1.1

A Fourier- sor definíciós képlete:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [U_k^A * \cos(k\omega t) + U_k^B * \sin(k\omega t)]$$

A gerjesztő jel időfüggvénye:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{-2A_0}{T} * t; ha -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{2A_0}{T} * t; ha\ 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

A Fourier-sor együtthatói:

$$U_0 = \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} \left(\frac{-2A_0}{T} * t\right) dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{2A_0}{T} * t\right) dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-A_0}{T} * t^2\right]_{-T/2}^{0} + \left[\frac{A_0}{T} * t^2\right]_{0}^{T/2}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{A_0 * T^2}{T * 4} + \frac{A_0 * T^2}{T * 4}\right) = \frac{A_0}{2} = 10\ [V]$$

$$U_k^A = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos(k\omega t)\, dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\frac{2A_0}{T} tcos(k\omega t)dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \frac{2A_0}{T} tcos(k\omega t)dt\right) =$$

$$= \frac{4A_0}{T^2}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -tcos(k\omega t)dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} tcos(k\omega t)dt\right) =$$

$$= \frac{4A_0}{T^2}\left(\left[\frac{-tsin(k\omega t)}{k\omega}\right]_{-T/2}^{0} - \left[\frac{\cos(k\omega t)}{k^2\omega^2}\right]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \left[\frac{tsin(k\omega t)}{k\omega}\right]_{0}^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{\cos(k\omega t)}{k^2\omega^2}\right]_{0}^{T/2}\right) =$$

$$= \frac{4A_0}{T^2}\left(\frac{Tsin\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{2k\omega} - \frac{1}{k^2\omega^2} + \frac{cos\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{k^2\omega^2} + \frac{Tsin\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{2k\omega} + \frac{cos\left(k\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{k^2\omega^2} - \frac{1}{k^2\omega^2}\right) =$$

$$= \frac{A_0}{\pi^2}\left(\frac{2(-1)^2 - 2}{k^2}\right) = \begin{cases} k = 2n + 1, akkor: \frac{-4A_0}{k^2\pi^2} \\ k = 2n, akkor: 0 \end{cases}$$

$$U_k^B = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin(k\omega t)\,dt = 0, mert\ a\ jel\ páros.$$

Behelyettesítések után a jel valós Fourier-sora:

$$\boxed{u(t) \cong 10 - \frac{80}{\pi^2}\left[\cos(167{,}55t) + \frac{1}{9}\cos(502{,}65t) + \frac{1}{25}\cos(837{,}75t) + \frac{1}{49}\cos(1172{,}85t)\right]}$$

A jelet most a következő komplex alakban keressük:

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_k^C * e^{-j\omega kt}$$

ahol

$$U_k^C = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-jk\omega t} = \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} \frac{-2A_0}{T} * t * e^{-jk\omega t}dt + \int_{0}^{T/2} \frac{2A_0}{T} * t * e^{-jk\omega t}dt\right)$$

Az adatokat behelyettesítve, az integrálást elvégezve a következő eredményt kapjuk:

$U_k^C = \frac{40}{(k\pi)^2}$ ha k=2n+1, párosakra 0.

Tehát a komplex alak:

$$\boxed{u(t) \cong \frac{40}{\pi^2}\left(e^{-j167{,}55t} + \frac{1}{9}e^{-j502{,}65t} + \frac{1}{25}e^{-j837{,}75t} + \frac{1}{49}e^{-j1172{,}85t}\right)}$$

1.2

A jel effektív értéke **definíció szerint:**

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{-2A_0}{T} * t\right)^2 dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{2A_0}{T} * t\right)^2 dt\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{4A_0^2}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} * \frac{4A_0^2}{T^2} * \frac{T^3}{12}} = \sqrt{\frac{4A_0^2}{12}} = \mathbf{11{,}547\ V}$$

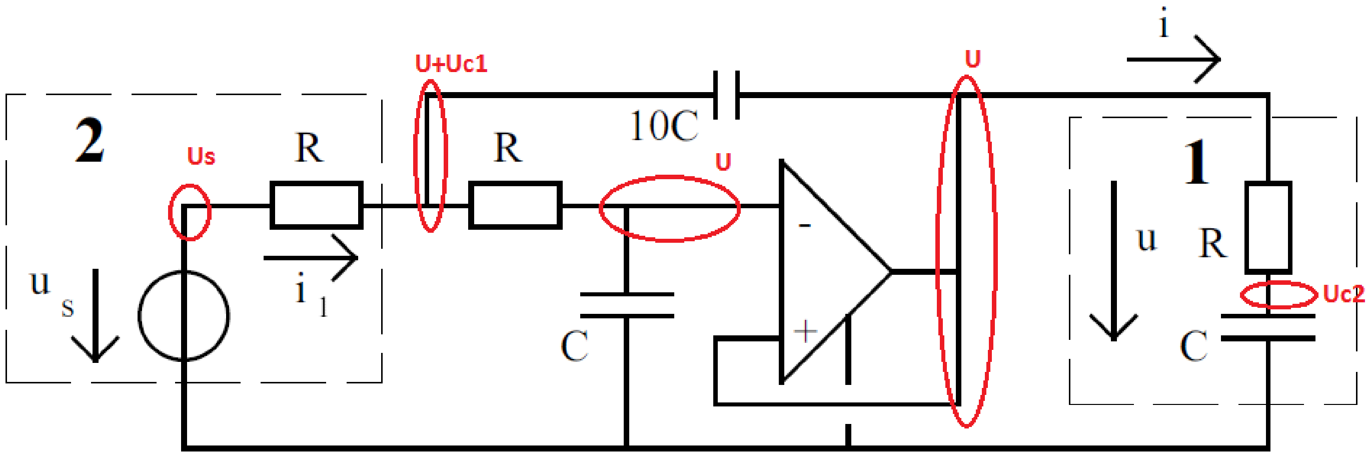
Az effektív érték **közelítéssel:**

$$U_{eff} = \sqrt{10^2 + \frac{8{,}106^2 + 0{,}900^2 + 0{,}3242^2 + 0{,}1654^2}{2}} = \mathbf{11{,}5466\ V}$$

A közelítés **relatív hibája:**

$$100 * \frac{11{,}547 - 11{,}5466}{11{,}547} = \mathbf{0{,}0035}\%$$

1.3



Felveszem a csomóponti egyenleteket:

$$\frac{U + U_{c1} - U}{1/j\omega 10C} + \frac{U + U_{c1} - U_s}{R} + \frac{U + U_{c1} - U}{R} = 0$$

$$\frac{U - (U + U_{c1})}{R} + \frac{U}{1/j\omega C} = 0$$

$$\frac{U_{c2} - U}{R} + \frac{U_{c2}}{1/j\omega C} = 0$$

Az egyenletek rendezéséhez Maple 17-et használtam:

$$e1 := \frac{Uc1}{\frac{1}{j\cdot w\cdot 10\cdot C}} + \frac{U + Uc1 - Us}{R} + \frac{Uc1}{R} = 0$$

$$10\, Uc1 j w C + \frac{U + Uc1 - Us}{R} + \frac{Uc1}{R} = 0$$

$$e2 := -\frac{Uc1}{R} + \frac{U}{\frac{1}{j\cdot w\cdot C}} = 0$$

$$-\frac{Uc1}{R} + U j w C = 0$$

$$e3 := \frac{Uc2 - U}{R} + \frac{Uc2}{\frac{1}{j\cdot w\cdot C}} = 0$$

$$\frac{Uc2 - U}{R} + Uc2 j w C = 0$$

$$Uc1 := solve(e2, Uc1)$$

$$U j w C R$$

$$Uc2 := solve(e3, Uc2)$$

$$\frac{U}{C R j w + 1}$$

$$H := \frac{solve(e1, U)}{Us}$$

$$\frac{1}{10\, C^2 R^2 j^2 w^2 + 2\, C R j w + 1}$$

Mivel a válasz nem a feszültség, hanem az áram, ezért még osztani kell a kétpólus eredő impedanciájával:

$$\frac{H\cdot(j\cdot w\cdot c)}{R\cdot j\cdot w\cdot C + 1}$$

$$\frac{j w c}{\left(10\, C^2 R^2 j^2 w^2 + 2\, C R j w + 1\right)\left(C R j w + 1\right)}$$

Rendezés után az **átviteli karakterisztika**:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{10*C^3R^3(j\omega)^3+12*C^2R^2(j\omega)^2+3*CR(j\omega)+1}}$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$R := 60$$

$$60$$

$$C := 0.0005$$

$$0.0005$$

$$evalf(H)$$

$$\frac{0.0005\, j w}{0.000270000000\, j^3 w^3 + 0.01080000\, j^2 w^2 + 0.0900\, j w + 1.}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{0{,}0005(j\omega)}{0{,}00027(j\omega)^3+0{,}0108(j\omega)^2+0{,}09(j\omega)+1}}$$

1.4

$$u(t) \cong 10 - \frac{80}{\pi^2}\left[\cos(167{,}55t) + \frac{1}{9}\cos(502{,}65t) + \frac{1}{25}\cos(837{,}75t) + \frac{1}{49}\cos(1172{,}85t)\right]$$

$$i(t) = H(j\omega) * u(t)$$

A válasz kiszámolásánál a szuperpozíció elvét használom.

$\omega_0 = 167{,}55\ krad/s$

- ω=0
  10*H(j ω)=0
- ω=ω_0
  $\frac{80}{\pi^2} * H(j*167{,}55) = \frac{80}{\pi^2} * \frac{0{,}0005(j*167{,}55)}{0{,}00027(j*167{,}75)^2 + 0{,}0108(j*167{,}55)^2 + 0{,}09(j*167{,}55) + 1}$
  $= 0{,}00526 * e^{-j166{,}46}$
- ω=3ω_0
  $\frac{80}{9\pi^2} * H(j*502{,}65) = \frac{80}{\pi^2} * \frac{0{,}0005(j*502{,}65)}{0{,}00027(j*502{,}65)^2 + 0{,}0108(j*502{,}65)^2 + 0{,}09(j*502{,}65) + 1}$
  $= 0{,}00000659 * e^{-j177{,}45}$
- ω=5ω_0
  $\frac{80}{25\pi^2} * H(j*837{,}75) = \frac{80}{\pi^2} * \frac{0{,}0005(j*837{,}75)}{0{,}00027(j*837{,}75)^2 + 0{,}0108(j*837{,}75)^2 + 0{,}09(j*837{,}75) + 1}$
  $= 0{,}000000855 * e^{-j177{,}27}$
- ω=7ω_0
  $\frac{80}{49\pi^2} * H(j*1172{,}85) = \frac{80}{\pi^2} * \frac{0{,}0005(j*1172{,}85)}{0{,}00027(j*1172{,}85)^2 + 0{,}0108(j*1172{,}85)^2 + 0{,}09(j*1172{,}85) + 1}$
  $= 0{,}000000222 * e^{-j178{,}05}$

i(t)=[0,00526*cos(167,55t-166,46)+0,00000659cos(502,65t-175,45) + 0,000000855cos(837,75t-177,27) + 0,000000222cos(1172,85t-178,05)] mA

A válasz effektív értéke:

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{0{,}00526^2}{2} + \frac{0{,}00000659^2}{2} + \frac{0{,}000000855^2}{2} + \frac{0{,}000000222^2}{2}} = 0{,}003719\ mA$$

2.1

A megadott aperiodikus jel időfüggvénye:

$$u_s(t) = \frac{2A_0}{T} t(\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) + \left(2A_0 - \frac{2A_0}{T} t\right)\left(\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) - \varepsilon(t - T)\right) =$$

$$= \frac{2A_0}{T} t\varepsilon(t) - \frac{2A_0}{T}\left(t - \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right)\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2A_0\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{2A_0}{T}\left(t - \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right)\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) - 2A_0\varepsilon(t - T) +$$

$$+ \frac{2A_0}{T}(t - T + T)\varepsilon(t - T) = \frac{2A_0}{T} t\varepsilon(t) - \frac{4A_0}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{2A_0}{T}(t - T)\varepsilon(t - T)$$

Felhasználva a következő azonosságokat:

$$L\{t\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s^2}\ \ és\ \ L\{x(t - T)\} = X(s)e^{-sT}$$

$$u_s(s) = \frac{2A_0}{T * s^2} - \frac{4A_0}{T * s^2} e^{-s\frac{T}{2}} + \frac{2A_0}{T * s^2} e^{-sT}$$

T=0,0375 ms
A0=20 V

$$\frac{40 - 80e^{-s\frac{0,0375}{2}} + 40e^{-s0,0375}}{s^2}$$

A rendszerünk G-V stabilis (mert az átviteli karakterisztika nevezője magasabb rendű, mint a számlálója), így s=jw helyettesítéssel megkapjuk a gerjesztés komplex spektrumát:

$$\boxed{u_s(j\omega) = \frac{40 - 80e^{-(j\omega)\frac{0,0375}{2}} + 40e^{-(j\omega)0,0375}}{(j\omega)^2}}$$

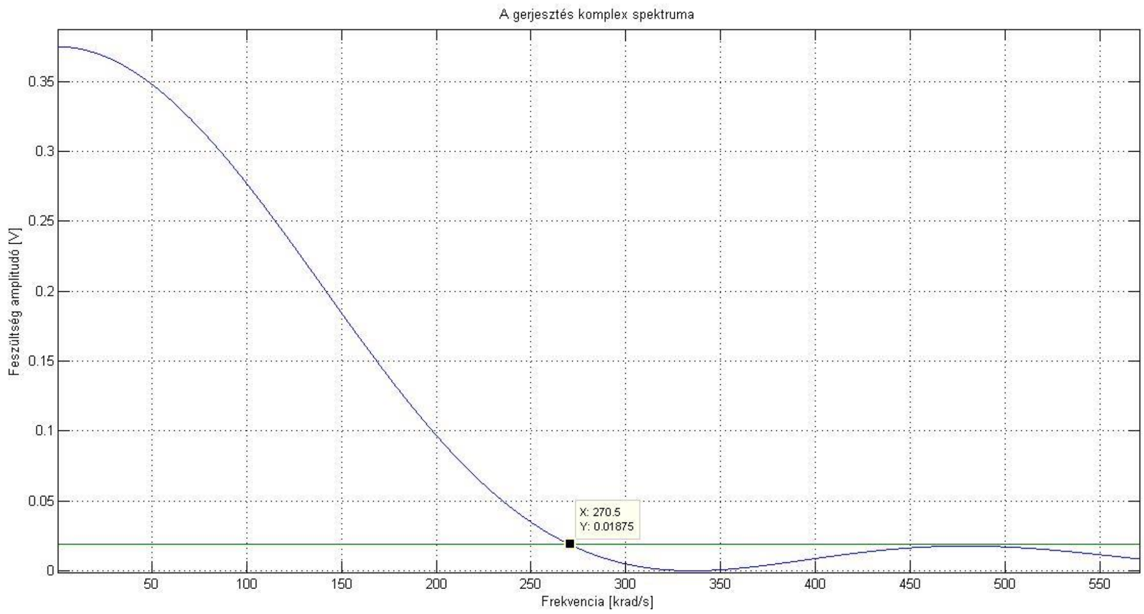
2.2

Az ábrázolást MatLab R2013a programmal végeztem:

```
>> om=0.1:0.1:1675.5;
>> Uom=(40-80*exp(-j*om*(0.0375/2))+40*exp(-j*om*0.0375))./(0.0375*j.^2*om.^2);
>>  plot(om,abs(Uom),om,0.05*max(abs(Uom))*ones(size(om)))
>> title('A gerjesztés komplex spektruma')
>> grid
>> xlabel('Frekvencia [krad/s]')
>> ylabel('Feszültség amplitudó [V]')
```

Az ábráról leolvasható a sávszélesség:

$$\boxed{\Delta\omega = 270{,}5 \ \frac{krad}{s}}$$



2.3

$$u_s(j\omega) = \frac{40 - 80e^{-(j\omega)\frac{0{,}0375}{2}} + 40e^{-(j\omega)0{,}0375}}{(j\omega)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{0{,}0005(j\omega)}{0{,}00027(j\omega)^3 + 0{,}0108(j\omega)^2 + 0{,}09(j\omega) + 1}$$

A válasz komplex spektruma:

$$u(j\omega) = u_s(j\omega) * H(j\omega) =$$

$$= \frac{40 - 80e^{-(j\omega)\frac{0{,}0375}{2}} + 40e^{-(j\omega)0{,}0375}}{(j\omega)^2} * \frac{0{,}0005(j\omega)}{0{,}00027(j\omega)^3 + 0{,}0108(j\omega)^2 + 0{,}09(j\omega) + 1} =$$

$$\frac{0.0005\left(40 - 80\, e^{-0.01875000000\, i\, w} + 40\, e^{-0.0375\, i\, w}\right)}{i\, w\left(0.00027\, i^3\, w^3 + 0.0108\, i^2\, w^2 + 0.09\, i\, w + 1\right)}$$

$$\mathrm{u(j\omega)} = \boxed{\frac{0{,}02 - 0{,}04 * e^{-j\omega * \frac{0{,}0375}{2}} + 0{,}02 * e^{-j\omega 0{,}0375}}{0{,}00027(j\omega)^4 + 0{,}0108(j\omega)^3 + 0{,}09(j\omega)^2 + j\omega}}$$

3.1

Mivel a rendszer kauzális, az átviteli karakterisztikából jω=s helyettesítéssel megkapom az **átviteli függvényt**:

$$H(j\omega)|_{j\omega=s} = H(s) => \boxed{H(s) = \frac{0{,}0005s}{0{,}00027s^3+0{,}0108s^2+0{,}09s+1}}$$

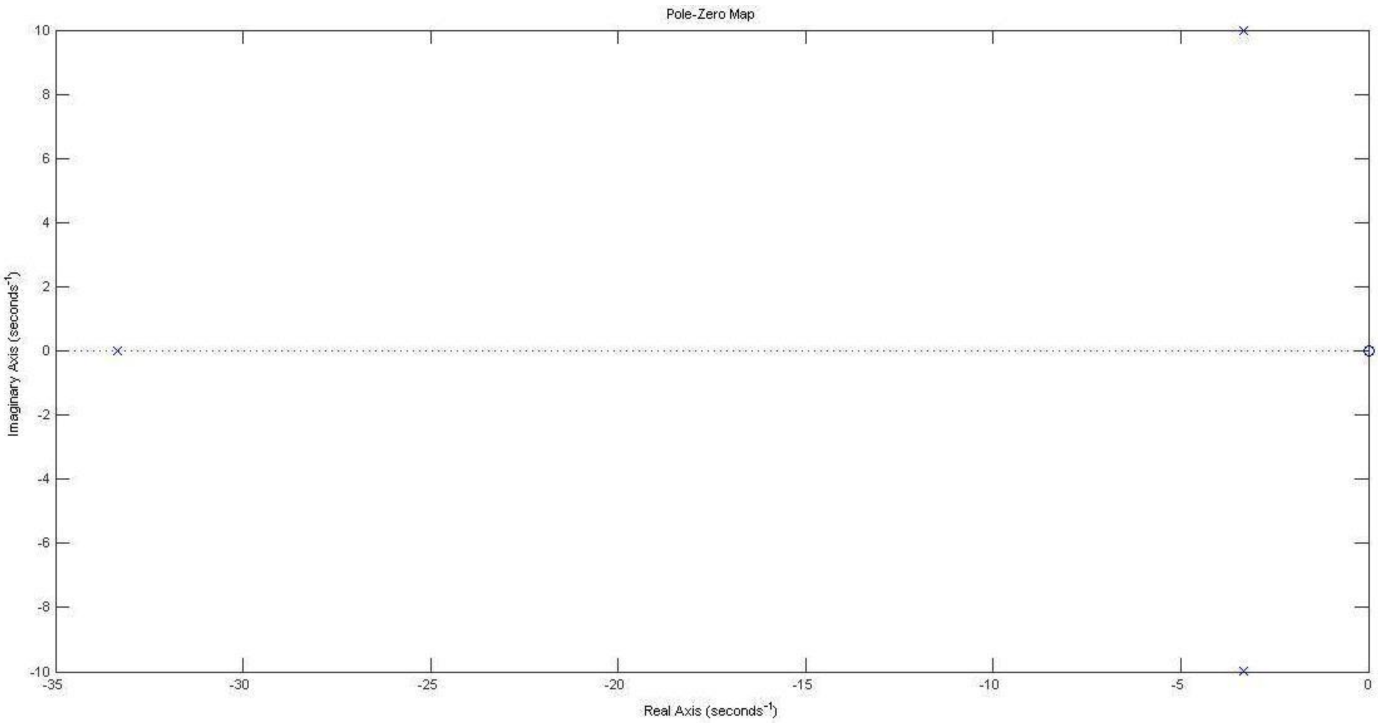
A pólus-zérus elrendezést MatLab-bal számoltam:

```
>> szam=[0.0005 0];
>> nev=[0.00027 0.0108 0.09 1];
>> [pole,zero]=pzmap(szam,nev)
pole =
 -33.3333 + 0.0000i
  -3.3333 +10.0000i
  -3.3333 -10.0000i

zero =
    0
```

Majd ábrázoltam:

```
>> pzmap(szam,nev)
```



3.2

Az átviteli függvény inverz Laplace-transzformáltja adja a hálózat impulzusválaszát:

$$L^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

Ehhez először parciális törtekre bontom az átviteli függvényt a MatLab resiude parancsával:

```
>> sz=[0.0005 0];
>> n=[0.00027 0.0108 0.09 1];
>> [r,p,k]=residue(sz,n)
r =
  -0.0617 + 0.0000i
   0.0309 + 0.0000i
   0.0309 - 0.0000i
p =
 -33.3333 + 0.0000i
  -3.3333 +10.0000i
  -3.3333 -10.0000i
k =
    []
```

A k vektor azért üres, mert az átviteli függvény valódi törtfüggvény.

$$\sum \frac{r_i}{s-p_i} + k(s)$$

Ezek alapján az átviteli függvény:

$$H(s) = \frac{-0{,}0617}{s+33.333} + \frac{0{,}0309}{s+3{,}333-10j} + \frac{0{,}0309}{s+3{,}333+10j}$$

Felhasználva a $L\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s+\alpha}$ összefüggést:

$$h(t) = \varepsilon(t)(-0{,}0617 * e^{-33.333t} + 0.0309 * e^{(-3.333+10*j)t} + 0{,}0309 * e^{(-3.333-10*j)t})$$

$$= \varepsilon(t)\left(-0{,}0617 * e^{-33{,}333t} + 0{,}0309 * e^{-3{,}333t} * e^{10jt} + 0{,}0309 * e^{-3{,}333t} * e^{-10jt}\right) =$$

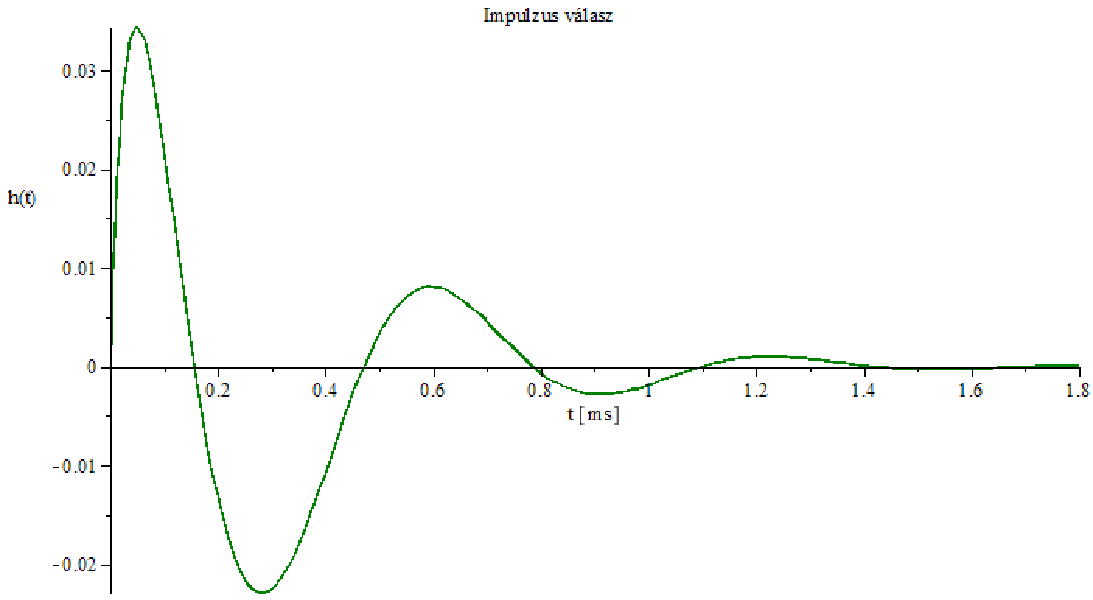
$$= \varepsilon(t)\left(-0{,}0617 * e^{-33{,}333t} + 2 * 0{,}0309 * e^{-3{,}333t} * \left(\frac{e^{10jt} + e^{-10jt}}{2}\right)\right)$$

Az impulzus-válasz:

$$\boxed{h(t) = \varepsilon(t)(-0{,}0617 * e^{-33{,}333t} + 0{,}0618 * e^{-3{,}333t}\cos(10t))}$$

Maple 17-el ábrázolva:

$$plot\left(\left(-0.0617 \cdot \mathrm{e}^{-33.333 \cdot t} + 2 \cdot 0.0309 \cdot \mathrm{e}^{-3.333 \cdot t} \cdot \cos(10 \cdot t)\right), t = 0\,..1.8\right)$$



3.3

A gerjesztő jel: $u_s(t) = \frac{2A_0}{T} t\varepsilon(t) - \frac{4A_0}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{2A_0}{T}(t - T)\varepsilon(t - T)$

Ennek Laplace transzformáltja: $u_s(s) = \frac{2A_0}{T*s^2} - \frac{4A_0}{T*s^2}e^{-s\frac{T}{2}} + \frac{2A_0}{T*s^2}e^{-sT}$

Az átviteli függvény: $H(s) = \frac{0{,}0005s}{0{,}00027s^3+0{,}0108s^2+0{,}09s+1}$

$$I(s) = u_s(s) * H(s) = \frac{0{,}5333 - 1{,}0666 * e^{-0{,}01875s} + 0{,}5333 * e^{-0{,}0375s}}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}$$

A válasz időfüggvényének meghatározásához a szuperpozíció elvét alkalmazom.

$$i(t) = L^{-1}\left\{\frac{0{,}5333}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1{,}0666 * e^{-0{,}01875s}}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}\right\} +$$

$$+L^{-1}\left\{\frac{0{,}5333 * e^{-0{,}0375s}}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}\right\}$$

A parciális törtek létrehozásában a MatLabot használtam. [r,p,k]=residue(szamlalo,nevezo)

$$e1 := L^{-1}\left\{\frac{0{,}5333}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{-0{,}0593}{s - (-33{,}333)} + \frac{-0{,}237 + 0{,}1778j}{s + 3{,}333 - 10j} + \frac{-0{,}237 - 0{,}1778j}{s + 3{,}333 + 10j} + \frac{0{,}5333}{s - 0}\right\} =$$

$$= \varepsilon(t)\left(0{,}5333 - 0{,}0593e^{-33{,}333t} + 2Re\left\{0{,}29e^{j2{,}5} * e^{(-3{,}333+10j)t}\right\}\right) =$$
$$\boldsymbol{\varepsilon(t)\left(0,5333 - 0,0593e^{-33{,}333t} + 0,58e^{-3{,}333t} * \cos(10t + 2,5)\right)}$$

$$e2 := L^{-1}\left\{\frac{1{,}0666 * e^{-0{,}01875s}}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\left(\frac{0{,}1185}{s + 33{,}333} + \frac{0{,}4741 - 0{,}3556j}{s + 3{,}333 - 10j} + \frac{0{,}4741 + 0{,}3556j}{s + 3{,}333 + 10j} + \frac{-1{,}0667}{s}\right) * e^{-0{,}01875s}\right\} =$$

$$= \varepsilon(t - 0{,}01875)\left(-1{,}066 + 0{,}1185e^{-33{,}33(t-0{,}01875)} + 2Re\left\{0{,}593e^{-j0{,}644} * e^{(-3{,}333+10j)(t-0{,}01875)}\right\}\right) =$$

$$\boldsymbol{\varepsilon(t - 0{,}01875)\left(-1{,}066 + 0{,}1185e^{-33{,}33(t-0{,}01875)} + 1{,}186e^{-3{,}333(t-0{,}01875)}\cos(10(t - 0{,}01875) - 0{,}644)\right)}$$

$$e3 := L^{-1}\left\{\frac{0{,}5333 * e^{-0{,}0375s}}{0{,}00027s^4 + 0{,}0108s^3 + 0{,}09s^2 + s}\right\} =$$

$Ugyan\ az\ mint\ L^{-1}\{e1\}, csak\ időben\ eltolva\ (t - 0{,}0375)$

$$\boldsymbol{\varepsilon(t - 0{,}0375)\left(0{,}5333 - 0{,}0593e^{-33{,}333(t-0{,}0375)} + 0{,}58e^{-3{,}333(t-0{,}0375)} * \cos(10(t - 0{,}0375) + 2{,}5)\right)}$$

A válasz időfüggvénye a fenti három függvény összege:

$$\boldsymbol{y(t) = \varepsilon(t)\left(0{,}5333 - 0{,}0593e^{-33{,}333t} + 0{,}58e^{-3{,}333t} * \cos(10t + 2{,}5)\right) +}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon(t - 0{,}01875)\left(-1{,}066 + 0{,}1185e^{-33{,}33(t-0{,}01875)} + 1{,}186e^{-3{,}333(t-0{,}01875)}\cos(10(t - 0{,}01875) - 0{,}644)\right) +}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon(t - 0{,}0375)\left(0{,}5333 - 0{,}0593e^{-33{,}333(t-0{,}0375)} + 0{,}58e^{-3{,}333(t-0{,}0375)} * \cos(10(t - 0{,}0375) + 2{,}5)\right)}$$