Kalkulus

Sáfár Orsolya

Szélsőértékkeresés, Hiperbolikus szögfüggvények

Globális szélsőérték

Definíció: Ha egy x_0 pontnak van egy olyan környezete, amelyben $f(x) \leq f(x_0)$ minden olyan x pontra amely ebbe a környezetbe esik, akkor azt mondjuk, hogy f-nek lokális maximuma van x_0-ban.

Definíció: Az $f(x)$ függvénynek globális maximuma van az I halmazon x_0-ban, ha minden $x \in I$-re $f(x) \leq f(x_0)$.

Példa: A $\sin(x)$ függvénynek az $x = \frac{\pi}{2}$ lokális szélsőértéke. Egyben globális szélsőértéke is a teljes $\mathbb{R}$-en is, hiszen $\forall x \in \mathbb{R}$-re $|\sin(x)| \leq 1$.

Példa 2: Keressük meg $\sin(x)$ globális maximumát $[0, 1]$-en!
A $\sin'(x) = \cos(x)$ tehát $f'(x) > 0$ a $[0, 1]$ intervallumon, így itt szigorú monoton nő a függvény. Ezek szerint a $\sin(1)$ lesz a legnagyobb függvényérték, ezt az $x = 1$ pontban veszi fel.

Példák

Példa 3: Keressük meg $\sin(x)$ globális maximumát $(0,1)$-en!

Az előbb kiderült, hogy a legnagyobb függvényérték a $[0,1]$ intervallumon az $x = 1$-ben vétetik fel, és az is, hogy a függvény szigorú monoton $[0,1]$-en, azaz minden $x < 1$-re $f(x) < \sin(1)$. Emiatt $(0,1)$-on nincs legnagyobb függvényérték, hiszen minden $x < 1$-re van olyan másik szám, ami még közelebb van 1-hez, és ott a függvényérték még nagyobb.

Példa 4: Keressük meg $\frac{1}{x}$ globális maximumát $(0,1)$-en!

A probléma hasonló mint az előbbi példában: a 0 közelében tetszőlegesen nagy értékeket felvesz a függvény, így nincsen globális maximum. Viszont itt már az sem segít, ha zárt intervallumon próbáljuk megkeresni a globális szélsőértéket, $[0,1]$-en éppen ugyanez a helyzet.

Weierstraß-tétel

Láttuk, hogy a globális szélsőérték megkeresésével több probléma is adódik: nem biztos, hogy egyáltalán létezik, és ha létezik is nem feltételen olyan pontban van, ahol az első derivált 0-t vesz fel. Bizonyos helyzetekben mégis biztosak lehetünk legalább abban, hogy létezik.

Tétel:/Weierstrass/ Ha f folytonos az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon, akkor van globális maximuma és globális minimuma az $[a, b]$-n.
Ezen szélsőértéket kétféle típusú pontban veheti fel a függvény: vagy egy lokális szélsőérték egyben globális szélsőérték is, vagy a globális szélsőértéket az intervallum valamely végpontjában veszi fel.

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + x^3$ függvény (globális) maximumát az $[1, 2]$ intervallumon!

A függvény folytonos a $[1, 2]$-n, mert a nevezőnek csak 0-ban van gyöke, így a Weiertrass-tétel szerint felveszi a maximumát. A vizsgálandó pontok: az összes lokális szélsőérték és az intervallum két széle.
A lokális szélsőértékek megkereséséhez $f'(x) = 0$ megoldásait kell megtalálnunk, mert a függvény $[1, 2]$-on mindenütt deriválható.

$$f'(x) = \frac{-6}{x^3} + 3x^2 = \frac{-6 + 3x^5}{x^3} = 0,$$

innen az egyetlen megoldás az $x = \sqrt[5]{2}$, ami az $[1, 2]$-ba esik, így lehet globális maximum itt. Végül a függvényértékek összehasonlításából: $f(1) = 4$, $f(2) = \frac{3}{4} + 8$, $f(\sqrt[5]{2}) = \dfrac{5}{\sqrt[5]{2}}$ kapjuk, hogy $x = 2$-ben veszi fel a függvény a maximumot.

Függvények inverze

Ha $y = f(x)$ akkor a függvény inverze definíció szerint az a függvény amely y-hoz x-et rendeli. Azt is tudjuk, hogy f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként.

Tétel: Ha $f(x)$ deriválható az I intervallumon és

- $f'(x) > 0$ az I-n, akkor f invertálható és az inverz szigorú monoton nő
- $f'(x) < 0$ az I-n, akkor f invertálható és az inverz szigorú monoton csökken.

Az első pont indoklása: az inverz létezése abból következik, hogy $f'(x) > 0$, így $f(x)$ szigorú monoton nő, emiatt minden értéket csak egyszer vehet fel. Az inverz szigorú monoton növekedése abból következik, hogy az inverz megtartja az eredeti függvény monotonitásának irányát.

Állítás: Ha f folytonos és invertálható, akkor az inverz is folytonos. (Ezt nem bizonyítjuk.)

Példa

Példa: Legyen $f(x) = 2\arcsin(x+3) - 2$. Mi lesz D_f, R_f? Indokoljuk, meg, hogy miért létezik f^{-1}! Mi lesz $f^{-1}(x)$, $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$?

Az $\arcsin(x)$ értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum, mert a $\sin(x)$ függvény -1 és 1 közötti értékeket vehet fel. Ezek szerint $-1 \le x+3 \le 1$ kell teljesüljön, innen $D_f = [-4, -2]$.

Mivel az $\arcsin(x)$ értékkészlete a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallum, ezek alapján $R_f = [-\pi - 2, \pi - 2]$.

Mivel $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(x+3)^2}} > 0$, így a függvény szigorú monoton nő a teljes értelmezési tartományon, ezért létezik $f^{-1}(x)$.

Az inverz értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értékkészletével, így $R_{f^{-1}} = D_f = [-\pi - 2, \pi - 2]$, továbbá $R_{f^{-1}} = D_f = [-4, -2]$.

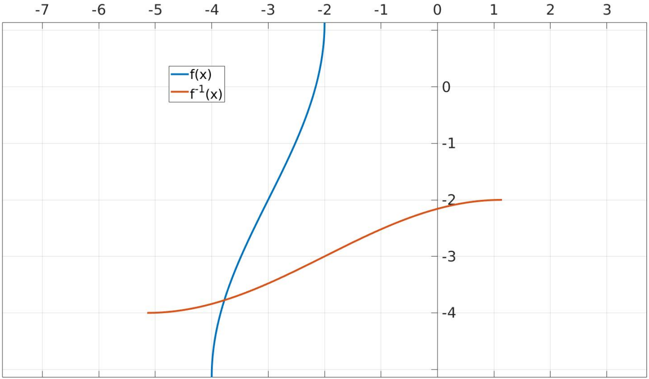
Példa - folytatás

Végül az inverz képletének meghatározásához az $f(x) = y$ egyenletből ki kell fejeznünk x-et.

$$\begin{aligned}
2\arcsin(x+3) - 2 &= y \\
2\arcsin(x+3) &= y + 2 \\
\arcsin(x+3) &= \frac{y+2}{2} \\
x + 3 &= \sin\left(\frac{y+2}{2}\right) \\
x &= \sin\left(\frac{y+2}{2}\right) - 3
\end{aligned}$$

Fontos, hogy bár az $f^{-1}(x) = \sin\left(\frac{x+2}{2}\right) - 3$ függvény értelmezett minden valós számra, az inverz értelmezési tartománya mégis szűkebb.

Az f(x) függvény és inverze



A hiperbolikus szögfüggvények

Definíció:

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Mivel az e^x minden valós számra értelmezett, így mind a sinh mind az cosh függvény értelmezési tartománya a teljes számegyenes. Folytonosak, mert folytonos függvények összegeként ill. különbségeként állnak elő.

Az elnevezésüket az indokolja, hogy sok a szögfüggvényekhez tulajdonságaihoz hasonló számolási szabály igaz rájuk.

Állítás: $\sinh(x)$ páratlan és $\cosh(x)$ páros, ugyanis

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\sinh(x)$$

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) = \cosh(x)$$

A hiperbolikus szögfüggvények tulajdonságai

Állítás: $\sinh'(x) = \cosh(x)$ és $\cosh'(x) = \sinh(x)$, ugyanis

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

Állítás: $\cosh(x) > 0$, mert két pozitív szám számtani közepe, sőt $\cosh(x) \geq 1$, ugyanis ezen két szám mértani közepe: $e^x \cdot e^{-x} = 1$.

Következmény: $\sinh(x)$ szigorú monoton nő, mert $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$.

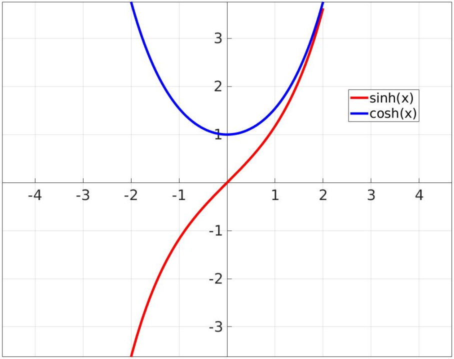
Mivel $\sinh(0) = \dfrac{e^0 - e^0}{2} = 0$, innen kiderül, hogy ha x negatív, akkor $\sinh(x)$ is negatív, míg pozitív x-re $\sinh(x)$ is pozitív. Emiatt

Következmény: $\cosh(x)$ szigorú monoton csökken ha x negatív, és szigorú monoton nő ha x pozitív.

A hiperbolikus szögfüggvények tulajdonságai II

Állítás: $\cosh(x)$ konvex, mert $\cosh''(x) = \sinh'(x) = \cosh(x) > 0$.

Állítás: $\sinh(x)$ konkáv ha x negatív, konvex ha x pozitív, mert $\sinh''(x) = \cosh'(x) = \sinh(x)$.



Addíciós tételek

Állítás: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, ugyanis

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

Állítás: $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$, továbbá $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.

Ezek hasonló, közvetlen számolással igazolhatóak. Sőt igazából a tényleges addíciós tételek például $\sinh(x + y)$-re is kijönnek így.

A sinh inverze

Mivel $\sinh(x)$ a teljes számegyenesen szigorú monoton nő ezért létezik inverze, nevezzük el arsinh-nak. Az inverz is a teljes számegyenesen értelmezett, mert

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty,$$

és ez alapján $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$, mert a függvény páratlan. Emiatt (valójában a Bolzano-tétel következményeként) az sinh függvény értékkészlete a teljes $\mathbb{R}$, és ez megegyezik az inverz értelmezési tartományával.

Az inverz értékkészlete a teljes $\mathbb{R}$, mert a sinh értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$.

Az inverz szigorúan monoton nő, mert $\sinh(x)$ is szigorú monoton nő.

A sinh inverze - folytatás

Állítás: $\operatorname{arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ugyanis

az inverz függvény deriválási szabályából:

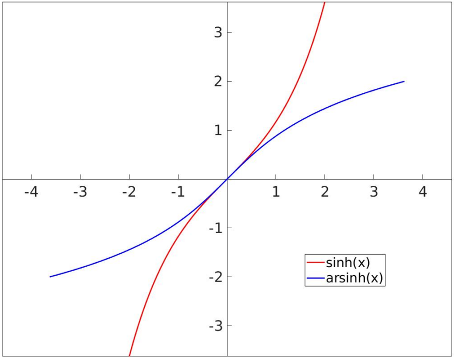
$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}$$

Mivel $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, így $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)}$. Itt a négyzetgyök előjele is stimmel, mert a $\cosh(x)$ mindenütt pozitív. Azaz:

$$\frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

A arsinh függvény

Az arsinh páratlan, mert sinh is páratlan.



A cosh inverze

Mivel $\cosh(x) = \cosh(-x)$ így csak akkor létezik inverze, ha megszorítjuk cosh-t a nemnegatív számokra (ott szigorúan monoton nő). Az így képzett inverz neve arcosh. Az inverz $[1, \infty)$-n értelmezett, mert

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty$$

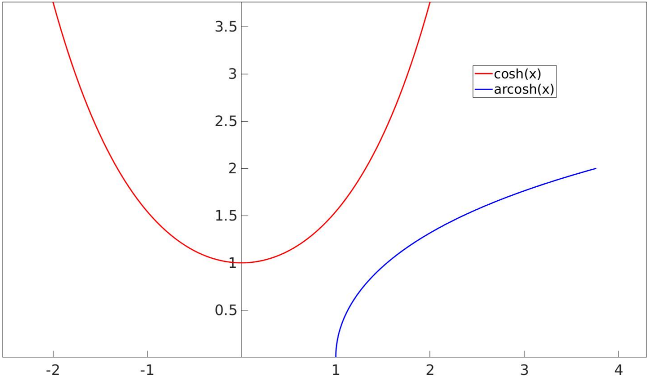
és a függvény globális minimumát 0-ban veszi fel, itt a függvény értéke 1.

Az inverz értékkészlete a nemnegatív számok, mert erre szorítottuk meg a függvényt.

Az inverz szigorúan monoton nő, mert $\cosh(x)$ is szigorú monoton nő a pozitív számokon.

A arcosh függvény

Állítás: $\text{arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, hasonló számolással mint az arsinh-nál láttuk.



Példa

Példa: Számítsuk ki az $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arsinh}(x^3)}{\arctan(2x)}$ határértéket!

Mivel $\sinh(0) = 0$, ezért $\operatorname{arsinh}(0) = 0$, így a számláló 0-hoz tart. A nevező szintén, ugyanis $\tan(0) = 0$. Mivel $\dfrac{0}{0}$ alakú a határérték, ezért alkalmazható a L'Hospital-szabály.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(x^3)}{\arctan(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}}{\dfrac{2}{1+(2x)^2}} = 0$$

Példa

Példa: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^x$ függvényen!

x^x értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$, ezért a 0-ban és a ∞-ben kell kiszámítani a határértékeket.

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(x)}$$

Mivel e^x folytonos, ezért elég kiszámolni a kitevő határértékét.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

ez $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0,$$

innen $\lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1.$

Példa - folytatás

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \infty,$$

mert az alap és a kitevő is tart ∞-be.

A monotonitás és lokális szélsőértékek vizsgálatához meg kell határozni $f'(x)$-et.

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)}\left(x\frac{1}{x} + \ln(x)\right) = x^x(1+\ln(x))$$

Egyrészt $x^x > 0$, mert pozitív szám minden hatványa pozitív. Másrészt $1+\ln(x) > 0$ ha $\ln(x) > -1$ pontosan akkor, ha $x > \frac{1}{e}$. Ezek alapján a függvény szigorú monoton csökken $(0, \frac{1}{e})$-n, szigorú monoton nő $(\frac{1}{e}, \infty)$-n és lokális minimuma van $x = \frac{1}{e}$-ben.

Példa - folytatás

A konvexitás vizsgálatához meg kell határoznunk $f''(x)$-et.

$$(x^x)'' = (x^x(\ln(x)+1))' = x^x(\ln(x)+1)^2 + x^x\frac{1}{x}$$

itt minden tag pozitív, ezért a függvény a teljes értelmezési tartományon konvex.