4. Közönséges, másodrendű, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenletek

Általános alak:

$$y'' + py' + qy = r(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y''(x) + py'(x) + qy(x) = r(x)$$

0. A megoldás menete

1. Megoldjuk a homogén egyenletet:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

   Az általános megoldást jelöljük y_h-val.

2. Megkeressük az

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

   inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Jelöljük y_p-vel.

3. Az inhomogén egyenlet általános megoldása, y_{inhom}, a kettő összege:

$$y_{inhom} = y_h + y_p$$

1. A homogén egyenlet megoldása

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete a következő:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Ennek megoldásai a D diszkrimináns függvényében:

1. $D > 0$, azaz két pozitív gyöke van: α_1 és α_2
2. $D = 0$, azaz egy darab kétszeres gyöke van: α
3. $D < 0$, azaz két komplex konjugált gyöke van: $\alpha + \beta i$ és $\alpha - \beta i$

1.1. Általános megoldás a $D > 0$ esetben

$$y_h = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

Példák

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$
   A megoldás: $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$
   Figyeljük meg, hogy a megoldás exponenciális gyorsan tart 0-hoz x növekedésével. Mindig ez történik, ha mindkét gyök negatív.

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$
   A megoldás: $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$
   Figyeljük meg, hogy a megoldás exponenciális gyorsan távolodik 0-tól. Mindig ez történik, ha valamelyik gyök pozitív.

1.2. Általános megoldás a $D = 0$ esetben

$$y_h = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

Példák

1. $y'' - 6y' + 9y = 0$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\alpha = 3$
   A megoldás: $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x}$
   Ha pozitív az α, akkor exp. gyorsan távolodik 0-tól.

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\alpha = 2$
   A megoldás: $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x}$
   Ha α negatív, akkor exp. gyorsan 0-hoz konvargál x növekedésével.

1.3. Általános megoldás a $D < 0$ esetben

$$y_h = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Példák

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $-1 \pm 2i$, azaz $\alpha = -1$ és $\beta = 2$
   A megoldás: $y_h = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x$
   Ha α negatív, akkor rezegve ugyan, de exponenciális gyorsan tart 0-hoz x növekedésével.

2. $y'' - 6y' + 25y = 0$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $3 \pm 4i$, azaz $\alpha = 3$ és $\beta = 4$
   A megoldás: $y_h = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$
   Ha α pozitív, akkor exponenciálisan növekedő hullámok keverékei a megoldások.

3. $y'' + 25y = 0$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\pm 5i$, azaz $\alpha = 0$ és $\beta = 5$
   A megoldás: $y_h = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$
   Ha α nulla, akkor konstans amplitudójú hullámok keverékei a megoldások.

2. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása speciális jobboldal esetén

Tegyük fel, hogy a jobboldal

$$\begin{aligned} r(x) &= P_n(x)e^{\alpha_r x}\cos(\beta_r x), \quad \text{vagy} \\ r(x) &= P_n(x)e^{\alpha_r x}\sin(\beta_r x) \end{aligned}$$

alakú, ahol $P_n(x)$ egy n-edfokú polinom, továbbá α_r és β_r valós számok (lehetnek 0-k is!). A megoldás első lépése ezen mennyiségek meghatározása.

Ekkor három esetet választunk szét annak megfelelően, hogy $\alpha_r \pm \beta_r i$ gyöke-e a karakterisztikus egyenletnek.

2.1. $\alpha_r \pm \beta_r i$ nem gyökök

Ekkor van egy **partikuláris megoldás**

$$y_p = Q_n(x)e^{\alpha_r x}\cos(\beta_r x) + R_n(x)e^{\alpha_r x}\sin(\beta_r x)$$

alakban, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ n-edfokú polinomok, melyek együtthatóit a differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

Példák olyan esetekre, amikor $\alpha_r \pm \beta_r i$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek:

1. $y'' + 3y' = (4x+2)e^{-3x}\sin x$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: 0,3
   $\alpha_r \pm \beta_r i = -3 \pm 1i$,

2. $y'' - 6y' + 25y = 6e^{2x}$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $3 \pm 4i$
   $\alpha_r \pm \beta_r i = 2$, $(\beta_r = 0!)$

3. $y'' + 2y' + 5y = -4x^2\cos(2x)$
   A karakterisztikus egyenlet gyökei: $-1 \pm 2i$
   $\alpha_r \pm \beta_r i = \pm 2i$, $(\alpha_r = 0!)$

2.2. egyszeres valós gyök, komplex gyökök

pontosabban két eset van

A) $\underline{\beta_r = 0}$ és a karakterisztikus egyenletnek két valós gyöke van: α_1 és α_2.
α_r ezek közül az egyik.

Például:

(a) $y'' + 3y' = 6$
A karakterisztikus egyenlet gyökei: 3,0
$\alpha_r \pm \beta_r i = 0$ $(\beta_r = 0!)$, azaz $\alpha_r = 0$

(b) $y'' + 3y' = (3x-2)e^{3x}$
A karakterisztikus egyenlet gyökei: 3,0
$\alpha_r \pm \beta_r i = 3$ $(\beta_r = 0!)$, azaz $\alpha_r = 3$

B) $\underline{\beta_r \neq 0}$ és a karakterisztikus egyenlet gyökei $\alpha_r \pm \beta_r$.

Például:

(a) $y'' + \beta_r^2 y = (2x+1)\cos(\beta_r x)$
A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\pm\beta_r i$
$\alpha_r \pm \beta_r i = \pm\beta_r i$

(b) $y'' + 2y' + 5y = -4x^2e^{-x}\sin(2x)$
A karakterisztikus egyenlet gyökei: $-1 \pm 2i$
$\alpha_r \pm \beta_r i = -1 \pm 2i$

Ekkor van egy **partikuláris megoldás**:

$$y_p = xQ_n(x)e^{\alpha_r x}\cos(\beta_r x) + xR_n(x)e^{\alpha_r x}\sin(\beta_r x)$$

alakban, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ n-edfokú polinomok, melyek együtthatóit a differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

Megjegyzés. A B) esetben a differenciálegyenlet általános alakja az $\alpha_r \pm \beta_r i$ gyökök mellett a következő:

$$y'' - 2\alpha_r y' + (\alpha_r^2 + \beta_r^2)y = P_n(x)e^{\alpha_r x}\sin(\beta_r x), \text{ vagy } \cos(\beta_r x) \tag{1}$$

Ha azt is feltesszük, hogy $P_n(x)$ 0-adfokú, azaz egy konstans, akkor a partikuláris megoldást az

$$y_p = xAe^{\alpha_r x}\cos(\beta_r x) + xBe^{\alpha_r x}\sin(\beta_r x)$$

alakban keressük, ahol A, és B konstansok. Ezt visszahelyettesítve a (1) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'' - 2\alpha_r y_p' + (\alpha_r^2 + \beta_r^2)y_p = \\ = 2B\beta_r e^{\alpha_r x}\cos(\beta_r x) - 2A\beta_r e^{\alpha_r x}\sin(\beta_r x)$$

2.3. Kétszeres valós gyök

Tegyük fel, hogy $\underline{\beta_r = 0}$ és a karakterisztikus egyenletnek egy darab kétszeres gyöke van, α, ami megegyezik α_r-rel, azaz $\underline{\alpha = \alpha_r}$. Ebben az esetben a differenciálegyenletnek az általános alakja a következő:

$$y'' - 2\alpha_r y' + \alpha_r^2 y = P_n(x)e^{\alpha_r x}$$

Ekkor van egy **partikuláris megoldás**:

$$y_p = x^2 Q_n(x)e^{\alpha_r x}$$

alakban, ahol $Q_n(x)$ n-edfokú polinom, melynek együtthatóit a differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

3. Feladatok

3.1. Homogén egyenlet

1. $y'' - 6y' + 8y = 0$
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$
3. $y'' + 4y' = 0$
4. $y'' - 4y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$

3.2. Inhomogén egyenlet

1. $y'' - 6y' + 13y = (8x+4)e^{3x}$
   $y_{inhom} = C_1e^{3x}\cos 2x + C_2e^{3x}\sin 2x + (2x+1)e^{3x}$
2. $y'' + 3y' = 6 + 9\sin 3x + 4e^{-3x}$
   $y_{inhom} = C_1 + C_2e^{-3x} + 2x + \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x + ...$
3. $y'' - 2y' - 3y = 2\cos 3x$
   $y_{inhom} = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{15}(2\cos 3x + \sin 3x)$
4. $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$
   $y_{inhom} = C_1e^{3x}\cos 5x + C_2e^{3x}\sin 5x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$
5. $y'' - 6y' + 25y = 24xe^{3x} + 2e^{-3x}\sin 4x$
   $y_{inhom} = ...$
6. $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$
   $y_{inhom} = C_1 + e^{2x} + C_2e^{-x} + 2e^{3x}$
7. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$
   $y_{inhom} = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{5}xe^{-x}$
8. $y'' - y = (2x+3)e^x + xe^{2x}$
   $y_{inhom} = C_1e^x + C_2e^{-x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$
9. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 2)$
   $y_{inhom} = C_1 + C_2e^{2x} + (1 - x - x^2)e^x$
10. $y'' + y + \sin 2x = 0$
    $y_{inhom} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$