1. Alapfogalmak, axiómák

1.1. Definíció: *Véletlen kísérlet: ($\mathfrak{K}$)* olyan folyamat, kísérlet, amelynek kimenetele előre nem mondható meg, csak az, hogy milyen kísérletkimenetelek lehetnek. Akárhányszor megfigyelhető, ill. végrehajtható azonos feltételek mellett.

1.2. Definíció: *Elemi esemény (ω):* a $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

1.3. Definíció: *Eseménytér (Ω):* a $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

1.4. Definíció: *Esemény ($A, B, C, \ldots$):* elemi események halmaza, eseménytér részhalmaza.

1.5. Definíció: Az A esemény *bekövetkezik*, ha a kísérlet végrehajtása során olyan elemi esemény realizálódott, ami A eleme.

1.6. Definíció: Az A esemény *maga után vonja* a B eseményt, ha az A esemény részhalmaza a B eseménynek. **Jelölés**: $A \subseteq B$

1.7. Definíció: Az A és B események *ekvivalensek*, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ teljesül egyszerre. **Jelölés**: $A = B$

1.8. Definíció: *Lehetetlen esemény*nek nevezzük azt, amely a $\mathfrak{K}$ bármely végrehajtása során soha nem fog bekövetkezni. **Jelölés**: $\emptyset$

1.9. Definíció: *Biztos esemény*nek (Ω) nevezzük, azt az eseményt, amelyik a $\mathfrak{K}$ bármely végrehajtása során mindig bekövetkezik.

1.10. Definíció: Egy A esemény *ellentett eseménye* az, amely pontosan akkor következik be, amikor A nem következik be. Jele: $\overline{A}$

1.11. Definíció: Az A és B események *összege*: pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$

1.12. Definíció: Az A és B események *szorzata*: pontosan akkor következik be, amikor A és B egyidejűleg bekövetkezik. Jele: AB

1.13. Definíció: Az A és B események *különbsége*: pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem. Jele: $A \setminus B$

1.14. Tétel: Tetsz. A, B és C eseményekre igazak az alábbiak:

a) $A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C)$

b) $A + A = A$

c) $AB = BA, \quad (AB)C = A(BC)$

d) $AA = A$

e) $A(B + C) = (AB) + (AC)$

f) $A + (BC) = (A + B)(A + C)$

g) $\overline{\overline{A}} = A$

h) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ *(De-Morgan)*

i) $A \cdot \overline{A} = \emptyset, \quad A + \overline{A} = \Omega$

j) $A\Omega = A, \quad A + \Omega = \Omega$

k) $A\emptyset = \emptyset, \quad A + \emptyset = A$

1.15. Definíció: Az A és B események *egymást kizáróak*, ha $AB = \emptyset$.

1.16. Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ események rendszere *teljes eseményrendszer*t alkot, ha $\forall\, i, j$-re $A_i \cdot A_j = \emptyset$, és $\sum\limits_{\forall i} A_i = \Omega$.

1.17. Axióma: A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események $\mathfrak{F}$ rendszere (az ún. *eseményalgebra*) σ-algebra, azaz kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$
2. $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{F}$
3. $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \sum\limits_{\forall i} A_i \in \mathfrak{F}$

1.18. Tétel:

a) $\emptyset \in \mathfrak{F}$

b) $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A + B \in \mathfrak{F}$

c) $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow AB \in \mathfrak{F}$

d) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow \prod\limits_{\forall i} A_i \in \mathfrak{F}$

e) $A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{F}$ és $B \setminus A \in \mathfrak{F}$

1.19. Axióma: Adott egy $\mathbf{P} : \mathfrak{F} \to [0, 1]$ halmazfüggvény, melyet *valószínűség*nek nevezünk. A $\mathbf{P}$ függvény kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

2. Ha $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F}$ páronként egymást kizárják, akkor $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{\forall i} A_i\right) = \sum\limits_{\forall i} \mathbf{P}(A_i)$.

1.20. Definíció: Az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ hármast a $\mathfrak{K}$ véleltlen kísérlethez tartozó *Kolmogorov-féle valószínűségi mező*nek hívjuk.

1.21. Tétel: *Valószínűség tulajdonságai:*

a) $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$

b) $\mathbf{P}(\emptyset) = 1 - \mathbf{P}(\Omega) = 0$

c) Ha $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor $\sum\limits_{\forall i} \mathbf{P}(A_i) = 1$

d) Ha $A \subseteq B$, akkor $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$

e) $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

1.22. Tétel: *Poincaré-tétel*: Ha $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ tetszőlegesek, akkor $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} S_i^n$,

ahol $S_i^n = \sum\limits_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \ldots \cdot A_{j_i})$

1.23. Tétel: *Boole-egyenlőtlenség*: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Akkor minden $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ esetén:

a) $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$

b) $\mathbf{P}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$

1.24. Tétel: *A valószínűség folytonossági tulajdonsága*

a) Ha $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ olyan események, hogy $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$, akkor $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n)$

b) Ha $A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots \supseteq \prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$, akkor $\mathbf{P}\left(\prod\limits_{i=1}^{\infty}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}(A_n)$

2. Kísérletsorozat, az események relatív gyakorisága

2.1. Definíció: Tekintsünk egy $\mathfrak{K}$ véletlen kísérletet, és jelölje $\mathfrak{K}_n$ azt a kísérletet, amely a $\mathfrak{K}$ n-szeres azonos körülmények közötti ismételt végrehajtásából áll. (*n-szeres kísérletsorozat*)

2.2. Definíció: Ha egy n-szeres kísérletsorozatban az A esemény k-szor következett be, akkor k_A az A *gyakorisága*, $r_a(A) = \dfrac{k_A}{n}$ a *relatív gyakorisága*.

2.3. Tétel: adott n-szeres kísérletsorozatnál:

a) $r_n : \mathfrak{F} \to [0, 1]$

b) $r_n(\Omega) = 1$

c) Ha $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ egymást kizáró események, akkor $r_n\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} r_n(A_i)$

3. A feltételes valószínűség és az események függetlensége

3.1. Definíció: Legyenek $A, B \in \mathfrak{F}$ olyan események, hogy A tetszőleges és $\mathbf{P}(B) > 0$. Akkor az A eseménynek a B-re vonatkoztatott *feltételes valószínűségé*n a $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ számot értjük.

3.2. Tétel: Tekintsük az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt, és $B \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(B) > 0$ rögzített. Ekkor a $\mathbf{P}_B(A)$ feltételes valószínűségre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

a) $0 \leq \mathbf{P}_B(A) \leq 1 \qquad (\forall\, A \in \mathfrak{F})$

b) $\mathbf{P}_B(B) = 1, \quad \mathbf{P}_B(\emptyset) = 0$

c) $\forall\, A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F} : A_i \cdot A_j = \emptyset \;\; (i \neq j) \Rightarrow \mathbf{P}_B\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_B(A_i)$

3.3. Definíció: Legyenek $A, B \in \mathfrak{F}$ tetszőleges események. Az A és B események *függetlenek*, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

3.4. Tétel: Ha az $A, B \in \mathfrak{F}$ események függetlenek, akkor A és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B, $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek.

3.5. Tétel: Az $\emptyset$ és Ω események minden $A \in \mathfrak{F}$ eseménytől függetlenek.

3.6. Definíció: Az $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ események *páronként függetlenek*, ha $\mathbf{P}(A_iA_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j) \quad (\forall\, i \neq j)$

3.7. Definíció: Az $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ események *teljesen függetlenek*, ha $\forall\, k \in \{2, \ldots, n\}$ és $\forall\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ indexkombinációra $\mathbf{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k})$

3.8. Tétel: Ha az $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ események teljesen függetlenek $\Rightarrow$ páronként is függetlenek. (Fordítva általában nem igaz)

3.9. Tétel: Ha az $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{F}$ események teljesen függetlenek, akkor közülük bármelyiket az ellentett eseményére felcserélve, újra teljesen független rendszert kapunk.

3.10. Tétel: *Szorzási szabály*: legyenek az $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ tetszőleges események úgy, hogy $\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}\left(A_n \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) \mathbf{P}\left(A_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} A_i\right) \cdots \mathbf{P}(A_2A_1)\mathbf{P}(A_1)$$

3.11. Tétel: *A teljes valószínűség tétele*: Legyen $A_1, \ldots, A_n \ldots \in \mathfrak{F}$ teljes eseményrendszer. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbf{P}(A_i) > 0\ \forall\, i$-re. Ekkor tetszőleges $B \in \mathfrak{F}$ eseményre $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B \mid A_i)\mathbf{P}(A_i)$

3.12. Tétel: *Bayes-tétele*: Alkosson $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F}$ teljes eseményrendszert. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbf{P}(A_i) > 0\ \forall\, i$-re. Ekkor tetszőleges $B \in \mathfrak{F}$ eseményre, ahol $\mathbf{P}(B) > 0$, $\mathbf{P}(A_i \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(B \mid A_i)\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(B \mid A_j)\mathbf{P}(A_j)}$

4. A valószínűségi változó

4.1. Definíció: A balról zárt, jobbról nyílt valós intervallumok által generált σ-algebrát *Borel-féle* σ-algebrának nevezzük, és $\mathfrak{B}$-vel jelöljük: $\mathfrak{B} = \sigma(\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\})$

4.2. Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi változó*nak nevezzük, ha minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén $A = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$

5. Az eloszlásfüggvény

5.1. Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, X valószínűségi változó.

Ekkor a $Q_X(B) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbf{P}(X \in B)$, $(b \in \mathfrak{B})$ az X valószínűségi változó eloszlása.

5.2. Tétel: *A Q_X halmazfüggvény tulajdonságai*:

a) $Q_X(\mathbb{R}) = 1$

b) Ha $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ diszjunkt Borel-halmazok, akkor $Q_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_X(B_i)$

5.3. Definíció: Az $F_X(x) = Q_X((-\infty, x)), x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó *eloszlásfüggvényé*nek nevezzük.

5.4. Tétel: A valószínűségi változó eloszlása és eloszlásfüggvénye kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

5.5. Tétel: *Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai*:

a) F_X monoton nő, azaz $(F_X(x) \leq F_X(y))$, ha $x < y$

b) F_x balról folytonos, azaz $\lim_{x \to y-} F_X(x) = F_X(y)\ \forall\, y \in \mathbb{R}$-re

c) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

5.6. Tétel: tetszőleges $x < y$ esetén

a) $\mathbf{P}(x \leq X < y) = F_X(y) - F_X(x)$

b) $\mathbf{P}(x < X < y) = F_X(y) - F_X(x + 0)$

c) $\mathbf{P}(x \leq X \leq y) = F_X(y + 0) - F_X(x)$

d) $\mathbf{P}(x < X \leq y) = F_X(y + 0) - F_X(x + 0)$

e) $\mathbf{P}(X = x) = F_X(x + 0) - F_X(x)$

6. Diszkrét valószínűségi változók

6.1. Definíció: Az X valószínűségi változót *diszkrét*nek nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható, vagyis $\forall\, \omega \in \Omega$-ra $X(\omega) \in E = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$

6.2. Definíció: A $p_i = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = \mathbf{P}(X = x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ valószínűségek összességét az X diszkrét v.v. *eloszlásá*nak nevezzük.

6.3. Tétel: Az X diszkrét v.v. $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ eloszlására teljesül, hogy

a) $0 \le p_i \le 1$

b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

6.4. Tétel: Az X diszkrét v.v. F_X eloszlásfüggvényére: $F_X(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, másrészt: $p_i = F_X(x_i + 0) - F(x_i)$

7. Nevezetes diszkrét eloszlások

Binomiális eloszlás

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \mathfrak{F}$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Hajtsunk végre egy n-szeres kísérletsorozatot. Vegye fel X azt az értéket, ahányszor A bekövetkezett a kísérletsorozatban. X lehetséges értékei: $0, 1, \ldots, n$. Az egyes értékek felvételének valószínűségei, azaz X eloszlása: $p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Jelölés: $X \in B(n, p)$

Geometriai eloszlás

Legyen $\mathfrak{K}$ egy véletlen kísérlet, és $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ a hozzátartozó Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \mathfrak{F}$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. A $\mathfrak{K}$ kísérlethez tartozó kísérletsorozatot addig hajtsuk végre, amíg az A esemény be nem következik. Az X v.v-t értelmezzük úgy, mint az A esemény bekövetkezéséhez szükséges ismétlések számát. X-et p paraméterű *geometriai eloszlású* v.v-nak nevezzük.

Jelölés: $X \in G(p)$

7.1. Tétel: *A geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága*

$\mathbf{P}(X = m + k \mid X > m) = \mathbf{P}(X = k), \forall\ m, k$-ra, azaz annak a feltételes valószínűsége, hogy a következő k végrehajtás végén bekövetkezik A esemény, amennyiben előző m megfigyelés alatt nem következett be, ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy éppen a k-adik végrehajtás után következik be az A esemény.

8. Folytonos valószínűségi változók

8.1. Definíció: Legyen X az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett v.v., melynek értékkészlete kontinuum számosságú. Jelölje F_X az eloszlásfüggvényt. X-et folytonos v.v-nek nevezzük, ha F_X abszolút folytonos, azaz létezik olyan Riemann integrálható $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre fennáll az $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ \mathrm{d}t$ $(x \in \mathbb{R})$ összefüggés.

Az f_X függvényt az X v.v. (vagy az F_X eloszlásfüggvény) *sűrűségfüggvény*ének nevezzük. Ha F_X abszolút folytonos, akkor folytonos is és majdnem mindenütt differenciálható, azaz pl. véges sok helyen lehet csak töréspontja. $\dfrac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = f_X(x)$, ha x folytonossági pontja f_X-nek.

8.2. Tétel: *A sűrűségfüggvény tulajdonságai*

Legyen X az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett folytonos v.v. Akkor az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy

a) $f_X(x) \ge 0$

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ \mathrm{d}t = 1$

9. Nevezetes folytonos eloszlások

Az egyenletes eloszlású valószínűségi változó

Az X az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Jelölés: $X \in U([a, b])$.

Ekkor a sűrűségfüggvény:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Az exponenciális eloszlású valószínűségi változó

Az X v.v. $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Jelölés: $X \in E(\lambda)$.

A sűrűségfüggvény:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{egyebkent} \end{cases}$$

9.1. Tétel: *Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága*

Legyen X folytonos eloszlású v.v. $\mathbf{P}(X < x) = F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Akkor $\mathbf{P}(x < x + t \mid X \geq x) = \mathbf{P}(X < t)$ $\forall\ 0 < x, t$-re $\iff \exists\ \lambda > 0 : F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$, vagyis $X \in E(\lambda)$

A normális eloszlású valószínűségi változó

Az X v.v. $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású, ha eloszlásfüggvénye: $F_X(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R}$.

Jelölés: $X \in N(\mu, \sigma)$

Az X sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Ha $X \in N(0,1)$, akkor *standard* normális eloszlás. Ilyenkor $\varphi_{0,1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ és $\Phi_{0,1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

9.2. Tétel: *A φ Gauss-függvény tulajdonságai*

a) $\varphi(-x) = \varphi(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(0) \geq \varphi > 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$

d) φ inflexiós helyei a $+1$ és -1 ($\varphi^n(-1) = \varphi(+1) = 0$)

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$

9.3. Tétel: *A Φ eloszlásfüggvény tulajdonságai*

a) $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \forall\ x > 0$, azaz Φ grafikonja szimmetrikus a $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$-ra

b) Φ szigorúan monoton növekvő

c) $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \dfrac{x^3}{1! \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{k! 2^k (2k+1)} + \ldots \right), \ \forall\ x > 0$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 1, \lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$

10. A várható érték

10.1. Definíció:

a) Az X diszkrét v.v-nak akkor létezzék *várható értéke*, ha a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$ sor konvergens. Ekkor az X várható értékén az $\mathbb{E}X = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$ sorösszeget értjük.

b) Az X folytonos v.v-nak akkor létezzék *várható értéke*, ha az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x$ konvergens. Ekkor az X várható értékén az $\mathbb{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x$ számot értjük.

10.2. Tétel: Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetsz. valós függvény. Ekkor, ha az $Y = g(X)$ v.v., és létezik a várható értéke, akkor

a) ha X diszkrét: $\mathbb{E}Y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$

b) ha X folytonos: $\mathbb{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x$

10.3. Tétel: Legyen az X v.v-nak várható értéke $\mathbb{E}X$. Ekkor az $Y = a \cdot X + b$ v.v-nak is létezik várható értéke, és $\mathbb{E}Y = a \cdot \mathbb{E}X + b$.

11. Magasabb momentumok, szórásnégyzet

11.1. Definíció: Az X v.v *n-edik momentum*án az X^n v.v. várható értékét értjük, ha az létezik. **Jelölés:** $\mu_n = \mathbb{E}X^n$.

11.2. Definíció: Az X v.v *szórásnégyzet*én vagy *varianciá*ján az $Y = (X - \mathbb{E}X)^2$ v.v várható értékét értjük. **Jelölés:** $\sigma^2 X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$

Az X v.v. *szórás*a a szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke: $\sigma X = \sqrt{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}$

11.3. Tétel: Legyen X olyan v.v., melynek létezik szórásnégyzete. Ekkor minden valós x esetén: $\sigma^2 X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \leq \mathbb{E}(X - x)^2$

11.4. Tétel: $\sigma^2 X = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$

11.5. Tétel: *Steiner formula*

$\sigma^2 X = \mathbb{E}(X - a)^2 - [\mathbb{E}(X - a)]^2$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. Speciálisan $a = 0$-ra: $\mathbb{E}X^2 - [\mathbb{E}X]^2$

11.6. Tétel: $\sigma^2(\alpha X + b) = \alpha^2 \sigma^2 X, \ \forall\, \alpha, b \in \mathbb{R}$

11.7. Definíció: Egy X v.v. *standardizáltján* az $\tilde{X} = \dfrac{X - \mathbb{E}X}{\sigma X}$ lineáris transzformált v.v-t értjük.

12. Nevezetes eloszlások várható értékei és szórásnégyzetei

Binomiális eloszlás	$\mathbb{E}X = np$	$\sigma^2 X = npq$
Poisson-eloszlás	$\mathbb{E}X = \lambda$	$\sigma^2 X = \lambda$
Geometriai eloszlás	$\mathbb{E}X = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$	$\sigma^2 X = \dfrac{1-p}{p^2}$
Egyenletes eloszlás	$\mathbb{E}X = \dfrac{a+b}{2}$	$\sigma^2 X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális eloszlás	$\mathbb{E}X = \dfrac{1}{\lambda}$	$\sigma^2 X = \dfrac{1}{\lambda^2}$
Normális eloszlás		
$X \in N(0,1)$	$\mathbb{E}X = 0$	$\sigma^2 X = 1$
$X \in N(\mu, \sigma)$	$\mathbb{E}X = \mu$	$\sigma^2 X = \sigma^2$

13. Valószínűségi vektorváltozók, valószínűségi változók együttes eloszlása

13.1. Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Tekintsük az $\underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ függvényt. Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó, ha minden $B \in \mathfrak{B}^p$ p-dimenziós Borel-halmazra: $\{\omega : \underline{X}(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$ teljesül.

13.2. Definíció: A $Q_{\underline{X}}(B) = \mathbf{P}(\{\omega : \underline{X}(\omega) \in B\}), B \in \mathfrak{B}^p$ az $\underline{X}$ v.v. *eloszlás*a.

13.3. Definíció: Legyen $(x_1, \ldots, x_p)^T = \underline{x} \in \mathbb{R}^p$, és a hozzátartozó p-dimenziós Borel-halmaz $B_{\underline{x}} = (-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_p)$. Ekkor az $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) = Q_X(B_{\underline{x}}) = \mathbf{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_p < x_p)$ függvényt az $\underline{X}$ v.v.v. *eloszlásfüggvény*ének, ill. az $X_1, \ldots, X_p$ komponens v.v-k *együttes eloszlásfüggvény*ének nevezzük.

13.4. Tétel: *Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai*

a) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nem csökkenő függvény, azaz $\forall\, i$-re, ha $x_i^* < x_i^{**}$, akkor $F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i^*, \ldots, x_p) \leq F_{\underline{X}}(x_1 \ldots, x_i^{**}, \ldots, x_p)$.

b) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{y \to x_i^0 - 0} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, y, \ldots, x_p) = F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i^0, \ldots, x_p)$

c) $\lim\limits_{\forall x_i \to \infty} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 1$ és $\lim\limits_{\exists x_i \to -\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$

d) Legyen $T = [a, b) \times [c, d)$ tetszőleges $p = 2$ dimenziós tégla. Ekkor $F_{\underline{X}}(a, c) + F_{\underline{X}}(b, d) - F_{\underline{X}}(a, d) - F_{\underline{X}}(b, c) \geq 0$.

13.5. Definíció: Ha $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ v.v.v. eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$ és $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k}$ komponens v.v-k együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k-dimenziós *perem-* vagy *vetületi eloszlásfüggvénye*.

13.6. Definíció: Legyenek $X_1, \ldots, X_p$ v.v. az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle v.m-n.

a) $X_1, \ldots, X_p$, *páronként függetlenek*, ha $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$-re $F_{X_i, X_j}(x, y) = F_{X_i} \cdot F_{X_j}$ teljesül $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$-re.

b) $X_1, \ldots, X_p$ *teljesen függetlenek*, ha $\forall\ 2 \leq k \leq p$ és $\forall\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq p$ indexkombinációra $F_{X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}, \forall\ x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in \mathbb{R}$-re.

13.7. Tétel: Ha $X_1, \ldots, X_p$ teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. (megfordítás általában nem igaz)

14. Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása

14.1. Definíció:

a) Ha X és Y diszkrét v.v-k $E = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ ill. $D = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ értékkészletekkel, akkor az $r_{ij} = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega : Y(\omega) = y_j\}) = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ valószínűségek összességét a két diszkrét v.v. *együttes eloszlásá*nak nevezzük.

b) Az $X_1, \ldots, X_p$ diszkrét v.v. értékkészleteit jelölje rendre $e^{(i)} = \left\{x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(i)}\right\}$ $(i = 1, \ldots, p)$.
Ekkor az $r_{i_1, \ldots, i_p} = \mathbf{P}(X_1 = x_{i1}^{(1)}, \ldots, X_p = x_{ip}^{(p)})$ valószínűségek összessége az $X_1, \ldots, X_p$ diszkrét v.v-k *együttes eloszlása*.

14.2. Definíció: Ha adott az $X_1, \ldots, X_p$ diszkrét v.v-k $\left\{r_{i_1, \ldots, i_p} = \mathbf{P}(X_1 = x_{i1}^{(1)}, \ldots, X_p = x_{ip}^{(p)}),\ \forall\ i_k\right\}$ együttes eloszlása, és $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq p$, akkor az $X_{j1}, \ldots, X_{jk}$ diszkrét v.v-k együttes eloszlását *k-dimenziós vetületi-* vagy *peremeloszlás*nak nevezzük.

14.3. Tétel: A diszkrét v.v-k együttes eloszlása kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

a) $0 \leq r_{i_1, \ldots, i_p} \leq 1$

b) $\sum\limits_{\forall i_1, \ldots, i_p} r_{i_1, \ldots, i_p} = 1$

c) $\mathbf{P}(X_{j_1} = x_{j_1}, \ldots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \sum\limits_{\forall i_l \notin \{j_1, \ldots, j_k\}} r_{i_1, \ldots, i_p}$

14.4. Tétel:

a) Az X és Y diszkrét v.v-k függetlenek, ha $\forall\ i, j$-re $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i) \cdot \mathbf{P}(Y = y_j)$.

b) Az $X_1, \ldots, X_p$ diszkrét v.v-k teljesen függetlenek, ha $\forall\ 2 \leq k \leq p$-re és $\forall\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq p$ esetén
$\mathbf{P}(X_{j_1} = x_{j_1}, \ldots, X_{j_k} = x_{j_k}) = \prod\limits_{\alpha=1}^{k} \mathbf{P}(X_{j_\alpha} = x_{j_\alpha})$

Polinomiális eloszlás

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{F}$ egy r eseményből álló teljes eseményrendszer, azaz $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $\sum\limits_{i=1}^{r} A_i = \Omega$. Ekkor, ha $0 < \mathbf{P}(A_i) = p_i$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$. Hajtsunk végre egy n-szeres kísérletsorozatot. Vegye fel X_i azt az értéket, ahányszor A_i bekövetkezett a kísérletsorozatban. Az $X_1, \ldots, X_r$ v.v-k együttes eloszlását $n, p_1, \ldots, p_r$ paraméterű polinomiális eloszlásnak nevezzük. $X_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ és $\sum\limits_{i=1}^{r} X_i = n$. Az $X_1, \ldots, X_r$ v.v-k együttes eloszlása: $\mathbf{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \dfrac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$.

15. Folytonos valószínűségi változók együttes eloszlása

15.1. Definíció: $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ folytonos v.v-k *együttes sűrűségfüggvényén* azt az $f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, \ldots, x_p)$ Riemann-integrálható függvényt értjük, melyre:

$F_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, \ldots, x_p) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_p} f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(t_1, \ldots, t_p)\, \mathrm{d}t_p \ldots \mathrm{d}t_1$, ha $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ folytonossági pontja $f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, \ldots, x_p)$-nek.

15.2. Definíció: Az $f_{X_1, \ldots, X_p}(x_1, \ldots, x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy *k-dimenziós vetületi sűrűségfüggvényén* $(2 \leq k \leq p-1)$ valamely $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq p$ indexkombinációra az $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ v.v-k együttes sűrűségfüggvényét értjük.

15.3. Tétel: $f_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}(t_{i_1},\dots,t_{i_k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\dots,X_p}(t_1,\dots,t_p)\ \mathrm{d}t_{j_1}\dots\mathrm{d}t_{j_{p-k}}$, azaz az együttes sűrűségfüggvényt az összes többi - a kiválasztott indexkombinációban nem szereplő - indexhez tartozó változóra kell kiintegrálni a teljes számegyenesen hogy előállítsuk a k-dimenziós vetületi sűrűségfüggvényt.

Kétdimenziós normális eloszlás

Ha X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-\varrho^2}}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)}$$

$x,y \in \mathbb{R}$ alakú, akkor a két valószínűségi változó együttes eloszlása kétdimenziós normális, ahol a peremeloszlásokra $X \in N(\mu_1,\sigma_1)$, $Y \in N(\mu_2,\sigma_2)$ teljesül.

15.4. Tétel: Legyenek $X_1,\dots,X_p$ folytonos v.v-k.

a) $X_1,\dots,X_p$ páronként függetlenek $\Longleftrightarrow \forall\ 1 \le i < j \le n$-re: $f_{X_i,X_j}(x,y) = f_{X_i}(x)\cdot f_{X_j}(y) \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}$-re.

b) $X_1,\dots,X_p$ teljesen függetlenek $\Longleftrightarrow\ \forall\ 2 \le k \le p$ és $\forall\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le p$ indexkombinációra:

$f_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) = \prod\limits_{i=0}^{k} f_{X_{i_j}}(x_{i_j}),\ \forall\ x_{i_1},\dots,x_{i_k} \in \mathbb{R}$.

15.5. Tétel: *Az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai*

a) $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \ge 0,\ (\forall\ \underline{t})$

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{t})\ dt_1\dots dt_n = 1 \qquad \left(\lim\limits_{\forall t_i\to\infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1\right)$

16. Valószínűségi vektorváltozók transzformációi

16.1. Tétel: *Két folytonos v.v. összegének eloszlása*

Legyen X és Y v.v. az $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket. Ekkor a $Z = X+Y$ v.v. sűrűségfüggvénye:

$$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,x-t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x-t,t)\ \mathrm{d}t$$

Ha X és Y függetlenek is, akkor

$$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\cdot f_Y(x-t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t)\cdot f_Y(t)\ \mathrm{d}t$$

Utóbbi esetben f_Z az f_X és f_Y sűrűségfüggvények *konvolúciója*.

16.2. Tétel: *Két folytonos v.v. különbségének eloszlása*

Legyen x és Y v.v. az $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket. Ekkor a $Z = X-Y$ v.v. sűrűségfüggvénye:

$$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,x+t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x+t,t)\ \mathrm{d}t$$

Ha X és Y függetlenek is, akkor

$$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\cdot f_Y(x+t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x+t)\cdot f_Y(t)\ \mathrm{d}t$$

16.3. Tétel: *Diszkrét v.v-k összegének eloszlása*

Ha X és Y diszkrét nemnegatív egészértékű v.v-k, akkor $Z = X+Y$ szintén diszkrét nemnegatív egészértékű v.v., melynek eloszlása:

$$\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{\alpha=0}^{k}\mathbf{P}(X=\alpha, Y=k-\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{k}\mathbf{P}(X=k-\alpha, Y=\alpha),\ k=0,1,\dots$$

Ha X és Y függetlenek is, akkor

$$\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{\alpha=0}^{k}\mathbf{P}(X=\alpha)\mathbf{P}(Y=k-\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{k}\mathbf{P}(X=k-\alpha)\mathbf{P}(Y=\alpha)$$

16.4. Tétel:

a) Az $X_1,\dots,X_p$ diszkrét v.v-k értékkészleteit jelölje rendre $R^{(i)} = \left\{x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\dots\right\}$ $(i=1..p)$, együttes eloszlásukat pedig

$\left\{r_{i_1,\ldots,i_p} = \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, X_p = x_{i_p}^{(p)})\right\}$. Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tetszőleges p-változós valós függvény. Ekkor az $Y = g(X_1, \ldots, X_p)$ v.v. és létezik a várható értéke:

$\mathbb{E}Y = \sum\limits_{\forall(i,\ldots,i_p)} \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, X_p = x_{i_p}^{(p)})$

b) Az $X_1, \ldots, X_p$ folytonos v.v-k együttes sűrűségfüggvényét jelölje $f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p)$. Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tetszőleges p-változós valós függvény. Ekkor az $Y = g(X_1, \ldots, X_p)$ v.v. és létezik a várható értéke:

$\mathbb{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_p) \cdot f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p)\ \mathrm{d}x_p \ldots\ \mathrm{d}x_1$

16.5. Tétel: Az $Y = X_1 + \ldots + X_p$ v.v. várható értéke létezik, amennyiben az X_i tagok várható értéke létezik, és $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_p$.

16.6. Tétel: Legyenek az X és Y v.v-k függetlenek, és létezzék a várható értékük. Ekkor a $Z = XY$ v.v-nek is létezik a várható értéke, és $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

16.7. Tétel: Legyenek az X és Y v.v-k függetlenek, és létezzék a szórásnégyzetük. Ekkor $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y$.

17. Konvolúció

17.1. Definíció: Legyen $Z = X + Y$, ahol X, Y független v.v-k. Ekkor Z eloszlását az X és Y *konvolúciós eloszlásá*nak nevezzük.

a) Diszkrét eset: X, Y függetlenek, $R_x, R_y \subseteq \mathbb{Z},\ Z = X + Y,\ R_z \subseteq \mathbb{Z}$

tfh. $X, Y \geq 0$ ($\Rightarrow Z \geq 0$) $\mathbf{P}(Z = k) = \sum\limits_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l, Y = k - l) = \sum\limits_{l=0}^{k} \mathbf{P}(X = l) \cdot \mathbf{P}(Y = k - l)$

b) Folytonos eset: X, Y folytonos, függetlenek $f_{X,Y}(t, s) = f_X(t) \cdot f_y(s)\ \forall\ t, s$

$Z = X + Y :\ f_Z(u) = f_{X+Y}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u - s)\ \mathrm{d}s$

18. A kovariancia és a korrelációs együttható

18.1. Definíció: Legyenek X és Y v.v-k az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Tegyük fel, hogy létezik a szórásnégyzetük. Ekkor az X és Y *kovarianciá*ján a $Z = (X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)$ v.v. várható értékét értjük.

Jelölés: $\mathbf{cov}(X, Y)$

Megjegyzés: $\mathbf{cov}(X, X) = \sigma^2 X$

18.2. Definíció: Az X és Y v.v-k *korrelációs együtthatóján* standardizáltjaik kovarianciáját értjük.

Jelölés: $\mathbf{R}(X, Y) = \mathbf{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \dfrac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\sigma X \cdot \sigma Y}$

18.3. Tétel: $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

18.4. Tétel: Ha X és Y függetlenek $\Rightarrow$ $\mathbf{cov}(X, Y) = 0,\ \mathbf{R}(X, Y) = 0$.

18.5. Definíció: Az X és Y v.v-k *korrelálatlanok*, ha $\mathbf{R}(X, Y) = \mathbf{cov}(X, Y) = 0$.

18.6. Tétel: Ha X és Y v.v-k szórásnégyzetei léteznek, úgy $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 \pm 2 \cdot \mathbf{cov}(X, Y)$.

18.7. Tétel: $\sigma^2\left(\sum\limits_{i=1}^{p} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \sigma^2 X_i + 2 \cdot \sum\limits_{i<j} \mathbf{cov}(X_i, X_j)$.

18.8. Tétel: Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbf{cov}(aX + bY, Z) = a \cdot \mathbf{cov}(X, Z) + b \cdot \mathbf{cov}(Y, Z)$.

18.9. Tétel: Ha az X és Y v.v-k szórásnégyzetei léteznek, akkor $-1 \leq \mathbf{R}(X, Y) \leq 1$.

18.10. Következmény: $|\mathbf{cov}(X, Y)| \leq \sigma X \cdot \sigma Y$

18.11. Tétel: Ha az X és Y v.v-k szórásnégyzetei léteznek, akkor $\mathbf{R}(X, Y) = \pm 1 \iff \exists\ a, b \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$.

18.12. Definíció: Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ v.v. *várható érték vektorán* a komponens v.v-k várható értékeiből álló vektort értjük: $\mathbb{E}(\underline{X}) = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_p)^T$.

18.13. Definíció: Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ v.v. *kovarianciamátrix*án a $\underline{\underline{\sum}} = (\mathbf{cov}(X_i, X_j))$ $(i = 1 \ldots p, j = 1 \ldots p)$ $p \times p$-s mátrixot értjük.

18.14. Tétel: $\underline{\underline{\sum}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit.

19. A feltételes várható érték

Diszkrét eset:

19.1. Definíció:

a) Legyen $A \in \mathfrak{F}, \mathbf{P}(A) > 0$ tetszőleges esemény, $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ pedig egy tetszőleges diszkrét v.v. Ekkor $\mathbf{P}(X = x_i | A) = \dfrac{\mathbf{P}(X = x_i, A)}{\mathbf{P}(A)}$, $i = 1, 2, \ldots$ az X *feltételes eloszlása* A-ra nézve.

b) Legyen $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F}$ egy teljes eseményrendszer, $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ pedig egy tetszőleges diszkrét v.v. Ekkor a $\{\{\mathbf{P}(X = x_i | A_j), i = 1, 2, \ldots\}, j = 1, 2, \ldots\}$ eloszlásokat az X-nek az $\{A_j, j = 1, 2, \ldots\}$ rendszerre vonatkozó *feltételes eloszlásának* nevezzük.

c) Legyen $X\{x_1, x_2, \ldots\}$ és $Y \in \{y_1, y_2, \ldots\}$ diszkrét v.v. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$-n. Ekkor a $\{\{\mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j), i = 1, 2, \ldots\}, j = 1, 2, \ldots\}$ eloszlásokat az X-nek az Y-ra vonatkozó *feltételes eloszlásának* nevezzük.

19.2. Definíció:

a) $\mathbb{E}(X \mid Y = y_j) \triangleq \sum\limits_{\forall\ x_i} x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \triangleq r(y_j)$, az X *feltételes várható értéke az* $Y = y_j$ *feltétel mellett.*

b) Az *X-nek az Y-ra vonatkozó regresszióján*, vagy *feltételes várható értékén* azt az $\mathbb{E}(X \mid Y)$-vel jelölt diszkrét v.v-t értjük, melynek értékkészlete $K = \{r(y_j) \triangleq \mathbb{E}(X \mid Y = y_j), j = 1, 2, \ldots\}$, eloszlása pedig $\mathbf{P}(\mathbb{E}(X \mid Y) = r(y_j)) = \mathbf{P}(Y = y_j), j = 1, 2, \ldots$

Folytonos eset:

Legyen X és Y folytonos v.v. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$-n $F_{X,Y}(x, y)$ és $f_{X,Y}(x, y)$ együttes eloszlás-, ill. együttes sűrűségfüggvénnyel. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$\mathbf{P}(X < x \mid y \le Y < y + \Delta y) \to \frac{\dfrac{\partial F_{X,Y}(x, y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$$

19.3. Definíció: Az $F_{X|Y}(x|y) \triangleq \dfrac{\dfrac{\partial F_{X,Y}(x, y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$ kétváltozós függvényt az X-nek az Y-ra vonatkozó *feltételes sűrűségfüggvényének* nevezzük: $f_{X\ |\ Y}(x \mid y) \triangleq \dfrac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$

19.4. Definíció: Az X-nek az Y-ra vonatkozó *feltételes várható értékén* vagy *regresszióján* az $\mathbb{E}(X \mid Y) = r(Y)$ v.v-t értjük, ahol $r(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)\, \mathrm{d}x$ a *regressziós görbe.*

19.5. Tétel: *A regresszió tulajdonságai*:

a) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}X$

b) $\mathbb{E}(h(Y) \cdot X|Y) = h(Y) \cdot \mathbb{E}(X|Y)$

c) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

19.6. Tétel: Legyen $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor $\mathbb{E}(X - r(Y))^2 \le \mathbb{E}(X - d(Y))^2$, ahol $r(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$. Speciálisan, ha $d(y) \equiv \mathbb{E}X$, akkor $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|Y))^2 \le \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \sigma^2 X$

19.7. Definíció: Legyen X és Y két adott valószínűségi változó. Az $a^*X + b^*$ v.v. az Y-nak X-re vonatkozó *lineáris regresszió*ja, ha $\mathbb{E}(Y - a^*X - b^*) = \min\limits_{\forall\ a,b \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(Y - aX - b)$.

19.8. Tétel: $a* = \mathbf{R}(X, Y)\dfrac{\sigma Y}{\sigma X}, b^* = \mathbb{E}Y - \mathbf{R}(X, Y)\dfrac{\sigma Y}{\sigma X}\mathbb{E}X$

20. Nevezetes egyenlőtlenségek

20.1. Tétel: *Markov-egyenlőtlenség*:

Legyen $Y \ge 0$ olyan v.v., melynek létezik a várható értéke: $\mathbb{E}Y \ge 0$. Ekkor $\forall\ \delta > 0$ esetén $\mathbf{P}(Y > \delta) \le \dfrac{\mathbb{E}Y}{\delta}$.

20.2. Tétel: *Csebisev-egyenlőtlenség*:

Legyen X olyan v.v., melynek véges a szórásnégyzete: $\sigma^2 X < \infty$. Ekkor $\forall\ \epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}X| \ge \epsilon) \le \dfrac{\sigma^2 X}{\epsilon^2}$.

21. Valószínűségi változók sorozatainak konvergenciái

21.1. Definíció: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ és X v.v-k az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy

a) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v. sorozat *egy valószínűséggel konvergál* X-hez, ha az $A = \left\{\omega; \lim\limits_{n \to\ \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$ esemény egy valószínűségű: $\mathbf{P}(A) = 1$.
Jelölés: $X_n \to^{1v} X$

b) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v. sorozat L_r-ben (vagy *r-edik momentumban*) tart X-hez, ha $\mathbb{E}(|X_n - X|^r) \to 0 \ (n \to \infty)$.
Jelölés: $X_n \to^{L_r} X$

c) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v. sorozat *sztochasztikusan konvergál* X-hez, ha $\forall\, \epsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(\{\omega; |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) \to 0 \ (n \to \infty)$
Jelölés: $X_n \to^{st} X$

d) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v. sorozat *eloszlásban konvergál* X-hez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$-ben, ahol $F_X(x)$ folytonos.
Jelölés: $X_n \to^e X$

21.2. Tétel:

a) Az eloszlásban való konvergenciából nem következik egyik másik sem.

b) A sztochasztikus konvergenciából következik az eloszlásban való konvergencia.

c) Az L_1-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia (így az eloszlában való konvergencia is).

d) Az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

22. Nagy számok törvényei

22.1. Tétel: *A nagy számok tételének Csebisev-féle gyenge alakja*:

Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v-k páronként függetlenek és azonos eloszlásúak az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Létezzék a közös $\mu = \mathbb{E}X_i$ várható értékük és a közös $d^2 = \sigma^2 X_i$ szórásnégyzetük. Ekkor a $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ v.v. sorozatra $Z_n \to^{st} \mu$.

22.2. Tétel: *A nagy számok tételének Bernoulli-féle gyenge alakja*:

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \mathfrak{F}$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Hajtsunk végre egy végtelen kísérletsorozatot, vagyis figyeljük meg A bekövetkezéseit az $1, 2, \ldots, n, \ldots$-edik végrehajtáskor. Legyen $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \text{ bekövetkezik} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$. X_i-k teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak: $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(A) = p$ és $\mathbf{P}(X_i = 0) = 1 - p = q, \mathbb{E}X_i = p, \sigma^2 X_i = pq$. Legyen $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = r_n(A)$ a relatív gyakoriság. Ekkor $r_n(A) \to^{st} p$.

22.3. Tétel: *A nagy számok tételének Kolmogorov-féle erős alakja*:

Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v-k teljesen függetlenek az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Létezzék a közös $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ várható értékük és a szórásnégyzetükre: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma^2 X_i \cdot \dfrac{1}{i^2} < \infty$. Ekkor a $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ v.v. sorozatra $Z_n \to^{1v} \mu$.

23. Centrális határeloszlás tételek

23.1. Tétel: *A centrális határeloszlás tétel*:

Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.v-k páronként függetlenek és azonos eloszlásúak az $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Létezzék a közös $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ várható értékük és a közös $\sigma^2 = \sigma^2 X_i$ szórásnégyzetük. Ekkor a $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \mu}$ v.v. sorozathoz létezik olyan $Z \in N(0,1)$, hogy $Z_n \to^e Z$.

23.2. Tétel: *Moivre–Laplace-tétel*:

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \mathfrak{F}$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Hajtsunk végre egy végtelen kísérletsorozatot, vagyis figyeljük meg A bekövetkezéseit az $1, 2, \ldots, n, \ldots$-edik kísérletnél. Legyen $X_i = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Az X_i-k teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak: $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(A) = p$ és $\mathbf{P}(X_i = 0) = 1 - p = q, \mathbb{E}X_i = p, \sigma^2 X_i = pq$. Ekkor a $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ v.v. sorozathoz létezik olyan $Z \in N(0,1)$, hogy $Z_n \to^e Z$.

24. Markov-láncok

24.1. Definíció: az $\{X_n, n \geq 0\}$ v.v. sorozat diszkrét idejű, diszkrét állapotterű *Markov-lánc*, ha $R_{x_i} = S \subseteq \mathbb{Z}$, és teljesül a Markov-tulajdonság: $P(X_n = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1})\ \forall\, n$-re, $\forall\, i_0, \ldots, i_{n-1}, j \in S$

24.2. Definíció: a $\{X_n, n \geq 0\}$ Markov-lánc *homogén*, ha $\mathbf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)\ \forall\, n$-re és $\forall\, i, j \in S$-re.

Az egy-lépéses átmenet-valószínűség: $\mathbf{p}_{ij}^{(1)} = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)\ \forall\, i, j \in S$

Az n-lépéses átmenet-valószínűség: $\mathbf{p}_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i)\ \forall\, i, j \in S$

24.3. Definíció: *Átmenet-valószínűségi mátrix*: $\underline{\underline{\prod}} = (p_{ij}^{(1)})\ (i,j \in S)$

n-lépéses átmenet-valószínűségi mátrix: $\underline{\underline{\prod}}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})\ (i,j \in S)$

24.4. Tétel: $\underline{\underline{\prod}}, \underline{\underline{\prod}}^{(n)}\ \forall$ sorában 1-1 eloszlás van.

24.5. Tétel: *Chapmann-Kolmogorov*

$\underline{\underline{\prod}}^{(n)} = \underline{\underline{\prod}}^{i} \cdot \underline{\underline{\prod}}^{(n-i)} = \underline{\underline{\prod}}^{n}$

24.6. Definíció: *stabilitás*

$q_i^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = i)$

$q_i^{(\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} q_i^{(n)}$, ha létezik ez a határérték, akkor a Markov-lánc stabil.

$\underline{q}^{(\infty)} = (q_1^{(\infty)}, \ldots, q_k^{(\infty)})$, ahol $1, \ldots, k \in S$, és S minden elemét kiteszik ($\underline{q}^{(\infty)}$ neve *határeloszlás*).

Erre a vektorra igaz a következő egyenlőség: $\underline{q}^{(\infty)} = \underline{q}^{(\infty)}\underline{\underline{\prod}}$

25. Matematikai statisztika

Kiindulás

κ: véletlen kísérlet

Ω: elemi események halmaza

$\mathfrak{F}$: események halmazrendszere

$\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, de pontosan nem ismert

Alapfeladat

$\mathcal{P}$ halmazból kiválasztani azon mértéket, amely ténylegesen a kísérlethez tartozik.

Statisztikai minta: $X_1, \ldots, X_n$ azonos eloszlású, egymástól teljesen független v.v. sorozat.

Statisztikai minta realizáció: $x_1, \ldots, x_n$, ahol n a mintaelemszám, x_i az i-edik mintaelem.

F_X a minta eloszlása, $\mathbb{E}X = m, \sigma X = D$

25.1. Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, és $\mathcal{P}$ valószínűségi mértékek halmaza, ahol $\forall\ \mathbf{P} \in \mathcal{P}$ esetén $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ statisztikai megfigyelést *statisztikai mintának* nevezzük, ha X_i-k teljesen független, azonos eloszlású v.v-k $\forall\ \mathbf{P} \in \mathcal{P}$ esetén: $\mathbf{P}(X_i < x) = F_P(x)\ (i = 1, \ldots, n)$ és $\mathbf{P}(X_{i1} < x_{i1}, \ldots, X_{ik} < x_{ik}) = \prod\limits_{\alpha=1}^{k} F_P(x_{i\alpha})\ (\forall\ 2 \le k \le n)$.

$T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: *statisztikai függvény*

$T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$: *statisztika*

$T_n = T_n(x_1, \ldots, x_n)$: *statisztika számított értéke*

Empirikus közép- vagy átlagstatisztika: $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n$

Empirikus szórásnégyzet statisztika: $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = s_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$

Korrigált empirikus szórásnégyzet: $(s_n^*)^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$

Rendezett minta:

$X_1^* = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

$X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

$X_1^* \le \cdots \le X_n^*$

$r_i(X_1, \ldots, X_n) = X_j$, ha X_j az i-edik legkisebb $X_1, \ldots, X_n$ között

$X_i^* = r_i(X_1, \ldots, X_n)$ az i-edik rendezett minta statisztika

$\mathbf{P}(X_k^* < x) = F_k(x) = \sum\limits_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot F(x)^i \cdot (1 - F(x))^{n-i}$

Empirikus eloszlásfüggvény: $F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq X_1^* \\ \dfrac{k}{n}, & \text{ha } X_k^* \leq x \leq X_{k+1}^* \\ 1, & \text{ha } x > X_n^* \end{cases}$

Paraméteres probléma: $F_x(t, \vartheta)$

25.2. Definíció: a T_n statisztika a ϑ paraméter *torzítatlan becslése*, ha $\mathbb{E}(T_n) = \vartheta$.

25.3. Definíció: a T_n statisztika a ϑ paraméter *aszimptotikusan torzítatlan becslése*, ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n) = \vartheta$.

25.4. Tétel: az $\overline{X}_n$ a minta várható értékének ($\mathbb{E}X = \vartheta$) torzítatlan becslése.

25.5. Tétel: tfh. $\vartheta = \sigma X$

Akkor $s_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ a ϑ aszimptotikusan torzítatlan becslése,

és $(s_n^*)^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ a ϑ torzítatlan becslése.

25.6. Definíció: a T_n statisztika sorozat a ϑ paraméter *konzisztens becslése*, ha $\mathbf{P}(|T_n - \vartheta| \geq \epsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$.

25.7. Definíció: a T_n statisztika sorozat a ϑ paraméter *erősen konzisztens becslése*, ha $\mathbb{E}T_n = \vartheta, \sigma^2 T_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

25.8. Tétel: ha T_n erősen konzisztens $\Rightarrow$ konzisztens is.

25.9. Tétel:

a) $\overline{X}_n$ a ϑ várható érték erősen konzisztens becslése, ha $\exists\ \sigma^2 X$

b) s_n^2 a ϑ szórásnégyzetnek konzisztens becslése, $(s_n^*)^2$ erősen konzisztens becslése, ha $\exists\ \mathbb{E}(X^n)$

25.10. Tétel: *Matematikai statisztika alaptétele*:

$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1$

26. Maximum likelihood becslés

26.1. Definíció: Legyen adott $\mathcal{P}$ valószínűségi mértékek egy tere, és az $X_1, \ldots, X_n$ statisztikai minta, amelyek eloszlásfüggvénye abszolút folytonos $\forall\ \mathbf{P}_\vartheta \in \mathcal{P}$-re, jelölje $L(\underline{x}, \underline{\vartheta}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\underline{\vartheta}}(x_i)$ a minta együttes sűrűségfüggvényét.

A ϑ paraméter *maximum likelihood becslésén* azt a $\tau_n(X_1, \ldots, X_n)$ statisztikát értjük, melyre: $L(x, \tau_n(\underline{x})) = \max_{\underline{\vartheta}\in\mathbb{R}^k} L(\underline{x}, \underline{\vartheta})$ teljesül $\forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

26.2. Definíció: Legyen adott $\mathcal{P}$ valószínűségi mértékek egy tere, és az $X_1, \ldots, X_n$ diszkrét eloszlású statisztikai minta $E \subseteq \mathbb{R}$ értékkészlettel $\forall\ \underline{\mathbf{P}_{\vartheta}} \in \mathcal{P}$-re. Jelölje $L(\underline{x}, \underline{\vartheta}) = \mathbf{P}_\vartheta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{\underline{\vartheta}}(X_i = x_i)$ a minta együttes eloszlását.

A $\underline{\vartheta}$ paraméter *maximum likelihood becslésén* azt a $\tau_n(X_1, \ldots, X_n)$ statisztikát értjük, melyre $L(x, \tau_n(\underline{x})) = \max_{\underline{\vartheta}\in\mathbb{R}^k} L(\underline{x}, \underline{\vartheta})$ teljesül $\forall\ \underline{x} \in E^n$.

log-likelihood függvény: $l(\underline{x}, \underline{\vartheta}) = \ln L(\underline{x}, \underline{\vartheta}) = \sum_{1}^{n} ln f_{\underline{\vartheta}}(x_i)$

26.3. Tétel: Legyen adott $\mathcal{P}$ valószínűségi mértékek egy tere, és az $X_1, \ldots, X_n$ statisztikai minta. Jelölje $L(\underline{x}, \underline{\vartheta})$ a likelihood függvényt, és τ_n a maximum likelihood statisztikát.

i) ha $\exists$ hatásos becslés a ϑ paraméterre, akkor τ_n maga a hatásos becslés.

ii) ha $\exists\ T_n$ elégséges becslés a ϑ paraméterre, akkor megadható olyan $h(x)$ függvény, mellyel $h(\tau_n) = T_n$.

26.4. Definíció: Legyen adott $\mathcal{P}$ valószínűségi mértékek egy tere, és $X_1, \ldots, X_n$ statisztikai minta. Tfh. $\exists$ az $m_j = \mathbb{E}_\vartheta X_i^j = g_j(\vartheta)$ $(j = 1, \ldots, k)$ momentumok, és $\exists g_j^{-1}(m_1, \ldots, m_k) = \vartheta_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. Tekintsük az $\hat{m}_j = \dfrac{1}{n}\sum_{X_i^j}$ $(j = 1, \ldots, k)$ empirikus momentum statisztikákat. Akkor az $m_J = g_j^{-1}(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_k)$ statisztikák a ϑ_j paraméter momentumos becslései.

27. Normális eloszlásból származó eloszlások

27.1. Definíció: Legyen $X_1, \ldots, X_n \in N(0,1)$ teljesen függetlenek, akkor az $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ v.v. eloszlása *n-szabadságfokú* χ^2*-eloszlás*.

Jelölés: $Y \in \chi^2$

27.2. Definíció: Legyen $X \in N(0,1), Y \in \chi^2$ függetlenek, akkor $Z = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ eloszlása *n-szabadságfokú t/Student eloszlású* v.v.

Jelölés: $Z \in t_n$

27.3. Definíció: Ha $X \in \chi^2_n, Y \in \chi^2_n$ függetlenek, akkor $Z = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ *n, m szabadságfokú F- vagy Fischer-eloszlású* v.v.

27.4. Tétel: *Lukács tétel*:

Legyen $X_1, \ldots, X_n \in N(m, D)$ eloszlásból származó statisztikai minta. Ekkor:

i) $\overline{X}_n \in N\left(m, \dfrac{D}{\sqrt{n}}\right)$

ii) $\dfrac{ns_n^2}{D^2} \in \chi^2_{n-1}$

iii) $\overline{X}_n$ és s_n^2, ill. $\overline{X}_n$ és $(s_n^*)^2$ is függetlenek.

27.5. Definíció: a $T_n^{'} < T_m^{''}$ statisztikák $1-\epsilon$ szintű *konfidencia intervallumot* adnak a ϑ paraméterhez, ha $\mathbf{P}\left(\vartheta \in \left[T_n^{'}, T_m^{''}\right]\right)$

28. Hipotézis elmélet, próbák

$(\Omega, \mathcal{P}, \mathbf{P}), \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$

$H_0 : \mathbf{P} \in \mathcal{P}_0$: *nullhipotézis*

$H_1 : \mathbf{P} \in \mathcal{P}_1$: *alternatív hipotézis*

$t_n(X_1, \ldots, X_n)$ próbastatisztika, $\mathbf{P}(K_1(\epsilon) \leq t_n \leq K_2(\epsilon)) \geq 1 - \epsilon$

29. Paraméteres próbák

Egymintás u-próba

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ statisztikai minta, $\in N(\vartheta, \sigma_0)$, $\sigma_0 > 0$ adott

$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$, ($\vartheta_0$adott, hipotetikus érték)

$H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$

$\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in N\left(\vartheta, \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

Ha H_0 igaz, akkor: $\overline{X}_n \in N\left(\vartheta, \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{\sigma_0} \cdot \sqrt{n} \in N(0,1)$

Döntés: Ha $\left|\dfrac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{\sigma_0} \cdot \sqrt{n}\right| < u_\epsilon \Rightarrow$ H_0-t elfogadjuk.

$\mathbf{P}(-u_\epsilon < u(x) < u_\epsilon) = 1 - \epsilon$

Kétmintás u-próba

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_n \in N(\vartheta_1, \sigma_1) \text{ statisztikai minta}, \sigma_1 > 0 \text{ adott} \\ Y_1, \ldots, Y_m \in N(\vartheta_2, \sigma_2) \text{ statisztikai minta}, \sigma_2 > 0 \text{ adott} \end{array}\right\} \text{a két minta független egymástól.}$$

$$\begin{array}{ll} H_0 : \vartheta_1 = \vartheta_2 & \overline{X}_n \in N\left(\vartheta_1, \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right) \\ H_1 : \vartheta_1 \neq \vartheta_2 & \overline{Y}_m \in N\left(\vartheta_2, \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{m}}\right) \end{array}\Bigg\} \text{függetlenek} \Rightarrow \overline{X}_n - \overline{Y}_m \in N\left(\vartheta_1 - \vartheta_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

Ha H_0 igaz, akkor: $\dfrac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \in N(0,1)$

Döntés: Legyen $\epsilon > 0, \exists u_\epsilon > 0$, ha $\dfrac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} < u_\epsilon \Rightarrow$ H_0-t ϵ-szinten elfogadjuk.

Egymintás t-próba

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ statisztikai minta, $\in N(\vartheta, \sigma), \sigma > 0$ nem ismert

$$\begin{array}{ll} H_0 : \vartheta = \vartheta_0 & \left.\begin{array}{l} \overline{X}_n \in N(\vartheta_0, \sigma) \\ \dfrac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \in N(0,1) \\ \dfrac{(n-1)(s_n^*)^2}{\sigma^2} \end{array}\right\} \text{függetlenek} \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} \in t_{n-1} \\ H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0 & \end{array}$$

Döntés: Ha $\dfrac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} < t_\epsilon \Rightarrow H_0$-t ϵ szinten elfogadjuk.

Kétmintás t-próba

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_n \in N(\vartheta_1, \sigma_1) \\ Y_1, \ldots, Y_m \in N(\vartheta_2, \sigma_2) \end{array}\right\} \text{függetlenek, de } \sigma \text{ nem ismert (azonos a szórásuk)}$$

$$\begin{array}{ll} H_0 : \vartheta_1 = \vartheta_2 & \overline{X}_n - \overline{Y}_m \in N\left(\vartheta_1 - \vartheta_2, \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}\right) \Rightarrow \\ H_1 : \vartheta_1 \neq \vartheta_2 & \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}} \in N(0,1) \end{array}$$

$$\frac{(n-1)(s_{n,X}^*)^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}, \quad \frac{(m-1)(s_{m,Y}^*)^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{m-1} \Rightarrow \frac{(n-1)(s_{n,X}^*)^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)(s_{m,Y}^*)^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n+m-2}$$

F-próba

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_n \in N(\vartheta_1, \sigma_1) \\ Y_1, \ldots, Y_m \in N(\vartheta_2, \sigma_2) \end{array}\right\} \text{függetlenek, } \vartheta_0, \vartheta_1, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0 \text{ ismeretlenek}$$

$$\begin{array}{l} H_0 : \vartheta_1 = \vartheta_2 \\ H_1 : \vartheta_1 \neq \vartheta_2 \end{array} \quad \frac{(n-1)(s_{n,X}^*)^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1} \quad \frac{(m-1)(s_{m,Y}^*)^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{m-1} \quad \frac{(s_{n,X}^*)^2}{(s_{m,Y}^*)^2} \in F_{n-1,m-1}$$

Döntés: Ha $F_{1,\epsilon} < \dfrac{(s_{n,X}^*)^2}{(s_{m,Y}^*)^2} < F_{2,\epsilon} \Rightarrow H_0$-t elfogadjuk ϵ-szinten.