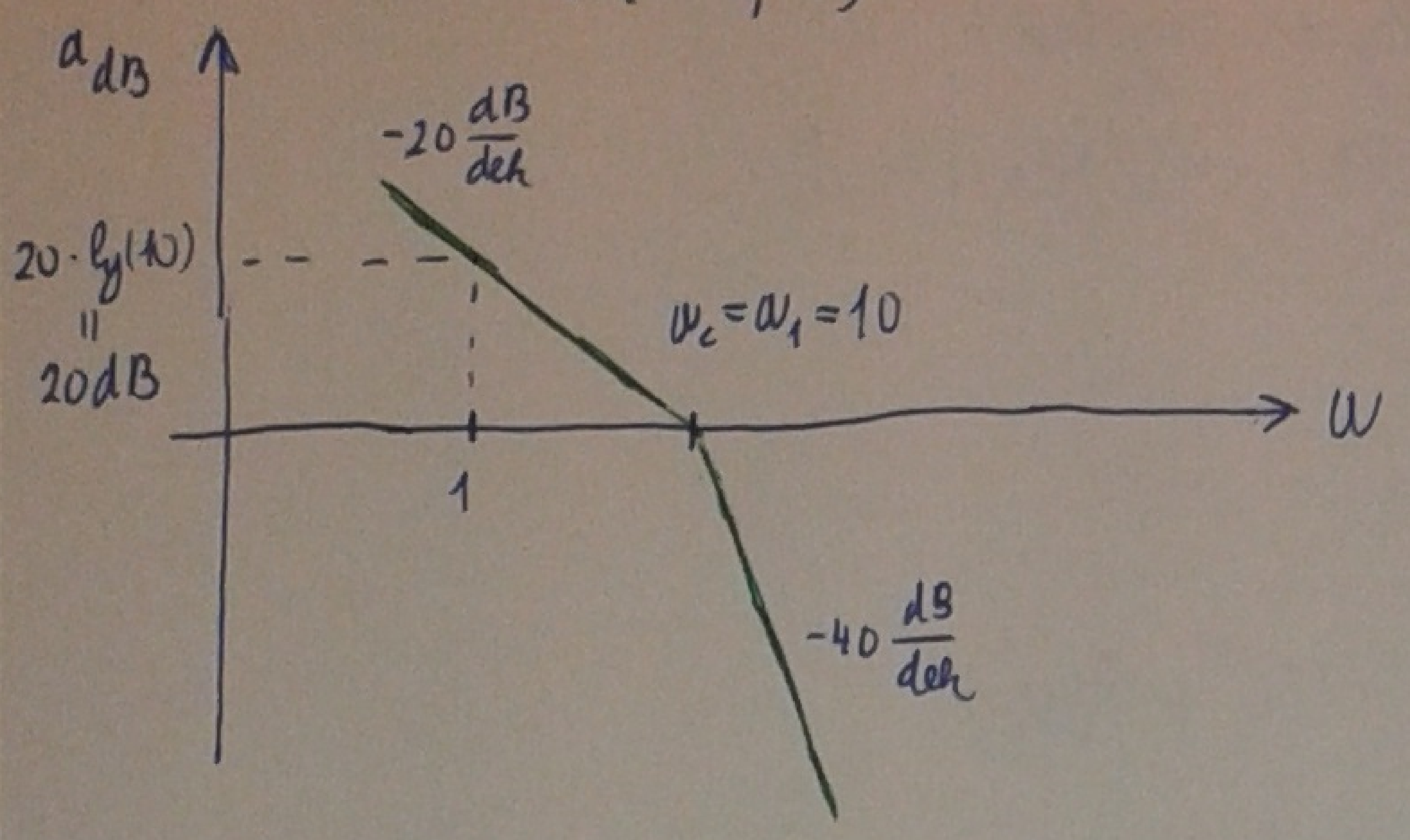
$$\varphi_t = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ + \operatorname{arctg}(10\omega_c) - \operatorname{arctg}(\omega_c) - \operatorname{arctg}(0,2\omega_c) =$$

$$= 90^\circ + \underbrace{\operatorname{arctg}(50)}_{\approx 90^\circ} - \underbrace{\operatorname{arctg}(5)}_{\approx 80^\circ} - \underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{= 45^\circ} \approx 55^\circ > 0$$

$\Downarrow$

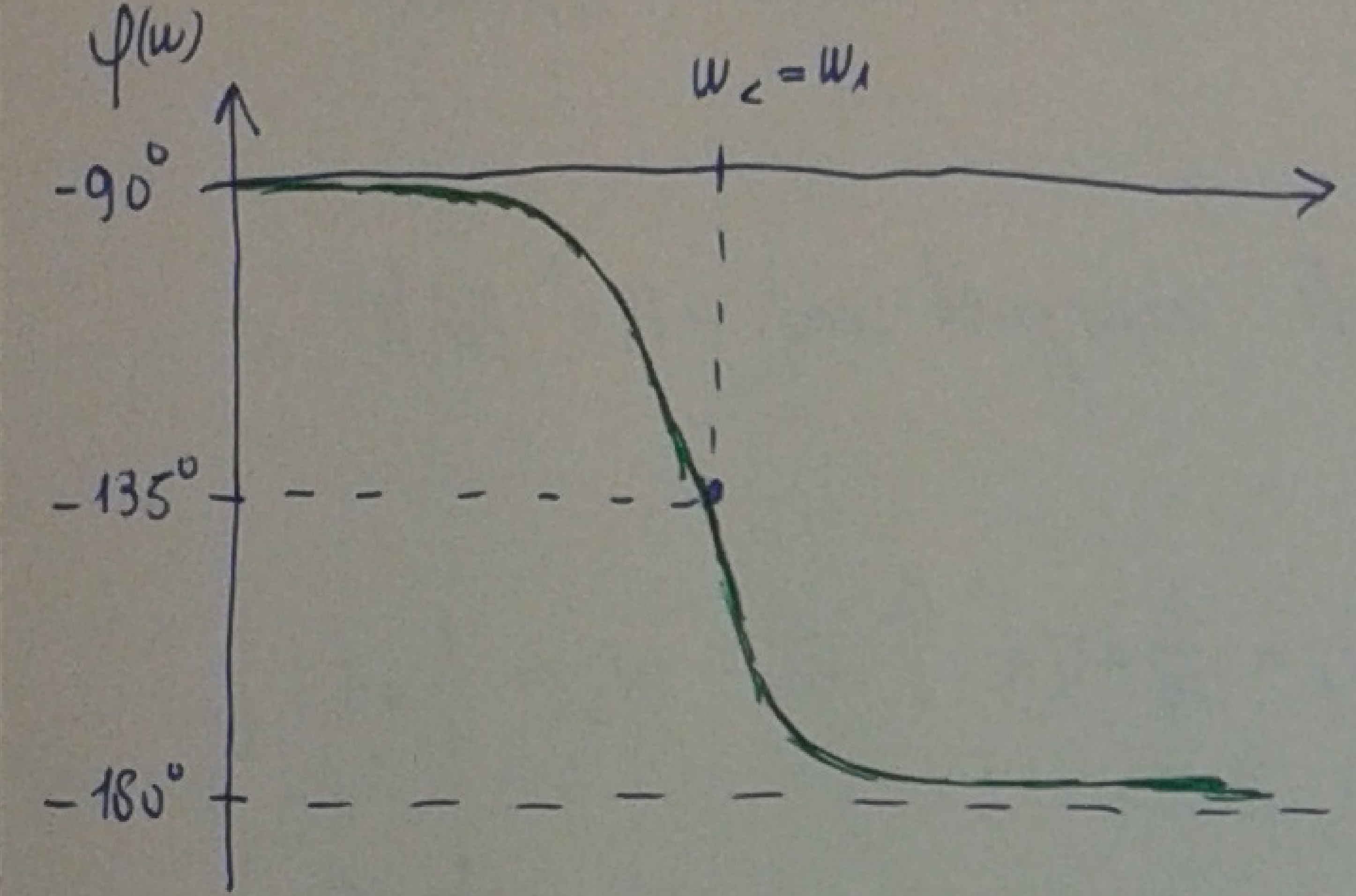
Stabil lesz a zárt rendszer!

(13) $W_0(s) = \dfrac{10}{s\cdot(1+0,1s)}$ => Töréspontok: $\omega_1 = \dfrac{1}{0,1} = 10$ ↓



$\omega_c \approx \omega_1 = 10\ \frac{rad}{sec}$

$\varphi_t \approx 45°$ (ábráról leolvasva)



A zárt kör pólusai az $1+W_0(s)=0$ egyenlet gyökei lesznek!

$$1+\frac{10}{s\cdot(1+0,1s)} = 0$$

$$0,1s^2 + s + 10 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 10\cdot 0,1}}{2\cdot 0,1} = \begin{cases} s_1 = -5+j8,66 \\ s_2 = -5-j8,66 \end{cases}$$

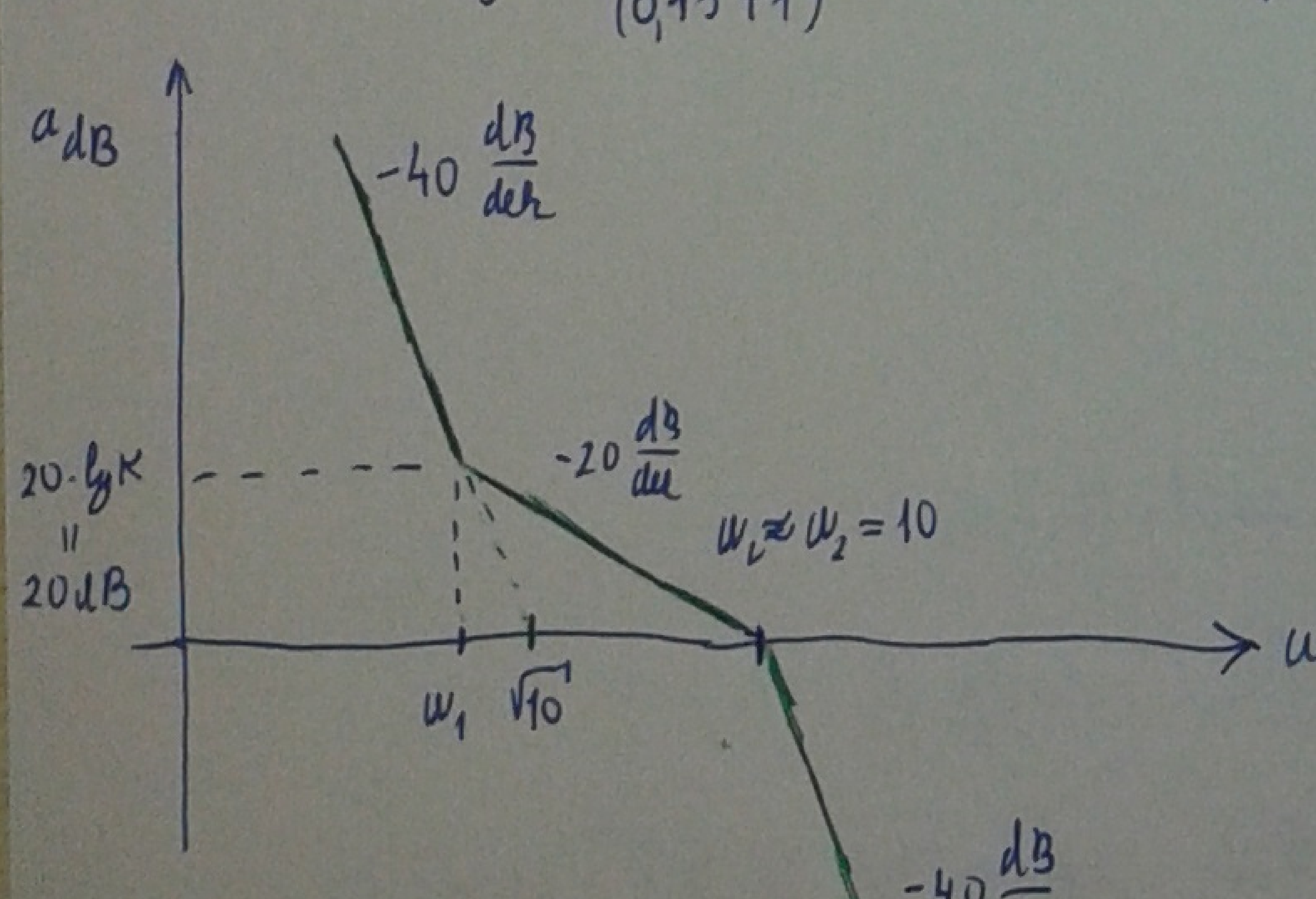
$$0,1s^2+s+10 \approx s^2+2\omega_0\xi s+\omega_0^2$$

$$\underbrace{s^2+10s+100 \approx s^2+2\omega_0\xi s+\omega_0^2}$$

$\omega_0^2 = 100 \Rightarrow \omega_0 = 10\ \frac{rad}{sec}$ ← csillapítatlan sajátfrekvencia

$2\omega_0\xi = 10 \Rightarrow \xi = 0,5$ ← csillapítás

(14) $W_0(s) = \dfrac{10}{s^2}\cdot\dfrac{(s+1)}{(0,1s+1)}$ => Töréspontok: $\omega_1 = \frac{1}{1} = 1$ ↑, $\omega_2 = \frac{1}{0,1} = 10$ ↓



$\omega_c \approx \omega_2 = 10\ \frac{rad}{sec}$

$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) = 180° + [-180° + \mathrm{arctg}(\omega_c) - \mathrm{arctg}(0,1\omega_c)]$

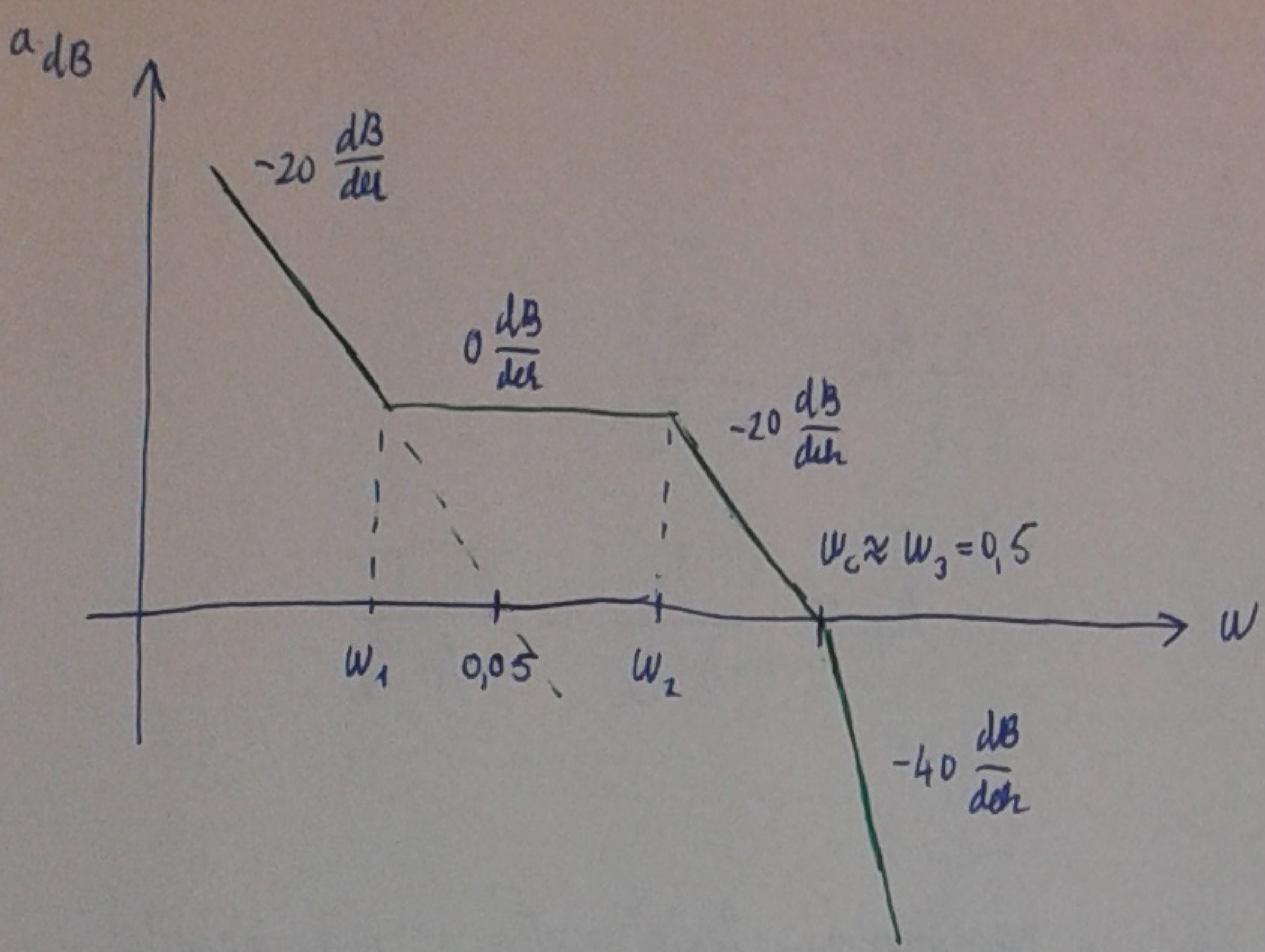
$= \underset{90°}{\underset{\approx}{\mathrm{arctg}(10)}} - \underset{45°}{\underset{\|}{\mathrm{arctg}(1)}} \approx 45°$

(15) $W_0(s) = \frac{0{,}05}{s} \cdot \frac{(100s+1)}{(10s+1)\cdot(2s+1)}$ => Töréspontok:

$\omega_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01 \uparrow$

$\omega_2 = \frac{1}{10} = 0{,}1 \downarrow$

$\omega_3 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \downarrow$



$\omega_c \approx \omega_3 = 0{,}5 \ \frac{rad}{sec}$

$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) =$

$= 180° - 90° + \mathrm{arctg}(100\omega_c) -$

$- \mathrm{arctg}(10\omega_c) - \mathrm{arctg}(2\omega_c) =$

$= 90° + \underbrace{\mathrm{arctg}(50)}_{\approx 90°} - \underbrace{\mathrm{arctg}(5)}_{\approx 80°} - \underbrace{\mathrm{arctg}(1)}_{= 45°} \approx 55°$

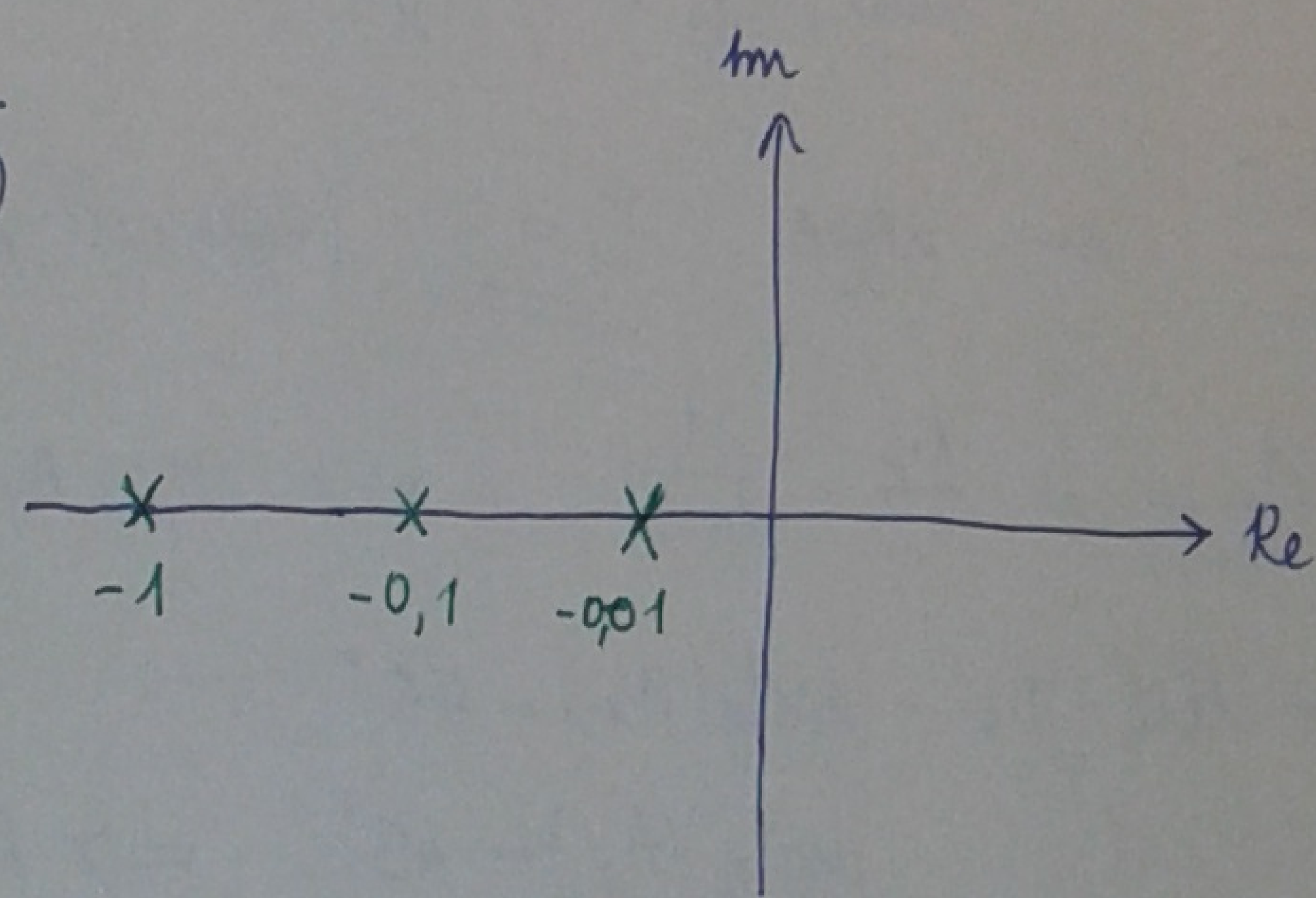
(16) $W_p(s) = \frac{10}{(1+100s)\cdot(1+10s)\cdot(1+s)}$

Zérusok: Nincsenek

Pólusok: $s_1 = -0{,}01$

$s_2 = -0{,}1$

$s_3 = -1$



a, PI esetén: $T_1 = 100$ -at célszerű a szabályzó zérusának választani (leglassabb pólus)

b, Közelítő PD: $T_2 = 10$ -et célszerű a szabályzó zérusának választani (második leglassabb pólus)

c, Közelítő PID: $T_1 = 100$ és $T_2 = 10$ legyen a két zérus! (Két leglassabb pólus kiejtése)

(17) $W_0(s) = \frac{K}{s} \cdot e^{-sT_h}$

$|W_0(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \Rightarrow \omega_c = K$

$\varphi(\omega) = -90° - \omega T_h$

$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) = 180° - 90° - \omega_c T_h \overset{K=\omega_c}{=} 90° - K \cdot T_h = 45°$

$45° = K \cdot T_h$

$\Downarrow$

$K = \omega_c = \frac{45°}{T_h} = \frac{\pi}{4 \cdot T_h}$

(18) $W_P(s) = \frac{A}{1+sT} \cdot e^{-sT_H}$ és $W_{PI}(s) = A_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = \frac{A_P}{T_i} \cdot \frac{(1+sT_i)}{s}$

Legyen $\boxed{T_i = T}$, ezzel kiejtjük a szakasz egyetlen és egyben leglassabb pólusát!

Ekkor: $W_0(s) = W_{PI}(s) \cdot W_P(s) = \frac{A \cdot A_P}{T_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{(1+sT_i)}{(1+sT)} \cdot e^{-sT_H} = \frac{A \cdot A_P}{T} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-sT_H}$

A 17-es feladat alapján teljesülnie kell, hogy: $K = \frac{A \cdot A_P}{T} = \frac{\pi}{4 \cdot T_H}$

$$\boxed{A_P = \frac{\pi \cdot T}{4 \cdot A \cdot T_H}}$$

(19) Ugyanaz, mint a 18-as feladat!

(20) $W_P(s) = \frac{3}{(1+s) \cdot (1+3s)}$ ← Mivel a feladat kéri az egységugrás alapjel esetén a zérus maradó hibát és a szakaszban nincs integrátor, így PI szabályzót kell használnunk!

$W_{PI}(s) = \frac{A_P}{T_i} \cdot \frac{1+sT_i}{s}$ ← Legyen $\boxed{T_i = 3}$ (leglassabb pólus kiejtése)

$W_0(s) = \frac{3 \cdot A_P}{3} \cdot \frac{1}{(s+1) \cdot s} = \frac{A_P}{s} \cdot \frac{1}{1+s}$

$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) = 180° - 90° - \operatorname{arctg}(\omega_c \cdot 1) = 45°$

$\operatorname{arctg}(\omega_c) = 45° \Rightarrow \omega_c = 1$

Továbbá tudjuk, hogy: $|W_0(j\omega_c)| = 1$

$\frac{A_P}{\omega_c \cdot \sqrt{1+\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow A_P = \omega_c \cdot \sqrt{1+\omega_c^2} = 1 \cdot \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2} = A_P}$

(21) $W_P(s) = \frac{1}{s \cdot (1+5s)}$ ← Mivel a szakaszban már alapból van egy integrátor, így egységugrás alapjel esetén alapból zérus a maradó hiba, így PD szabályzót használunk a minimális típusszám miatt! (PI szabályzó ugyanis eggyel növeli a típusszámot)

$W_{PD}(s) = A_P \cdot \left(1 + \frac{sT_d}{1+sT_c}\right) = A_P \cdot \frac{1+s(T_d+T_c)}{1+sT_c} \underset{\substack{\uparrow \\ T_d = 4T_c}}{=} A_P \cdot \frac{1+s \cdot 5 \cdot T_c}{1+sT_c}$ ← Legyen $\boxed{T_c = 1}$

(2. leglassabb pólus kiejtése)
(Mivel csak egy van így csak azt tudjuk)

$W_0(s) = W_{PD}(s) \cdot W_P(s) = \frac{A_P}{s} \cdot \frac{1}{1+s} \Rightarrow \varphi_t = 45°$ tehát $\omega_c = 1$ (Ugyanúgy jön ki mint a 20-asnál)

Tehát, mivel $|W_0(j\omega_c)| = 1$ és $\omega_c = 1 \Rightarrow \boxed{A_P = \sqrt{2}}$ (Lásd 20-as feladat)