

Matematikai logika

Tételek, definíciók – 2014

1. Formális nyelvek

Tétel:

A prefix írásmóddal írt formulák olvasata egyértelmű

Definíció:

\mathcal{L} típusú struktúra

$$\mathcal{A} = \langle f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \dots; P_1^{\mathcal{A}}, P_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$$

Spec esetek:

- modell \rightarrow nincs függvényjel (f)
- algebra \rightarrow nincs relációjel (P)

Formula igazsága struktúrán

A \mathcal{L} típusú struktúra $\alpha(x,y,z)$

x,y,z helyettesítése \mathcal{A} értékeivel

α -ban helyettesítés: $\alpha^{\delta^{a_1}}, \alpha^{\delta^{a_2}}$

Definíció

α^{δ} igaz az \mathcal{A} -n $\rightarrow \mathcal{A} \models \alpha^{\delta}$ (azaz \mathcal{A} kielégíti α^{δ} -t)

2. Nevezetes logikailag ekvivalens formulák

2.1. Állításlogika

$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	
$\neg(\beta \wedge \gamma)$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	De - Morgan
$\neg(\beta \vee \gamma)$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	De - Morgan
$\neg\neg\alpha$	α	
$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	$\alpha \wedge \neg\beta$	
$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$	
$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$	
$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$	

2.2. Elsőrendű logika

$\forall x \forall y \alpha$	$\forall y \forall x \alpha$	
$\exists x \exists y \alpha$	$\exists y \exists x \alpha$	
$\forall x \alpha$	$\forall y \alpha(x y)$	(ha x cserélhető y-nal)
$\neg \forall x \alpha$	$\exists x \neg \alpha$	
$\neg \exists x \alpha$	$\forall x \neg \alpha$	
$\forall x (\alpha \wedge \beta)$	$\forall x \alpha \wedge \forall x \beta$	
$\exists x (\alpha \vee \beta)$	$\exists x \alpha \vee \exists x \beta$	
$\forall x (\alpha \vee \beta)$	$\forall x \alpha \vee \forall x \beta$	ha x nem szabad változó
$\exists x (\alpha \wedge \beta)$	$\exists x \alpha \wedge \exists x \beta$	ha x nem szabad változó
$\forall x \alpha$	α	ha x nem szabad változó
$\exists x \alpha$	α	ha x nem szabad változó

3. Az Igazság fogalma

Definíció

α igazsághalmaza: $[\alpha] = \{\sigma = \alpha^\sigma \text{ igaz } \mathcal{A} - n\}$

Tétel

α, β két formula, ekkor:

a) $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$

b) $[\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cap [\beta]$

c) $[\neg \alpha] = \sim[\alpha]$

d) $[\forall x \alpha] = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} [\alpha^{\sigma_a^x}]$

e) $[\exists x \alpha] = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} [\alpha^{\sigma_a^x}]$

Definíció

$\text{Th } A = \{\alpha : \alpha \text{ mondat és } \alpha \text{ igaz } A\text{-n}\}$

3.1. Logikai következmény

Jelölés

$\Sigma \models \alpha$; ahol Σ formulahalmaz és α egy rögzített formula

Jelentése: Σ – nak tétele

Definíció

α logikai következménye Σ – nak (azaz $\Sigma \models \alpha$)

ha minden olyan \mathcal{A} struktúrára, és ezen σ értékelésre, melyre Σ valamennyi formulája igaz, α is igaz

Tétel

$\Sigma \models \alpha \Leftrightarrow \Sigma \cup \neg\alpha$ kielégíthetetlen

Definíció

α és β logikailag ekvivalens Σ – ra nézve: $\Sigma \models \alpha \Leftrightarrow \Sigma \models \beta$

Tétel (Dedukció)

$\beta \models \alpha \Leftrightarrow \beta \rightarrow \alpha$

4. Normálformák

4.1. Prenex normálforma

Prenex alakú, ha $\alpha = Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n\varphi$

ahol Q_i vagy \exists vagy \forall (a formula prefixuma)

φ kvantormentes (a formula magja)

Tétel

Az elsőrendű logika bármely formulája ekvivalens valamely prenex alakú formulával (de nem egyértelmű)

4.2. Skolem normálforma

Olyan prenex forma, melyben nem fordul elő \exists kvantor.

Prenex alakhoz Skolem forma hozzárendelése egyértelmű.

4.3. Erős Skolem normálforma

Ha a magja konjunktív alakú (a fő kapcsolódási pontok \wedge - ek)

5. Bizonyításelmélet

5.1. Definíciók

Σ ellentmondásos	$\exists \alpha: \Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg \alpha$
Σ ellentmondástalan	$\nexists \alpha: \Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg \alpha$
α független Σ – tól	$\Sigma \not\vdash \alpha$ és $\Sigma \not\vdash \neg \alpha$
Σ komplett/teljes	$\nexists \alpha$, ami független Σ – tól
Σ axiomatizálható	\exists rekurzív Γ , hogy $\Sigma = \text{Ded } \Gamma$

5.2. Tételek

$\text{Ha } \Sigma \vdash \alpha$, akkor $\Sigma \models \alpha$

Kompaktsági tétel:

$\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \exists \Sigma' \subseteq \Sigma$, ahol: $\Sigma' \vdash \alpha$

Gödel teljességi tétele:

$\Sigma \models \alpha \Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha$

Következmény: logikai axiómák esetén: $\models \alpha \Leftrightarrow \vdash \alpha$

$\Rightarrow \models$ axiomatizálható

Gödel teljességi tétele (2. alak):

Σ kielégíthető (azaz van modellje) $\Leftrightarrow \Sigma$ ellentmondástalan

Szemantikai kompaktsági tétel:

Tfh. Σ zárt formulák összessége

1) Σ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Sigma$ – nak van véges kielégíthetetlen része

2) Σ kielégíthető $\Leftrightarrow \Sigma \forall$ véges része kielégíthető

Az infinitezimális egzisztencia tétele

Az \mathbb{R} elméletének \exists modellje, amelyben \exists inf. mennyiség, és \mathbb{R} izomorf beágyazható \mathcal{A} – ba

Ellentmondástalanság fajtái

- 1) abszolút: önmagában (pl. természetes számok)
- 2) relatív: egy másik formulahalmazhoz képest (Gödel II ezt használja!)

6. Analitikus fák

Bizonyítási rendszerek:

- 1) levezetési (Hilbert)
- 2) cáfolati (Hilbert + indirekt)

\mathcal{L} egyenlőségmentes \rightarrow formulahalmazai végesek

3 lépés:

- 1) alapötlet (heurisztika)
- 2) kvázi-algoritmus (nem determinisztikus)

3) Implementáció

Definíció

Axióma-szerű elem:

- 1) Konjunktív-ekvivalensek:
 - a. $\neg(\alpha \vee \beta)$ és $\neg\alpha \wedge \neg\beta$
 - b. $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ és $\alpha \vee \neg\beta$
- 2) Diszjunktív-ekvivalensek:
 - a. $\neg(\alpha \wedge \beta)$ és $\neg\alpha \vee \neg\beta$
 - b. $(\alpha \rightarrow \beta)$ és $\neg\alpha \vee \beta$
- 3) Negáció-ekvivalensek:
 - a. $\neg\neg\alpha$ és α
 - b. $\neg\forall x\alpha$ és $\exists x\neg\alpha$
 - c. $\neg\exists x\alpha$ és $\forall x\neg\alpha$

Definíció

Egy fa/ág állapotai:

- 1) Egy ág zárt, ha ott valamelyik csúcson ellentétpár található
- 2) Egy fa zárt, ha MINDEN ága zárt
- 3) Egy ág lebontott (nyílt), ha csak logikai formulákból áll (nincs kvantor, illetve egyéb operátorok)
- 4) Egy fa nyílt: LÉTEZIK nyílt ága

6.1. Cáfolati rendszerek bizonyítási elmélete

Definíció

Λ cáfolható analitikus fával, ha Λ -nak VAN zárt analitikus fája

Teljességi tétel

Λ kielégíthető $\Leftrightarrow \Lambda \exists$ nyílt analitikus fája \rightarrow ebből leolvasható Λ egy modellje

Tétel

Ha Γ elmélet axiomatizálható és komplett $\Rightarrow \Gamma$ eldönthető

Löwenheim-Skolem tétel:

Tfh. $|\mathcal{L}| \chi$. Ha Λ kielégíthető, akkor kielégíthető valamely megszámlálható modellen is.

(Λ – nak van modellje \Rightarrow van megszámlálható modellje is)

Gödel I inkomplettiségi tétele

A π elmélet ellentmondástalan és axiomatikus kiterjesztései INKOMPLETTEK

Köv: π elmélet ellentmondástalan kiterjesztései VAGY axiomatizálhatók VAGY komplettek

Gödel II inkomplettiségi tétele

*Létezik a π_p elmélettől független olyan formula, amelynek jelentése maga π_p
– nek az ellentmondástalansága*