Fizika 1

BME TE11AX01

Dr. Márkus Ferenc előadásai alapján

Készítette: Fülep Szabolcs

Tartalom

Kinematika

A kinematika lényegében arra keres választ, hogy a pontszerűnek tekintett test mikor, hol található?

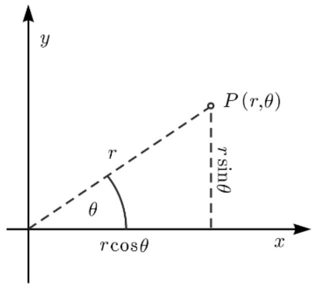
Síkbeli és térbeli mozgások

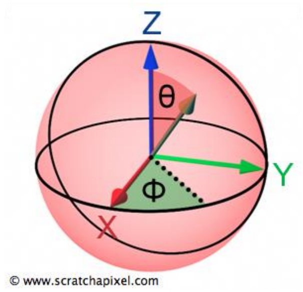
Koordinátarendszer alatt valamilyen egyértelműen meghatározható ponthoz rögzített vonatkozási rendszert értünk, amiben a meghatározott pontot mi választhatjuk meg. Ezt érdemes úgy megtenni, hogy a számításainkat könnyítse

- 2 dimenziós koordinátarendszerek:

  Egy síkbeli pont helyzetének megadására leggyakrabban a derékszögű- vagy a síkbeli polárkoordinátarendszert használjuk.

  - Derékszögű koordinátarendszer $P(x, y)$
    - $x = r \cdot \cos\theta$
    - $y = r \cdot \sin\theta$
  - Polárkoordinátarendszer $P(r, \theta)$
    - $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad tg\theta = \frac{y}{x}$



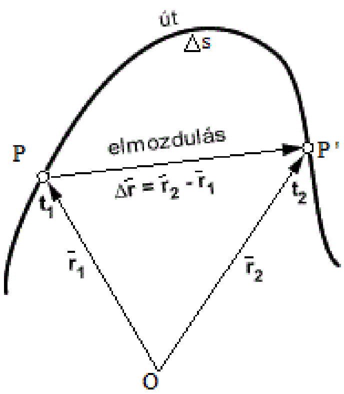


- 3 dimenziós koordinátarendszerek:
  - Derékszögű koordinátarendszer $P(x, y, z)$
  - Henger koordinátarendszer $P(r, h, \varphi)$
  - Gömbi koordinátarendszer $P(r, \phi, \theta)$
    - $x = r \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta$
    - $y = r \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta$
    - $z = r \cdot \cos\theta$

Rögzítsük a koordinátarendszert, és vegyünk fel egy az origón kívüli P pontot.

Ekkor $\underline{r_1}$ P pont helyvektora.

Helyvektor alatt az origót és P pontot összekötő irányított szakaszt értjük.



Az elmozdulás vektor a kezdő és a végpontot összekötő vektor. A két pont közötti pálya tényleges alakjától független az elmozdulás vektor.

$$\underline{\Delta r} = \underline{r_2} - \underline{r_1}$$

A pontszerű test által érintett pontok halmaza a pálya. A pálya általános esetben egy térgörbe. Miközben a test elmozdul, befutja a pálya egy darabját. A Δt idő alatt befutott pályadarab az út.

$$\Delta s = \lim_{\underline{\Delta r} \to 0} \sum_P^{P'} \underline{\Delta r} = \int_P^{P'} \underline{\Delta r}$$

$$\Delta s \sim |\underline{\Delta r}|, ha\ \Delta t\ elég\ kicsi$$

Sebesség

A pálya megadja a mozgás geometriáját, de az időbeli lefolyásról nem mond semmit. A mozgás „gyorsaságát” a sebesség jellemzi.

A sebesség vektor mennyiség.

Átlagsebesség

Az átlagsebesség az elmozdulásvektor és az elmozduláshoz szükséges idő hányadosaként definiáljuk.

$$v_{átl} = \frac{s_{összes}}{t_{összes}}$$

$$v_{átl} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\underline{v_{átl}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\underline{v} \approx \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Pillanatnyi sebesség

Ha Δt időttartamot egyre kisebbnek választjuk, akkor egyre részletesebb információt kapunk a tömegpont sebességének változásáról. A sebesség pillanatnyi értékét a t időpillanatban egy határérték segítségével határozhatjuk meg.

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

$$\underline{v(t)} = \frac{d\underline{r(t)}}{dt} \qquad \underline{v} = \underline{\dot{r}}$$

Ebből látszik, hogy a pillanatnyi sebesség is vektormennyiség, ami mindig érintő irányú a pályára nézve.

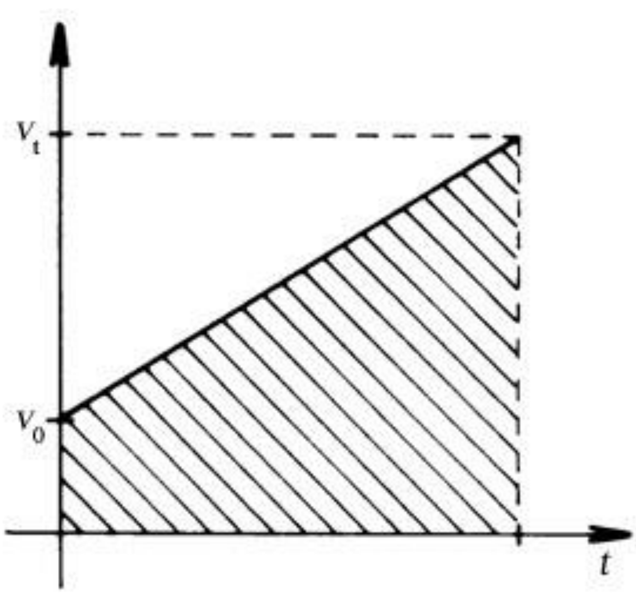
Sebességkomponensek:

A deriválási szabály alapján a vektoriális mennyiségeket komponensenként deriválhatjuk.

$\underline{v} = \frac{dx}{dt}\underline{e_x} + \frac{dy}{dt}\underline{e_y} + \frac{dz}{dt}\underline{e_z} = v_x\underline{e_x} + v_y\underline{e_y} + v_z\underline{e_z}$, ahol $\underline{e_x}, \underline{e_y}, \underline{e_z}$ az egységvektorokat jelölik. A $v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$ $v_z = \frac{dz}{dt}$ skalármennyiségek a sebességvektor koordinátái. A sebességvektor nagysága a sebességkomponensek nagyságából meghatározható.

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$[v] = \frac{m}{s}$$



Gyorsulás

A mozgások dinamikai leírásában fontos szerepe van a gyorsulás fogalmának. A gyorsulásvektor a sebességvektor változási sebessége.

Átlagos gyorsulás:

Az átlagos gyorsulást a sebességvektor megváltozásából számíthatjuk.

$$\underline{a}_{átl} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

A pillanatnyi gyorsulást pedig a pillanatnyi sebesség képletéhez hasonlóan számíthatjuk.

$$\underline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}$$

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}}$$

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$

A sebességvektorhoz hasonlóan a gyorsulás vektor is felírható komponensenként

$$\underline{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \underline{e_x} + \frac{d^2 y}{dt^2} \underline{e_y} + \frac{d^2 z}{dt^2} \underline{e_z}$$

A sebességhez hasonlóan megadhatóak a gyorsulás koordinátái is.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

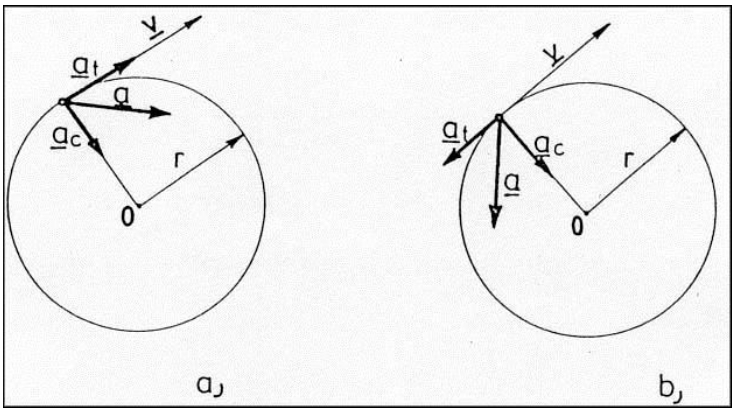
A gyorsulásvektor nagysága: $a = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Körmozgás

Mivel a körmozgás rendkívül gyakori, ezért egy kényelmes és egyszerűen kezelhető jelölési rendszert alkalmazunk a körmozgások leírására

Körmozgásról akkor beszélünk, ha a test által leírt pálya kör alakú.

A körmozgás leírható a derékszögű koordináták segítségével is, de sokkal egyszerűbb, ha a síkbeli polárkoordinát-arendszert használjuk.



Szögelfordulás

Egy körmozgást végző test helyzetét megadhatjuk egy kiválasztott irányhoz viszonyított forgásszöggel.

$\theta = \frac{s}{r}$, *ahol s az ívhosszt jelöli, r pedig a sugarat*

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \ \rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.3^\circ$$

$$[\theta] = \text{rad}$$

Sebesség

Egy körmozgást végző test sebessége mindi érintő irányba mutat.

Gyorsulás

Egy körmozgást végző test gyorsulása akkor sem zérus, ha a test egyenletes sebességgel halad, mivel a sebességvektor iránya mindig változik. Ez két gyorsulási komponenst eredményez, egy érintő irányút, más szóval tangenciálist, és egy sugár irányban befelé mutató, normálisat.

Tangenciális gyorsulás

Ez a gyorsulás komponens mindig érintő irányú. Tangenciális komponense csak gyorsuló, vagy lassuló körmozgásnál jelentkezik. Ha a test gyorsul, akkor a mozgással megegyező irányba, ha lassul, akkor vele ellentétes irányba mutat. Ha a sebesség állandó, akkor a tangenciális gyorsulás zérus.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Centripetális gyorsulás

A gyorsulás másik komponense a centripetális gyorsulás, amely merőleges a pályára. Normális komponens egyenletes körmozgásnál is fellép. Ezt az összetevőt, ami mindig a kör középpontja felé mutat centripetális gyorsulásnak nevezzük.

$$a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v = -\frac{v^2}{r}$$

$a = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_n} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_t}$, *ahol* $\overrightarrow{e_n}$ *a normális és* $\overrightarrow{e_t}$ *pedig a tangenciális irányú egységvektor.*

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$

Szögsebesség

Az θ forgásszög változási sebessége az ω szögsebesség, ami a sebességhez hasonlóan definiálható.

$$\underline{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

Szöggyorsulás

A szögsebesség változási sebességének jellemzésére bevezethető a szöggyorsulás.

$$\underline{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \beta r$$

$$a_{cp} = -\frac{v^2}{r} = -v\omega = -\omega^2 r$$

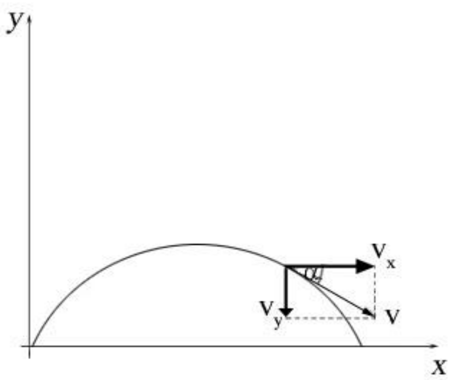
Periódusidő, fordulatszám

Egyenletes körmozgás jellemzésére használható még a T periódusidő, valamint az f fordulatszám.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \omega/2\pi$$

Hajítások

Most csak a kétdimenziós hajításokat vizsgáljuk, ahol a légellenállást elhanyagoljuk és a gyorsulást állandónak tekintjük.



$$a = g = 9.81\frac{m}{s^2} = áll.$$

Galilei szerint a szabadon eső testek mozgása két külön álló komponensből tevődik össze, így külön vizsgálható az x illetve az y irányú komponens. Mind a két esetben egyenes vonalú egyenletes mozgásról beszélünk.

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = h$$

$$v_{x0} = \text{v}\cos\alpha \qquad v_{y0} = \text{v}\sin\alpha$$

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

Ezek alapján a sebesség- és helykoordináták meghatározhatóak.

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_0^t a_x(\tau)d\tau = v\cos\alpha$$

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_0^t a_y(\tau)d\tau = v\sin\alpha - gt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(\tau)d\tau = v\cos\alpha t$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(\tau)d\tau = h + v\sin\alpha t - \frac{g}{2}t^2$$

Dinamika

Mért gyorsulnak a testek?

- Arisztotelész: A mozgás fenntartásához külső hatás kell.
- Galilei: Egyenes vonalú egyenletes mozgás valamint a nyugalom külső hatás nélkül történik.

A testet érő hatások és a test mozgása között kapcsolatot vizsgálja a dinamika.

Az erő fogalma

A mechanikában a testek közötti kölcsönhatásokat leíró mennyiség az erő. Az erő vektoriális mennyiség, vagyis az erő nagyságát és irányát is megadja.

Newton törvények

A Newton-törvények a klasszikus mechanika alaptörvényei. Bár a XX. században kiderült, hogy fénysebességhez közeli sebességek és atomi méretek esetén a Newton- törvények nem írják le helyesen a természetet, de hétköznapi esetekben továbbra is a számítások alapvető összefüggései.

I. törvény (tehetetlenségi törvény):

Minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, amíg valami külső hatás nem éri.

Következménye, hogy az inerciarendszerek léteznek, és többi Newton törvény ezekben érvényes.

Inerciarendszernek tekintünk minden olyan rendszert, ahol Newton I. törvénye érvényesül. Ezek a rendszerek egymáshoz képest nyugalomban vannak, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.

A Föld szigorúan véve nem inerciarendszer, mivel forog és kering is, de a különleges eseteket leszámítva közelítőleg tekinthető annak.

II. törvény:

Mérések szerint földi körülmények között, jó közelítéssel érvényes, hogy az erő által létrehozott gyorsulás az erővel egyirányú, és egyenesen arányos vele. $F \sim a$

Ebből következik, hogy az adott testre az F/a hányados állandó. Ez a tehetetlen tömeg, amit m-mel jelölünk. $m = \frac{\underline{F}}{\underline{a}}$

Fontos megjegyezni, hogy van egy másik tömeg is, az ún. súlyos tömeg, ami a gravitációs kölcsönhatásban való részvételt jellemzi. Bár más jellemzőnek tűnik, a tapasztalat szerint mégis arányos a tehetetlen tömeggel.

Az erő és a sebességváltozás kapcsolatát megadó törvényt nevezzük Newton II. törvényének.

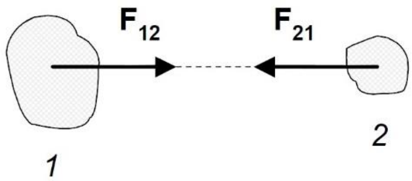
$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

Mivel két új mennyiség szerepel ezért az egyik egysége szabadon megválasztható, a másik egység ezután már az összefüggésből következik. A gyakorlatban először a tömeg egységét rögzítették. A tömeg egységeként 1 l 4˚C-os víz tömegét választották, és ezt 1 kg-nak nevezik. $[m] = kg$

Ezek után az erő egysége, amit Newtonról neveztek el $1kg \cdot 1\frac{m}{s^2} = 1N$.

III. törvény:

Tapasztalati tény, hogy két egymással kölcsönhatásban álló test ugyanakkora erőt fejt ki a másikra. $\underline{F_{12}} = -\underline{F_{21}}$



Ha a testekre az egymásra hatáson kívül semmilyen más erő nem hat, akkor a III. törvény és a II. törvény kombinációjából azt kapjuk, hogy fennállnak az

$m_1\underline{a_1} = -m_2\underline{a_2}$ $\quad m_1\frac{d\underline{v_1}}{dt} = -m_2\frac{d\underline{v_2}}{dt}$ összefüggések.

Ha a tömeget állandónak tekintjük, akkor $\frac{d\left(m_1\underline{v_1}\right)}{dt} = -\frac{d\left(m_2\underline{v_2}\right)}{dt}$ összefüggés is fennáll. Ebből az következik, hogy a kölcsönható testeken az m·v mennyiség változása azonos nagyságú és ellentétes irányú. $\frac{d}{dt}\left(m_1\underline{v_1} + m_2\underline{v_2}\right) = áll. \;\rightarrow m_1\underline{v_1} + m_2\underline{v_2} = 0.$

Látható, hogy az m·v mennyiségek összege a kölcsönható testekre nézve nem változik, ezért külön fizikai mennyiségként vezették be. p= mv.

Ezt behelyettesítve az előző egyenletbe, azt kapjuk, hogy $\underline{p_1} + \underline{p_2} = áll.$

Vagyis ha a két test csak egymással áll kölcsönhatásban, akkor lendületük összege nem változik. Ez a lendület-megmaradás törvénye.

A lendülettel kifejezve Newton II. törvénye: $F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}$

IV. törvény:

Newton II. törvényét úgy fogalmaztuk meg, hogy a testre egy erő hat. Külön eset az, amikor a tömegpontra nem egy, hanem több erő hat. A kísérletek azt bizonyítják, hogy ilyenkor az összes erőre külön-külön teljesül Newton II. törvénye, vagyis az erők egymástól függetlenek.

Ez az erőhatások függetlenségének elve (Newton IV. törvénye).

Ennek következménye, hogy ha egy testre két erő hat, akkor mivel a gyorsulás vektor mennyiség, a pont eredő gyorsulása: $\underline{a} = \underline{a_1} + \underline{a_2} = \frac{\underline{F_1}}{m} + \frac{\underline{F_2}}{m} = \frac{\underline{F_1+F_2}}{m}$, azaz a test úgy mozog mintha a rá ható erők vektoriális összege hatna rá. Több erő hatás esetén Newton II. törvénye az erők vektoriális összegéra, azaz az eredő erőre érvényes $F_{eredő} = ma$.

A IV. törvényből következik, hogy egy nyugvó tömegpont nem csak akkor marad egyensúlyban, ha nem hat rá erő, hanem akkor is, ha a rá ható erők eredője zérus.

Kölcsönhatások:

Rugalmas kölcsönhatás:

Rugalmas testekben a deformáció hatására olyan erő lép fel, amely ellentétes irányú a deformációt létrehozó erővel.

$\underline{F} = -k \cdot \underline{x}$ (Hooke- törvény)

Gravitációs kölcsönhatás: $\underline{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \underline{r_e}$

Nehézségi erő:

Minden testre hat a Föld gravitációs vonzása. A nehézségi erő a Föld forgása miatt kicsit eltér ettől.

Nagysága és iránya nem függ más erőktől, vagyis szabad erő.

$$g \approx \gamma \cdot \frac{M_{Föld}}{R^2}$$

$$\underline{F} = \underline{G} = m \cdot \underline{g}$$

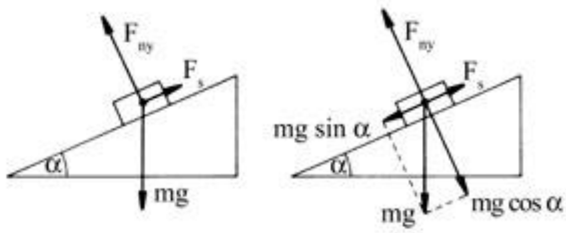
Elektrosztatikus kölcsönhatás: $\underline{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

Kényszererők:

A kényszererő nagyságát a testekre ható egyéb erők határozzák meg a kényszerfeltételek alapján.

Nyomóerő: Mindig merőleges a felületre, és mindig nyomó irányú.

Kötélerő: Mindig párhuzamos a kötéllel és mindig húzó irányú.



Súrlódás: $\underline{F} = \mu \cdot \underline{F_{ny}}$

Súrlódási erő csak két érintkező test között léphet fel.

Két típusa van:

Csúszási súrlódás:

A csúszó súrlódási erő az érintkező felületek közös érintősíkjába esik.

Iránya ellentétes az adott test másik testhez viszonyított relatív sebességével.

Az erő arányos a testek közötti nyomóerővel, és az arányossági tényező a csúszási súrlódási együttható

Tapadási súrlódás:

Akkor értelmezhető, ha a testek relatív sebessége 0.

Nagysága mindig akkora, hogy a test nyugalomban maradjon.

Közegellenállási erő:

Gázokban és folyadékokban a mozgó testek kölcsönhatásban vannak az őket körülvevő közeggel.

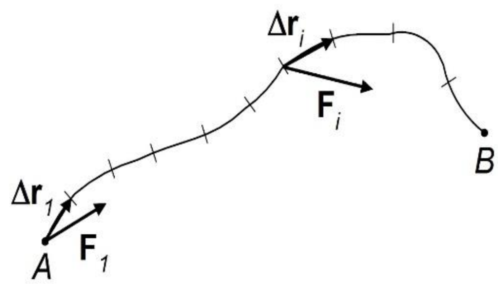
Az erő a közeghez viszonyított sebességgel ellentétes irányú.

Ha a sebesség kicsi, akkor a közegellenállási erőre igaz, hogy $F_k \sim v$

Ha a sebesség nagy, akkor $F_k \sim v^2$

Mechanikai munka

Egy tömegpontra ható $\underline{F}$ erő akkor végez munkát, ha az erőhatás közben a tömegpont elmozdul. A végzett elemi munkát (Δ W) egy elemi $\Delta \underline{r}$ elmozdulás során az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként definiáljuk. $\Delta \underline{W} = \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}$.
A mechanikai definíciója szerint a munka előjeles mennyiség, valamint mechanikai értelemben egy erő nem végez munkát, ha nincs elmozdulás, vagy ha az elmozdulás merőleges az erőre.



$$\underline{W_{AB}} = \lim_{\Delta \underline{r} \to 0} \sum_i \underline{F_i} \Delta \underline{r_i} = \int_A^B \underline{F} d\underline{r}$$

Állandó erőt, és egyenes pályát feltételezve megkapjuk a közismertebb képletet: $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$

Munkatétel, mozgási energia

A tömegpontra ható eredő erő munkája megegyezik a tömeg mozgási energiájának megváltozásával.

Bizonyítás:

$W_e = \int \underline{F_e} d\underline{r} = \Delta E_m$ Ezt gyakran a munkatételnek nevezik.

Newton II. törvénye alapján $\underline{F_e} = m\underline{a} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$

Valamint a sebesség definíciója alapján: $d\underline{r} = \underline{v}dt$

$$W_e = \int_1^2 \underline{F_e} d\underline{r} = \int_{t1}^{t2} m\frac{d\underline{v}}{dt}\underline{v}dt = m\int_{v1}^{v2} \underline{v}d\underline{v} = \frac{1}{2}m\underline{v_2^2} - \frac{1}{2}m\underline{v_1^2}$$

Ebből látható, hogy a gyorsítási munka független az úttól, valamint a gyorsítás idejétől.

$$E_m = \frac{1}{2}m\underline{v}^2$$

$$W_e = \Delta E_m$$

Mechanikai energia

A test fizikai állapotát egy adott pillanatban leíró skalármennyiség.

$$[E] = J\ (Joule)$$

Energia fajtái:

Mozgási energia:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Helyzeti energia:

$$E_p = mgh$$

Mindig kell egy viszonyítási pont.

Ekvipotenciális vonalaknak, felületnek nevezzük azon pontok halmazát, ahol a potenciális energia azonos.

Rugóenergia: $E_r = \int_0^x -Dxdx = -\frac{1}{2}Dx^2$

Azzal, hogy összenyomunk, vagy megnyújtunk egy rugót, azzal munkát végeztünk, ami a későbbiekben visszanyerhető, tehát képesek vagyunk energiát tárolni.

Termikus energia: Mechanikában a disszipatív erők által végzett munkát jelöli.

Erők típusai:

Konzervatív erőtér:

Olyan erő, amelynek munkavégzése csak az elmozdulás kezdő és végpontjától függ, független az úttól.

Erő munkája: $W = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b m\frac{dv}{dt}dx = \int_a^b m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = \int_a^b m\frac{dv}{dx}vdx = \int_a^b m \cdot v \cdot dv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$

Konzervatív erőtérben általánosan bevezethetjük egy pontszerű testnek egy adott O vonatkoztatási ponthoz viszonyított energiáját tetszőleges P pontban

$$E^o(P) = -W_k^{OP} = -\int_O^P \underline{F_k}d\underline{r}$$

Másképp megfogalmazva: ha egy pontból kiindulva valamilyen pályán visszatérünk a kiindulási pontba, és kiszámoljuk ezen a zárt görbén a konzervatív erő munkáját, akkor a definíció értelmében nulla lesz az eredmény $\oint \underline{F_k}(\underline{r})d\underline{r} = 0$

Konzervatív rendszerről beszélünk abban az esetben, ha a rendszerben csak konzervatív erők hatnak.

Konzervatív rendszerben definiálhatjuk a potenciális függvényt, ami a konzervatív erők ellenében végzet munka.

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r_1} \underline{F}(r)d\underline{r}$$

$$\underline{F}(\underline{r}) = -grad(U)$$

Centrális erő:

Centrális erőkről akkor beszélünk, ha bármilyen irányt véve a térben, az erő hatásvonala mindig a középpont és a test között lesz, nagysága pedig a távolsággal arányos. Ilyen erők például a gravitációs erő, valamint az elektrosztatikus erő.

Disszipatív erő:

Disszipatív erőkről akkor van szó, ha a munka függ az úttól.

Energiamegmaradás

Ha a tömegpontra csak konzervatív erők hatnak, vagy a rá ható nem konzervatív erők összes munkája nulla, akkor a tömegpont mechanikai energiája nem változik meg.

$$\Delta E = 0$$

Ha a tömegpontra egyszerre hatnak konzervatív és nem konzervatív erők, és az elmozdul A pontból B-be, akkor a munkatétel szerint azt írhatjuk fel:

$$\int_A^B (\underline{F_k} + \underline{F_{nk}})d\underline{r} = \int_A^B \underline{F_k}d\underline{r} + \int_A^B \underline{F_{nk}}d\underline{r} = W_k + W_{nk} = \Delta E_m$$

Tudjuk, hogy $W_k = -\Delta E_h\ \ amiből\ következik, hogy$: $W_{nm} = \Delta E_m + \Delta E_h$

Mivel a helyzeti- és a mozgási energia összegét a tömegközéppont mechanikai energiájának nevezik $E = \Delta E_m + \Delta E_h$, így a fentiekből következik, hogy $W_{nk} = \Delta E$. Azaz a tömegközéppont teljes mechanikai energiájának megváltozása egyenlő a nem konzervatív erők által végzett munkával.

Teljesítmény

A munkavégzés vagy energiaátvitel sebessége.

Az erő munkájának idő szerinti deriváltja.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \underline{F} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \underline{F} \cdot \underline{v}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$[P] = W\ \ (Watt)$$

Ütközések

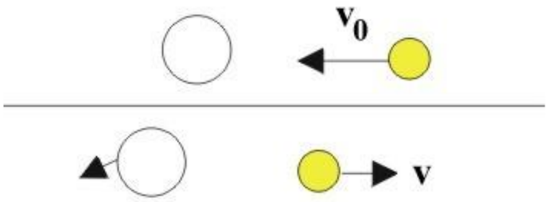
Az ütközéseket két nagy csoportba sorolhatjuk. Beszélhetünk mikroszkopikus ütközésekről, valamint makroszkopikus ütközésekről.

Mi csak a makroszkopikus esetekkel foglalkozunk, azon belül is csak a valódi ütközésekkel, amikor a két test fizikailag ütközik. Ekkor az impulzusmegmaradás törvényének teljesülnie kell.

Az általunk vizsgált makroszkopikus valódi ütközések két szélső esete, a tökéletesen rugalmas-, valamint a tökéletesen rugalmatlan ütközés.

Tökéletesen rugalmas ütközés

Tökéletesen rugalmas ütközéskor nincsenek disszipatív erők, ezáltal az impulzusmegmaradás, valamint az energiamegmaradás törvénye is teljesül.

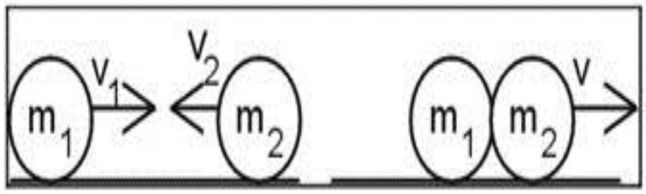


$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Tökéletesen rugalmatlan ütközés

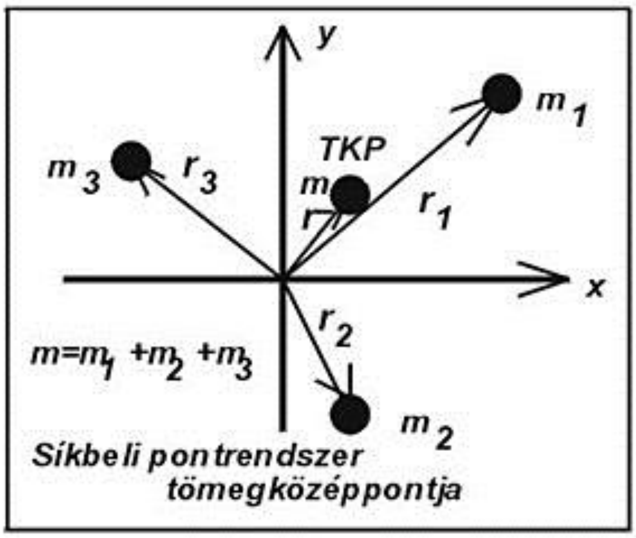
Tökéletesen rugalmas ütközés után a két test összekapcsolóik, és azonos sebességgel haladnak tovább. Ebben az esetben az energiamegmaradás törvénye nem teljesül, csak az impulzusmegmaradás.



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_2$$

Pontrendszerek

A pontrendszer teljes tömege az egyes tömegpontok tömegének összege.



$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

A pontrendszerre jellemző adat a tömegközéppont. A tömegközéppontba mutató helyvektor, az egyes tömegpontokba mutató helyvektorok tömeggel súlyozott számtani közepe.

$$\underline{r_{TKP}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r_i}}{M}$$

Pontrendszer sebességét a fenti egyenlet idő szerinti deriváltja adja.

$$\underline{v_{TKP}} = \frac{d\underline{r_{TKP}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i}}{M}$$

Gyorsulását pedig a sebesség idő szerinti deriváltja.

$$\underline{a_{TKP}} = \frac{d\underline{v_{TKP}}}{dt} = \frac{d^2 \underline{r_{TKP}}}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot d^2 \underline{r_i}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{a_i}}{M}$$

Belső erők: $\underline{F_{ji}}$

Külső erők: $\underline{F_{ki}}$

$$m_1 a_1 = \sum_1 \underline{F_1} = \underline{F_{k1}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n} \underline{F_{1i}}$$

$$\vdots$$

$$m_n a_n = \sum_n \underline{F_n} = \underline{F_{kn}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n} \underline{F_{ni}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_{ki}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underline{F_{ji}} \quad , \quad ahol \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underline{F_{ji}} = 0\,, mert\ \underline{F_{ij}} = -\underline{F_{ji}}$$

$$m\underline{a_{TKP}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_{ki}}$$

Pontrendszer energiája

$$W_i = \Delta E_{mi}$$

$$W = \Delta E_m$$

$$W_i = W_{kbi} + W_{kki} + W_{nkbi} + W_{nkki}$$

$$W = W_{kb} + W_{kk} + W_{nkb} + W_{nkk} = \Delta E_m$$

$$W_{nkb} + W_{nkk} - \Delta E_{kb} - \Delta E_{kk} = \Delta E_m$$

$$W_{nkk} + W_{nkb} = \Delta E_m + \Delta E \quad kb + \Delta E_{kk} = \Delta E$$

$$W_{nkk} + W_{nkb} = \Delta E$$

$$E_{mi} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$K'\ TKP - hoz\ rögzített\ koordinátarendszer$

$$\underline{r_i} = \underline{r_{TKP}} + \underline{r_i}'$$

$$\underline{v_i} = \underline{v_{TKP}} + \underline{v_i}'$$

$$E_{mi} = \frac{1}{2} m_i \left(\underline{v_{TKP}} + \underline{v_i}'\right)^2 = \frac{1}{2} m_i (\underline{v_i}'^2 + \underline{v_{TKP}}^2 + 2\underline{v_{TKP}} \cdot \underline{v_i}')$$

$$E_m = \sum E_{mi} = \sum \frac{1}{2} m_i \underline{v_i}'^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \underline{v_{TKP}}^2 + \sum m_i \cdot \underline{v_{TKP}} \cdot \underline{v_i}'$$

$$E = E_m + E_{kb} + E_{kk}$$

Tömegközéppont tétel

A rendszer úgy mozog, mintha a tömegközéppontban egy pontba lenne összetömörítve az össztömeg, és arra a pontra hatna az eredő erő.

Pontrendszer impulzusa

$\underline{p_i} = m_i \underline{a_i}$

$$\underline{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{a_i} = \sum m_i \frac{d\underline{r_i}}{dt} = \frac{d\left(\sum m_i \underline{r_i}\right)}{dt} = \frac{dm\underline{r_{TKP}}}{dt} = m\underline{v_{TKP}}$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = m\underline{a_{TKP}} = \sum \underline{F_k}$$

Impulzusmegmaradás

$$\sum \underline{F_k} = 0 \leftrightarrow \underline{p} = áll.$$

Ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a rendszer összes lendülete nem változik.

A törvény jelentősége, hogy mechanikai problémák megoldásánál olyan egyenletet kapunk, amelyből egy ismeretlen sebesség meghatározható anélkül, hogy integrálnunk kellene egy mozgásegyenletet.

Bizonyítás: lásd III. törvény:

Erőlökés

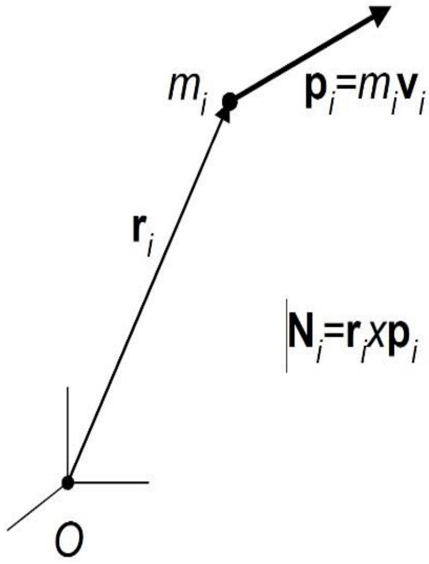
$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} \rightarrow d\underline{p} = \underline{F} \cdot dt$$

Rakétamozgás

A rakéták nagy sebességgel löknek ki magukból anyagot, és így haladnak előre. A rakéták üzemanyagot égetnek el. A keletkező gázok a rakéta végén elhelyezkedő fúvókákon keresztül a rakétához képest nagy sebességgel áramlanak ki. A kilövellő gázok nagy impulzust jelentenek a rakéta haladási irányával ellentétes irányba. A rendszer impulzusa azonban állandónak kell lennie, így a rakéta a kibocsájtott gázzal ellentétes irányba fog haladni.

Perdület (Impulzusmomentum), Forgatónyomaték

A lendület és az energia bevezetését az indokolta, hogy ezekre a mennyiségekre bizonyos esetekben igazak a megmaradási törvények. A perdület (N) bevezetésének ugyan ez az oka.



Impulzusmomentumnak nevezzük egy tömeg helyvektorának és impulzusának vektoriális szorzatát.

$\underline{N_i} = \underline{r_i} \times \underline{p_i} = \underline{r_i} \times m_i \underline{v_i}$

Egy pontrendszer $\underline{r_i}$ helyvektorú, $\underline{p_i}$ impulzusú i-edik tömegpontjának $\underline{N_i}$ perdülete az O vonatkoztatási pontra.

A definícióból látszik, hogy a perdület függ a vonatkoztatási ponttól.

Ha a mozgó pontra ható erők $\underline{F_i}$ eredője nem nulla, akkor a sebesség és gyakran a perdület is változik. Ezt az egyenletet megkapjuk az előző egyenlet deriválásával.

$$\frac{d\underline{N_i}}{dt} = \frac{d\underline{r_i}}{dt} \times \underline{p_i} + \underline{r_i} \times \frac{d\underline{p_i}}{dt},\ ahol\ \frac{d\underline{r_i}}{dt} \times \underline{p_i} = \underline{v_i} \times \underline{p_i} = 0$$

$$\frac{d\underline{N_i}}{dt} = \underline{r_i} \times \underline{F_i}$$

A jobb oldalon megjelenő mennyiséget $\underline{F_i}$ erő O pontra vonatkozó forgatónyomatékának nevezzük.

$$\frac{d\underline{N_i}}{dt} = \underline{M_i}$$

Impulzusmomentum tétel:

Egy pontrendszer perdülete az egyes pontok perdületeinek vektori összege.

Az eredő forgatónyomaték pedig az egyes pontokra ható forgatónyomatékok vektori összege.

$$\sum_i \frac{d\underline{N_i}}{dt} = \frac{d\underline{N_R}}{dt} = \sum_i \underline{r_i} \times \underline{F_{ki}} + \sum_i \underline{r_i} \times \underline{F_{bi}} = \sum_i \underline{r_i} \times \underline{F_{ki}} + \sum_i \underline{r_i} \times \sum_{j \neq i} \underline{F_{bji}}$$

Newton III. törvénye és a forgatónyomaték definíciója alapján a belső erők forgatónyomatéka nulla.

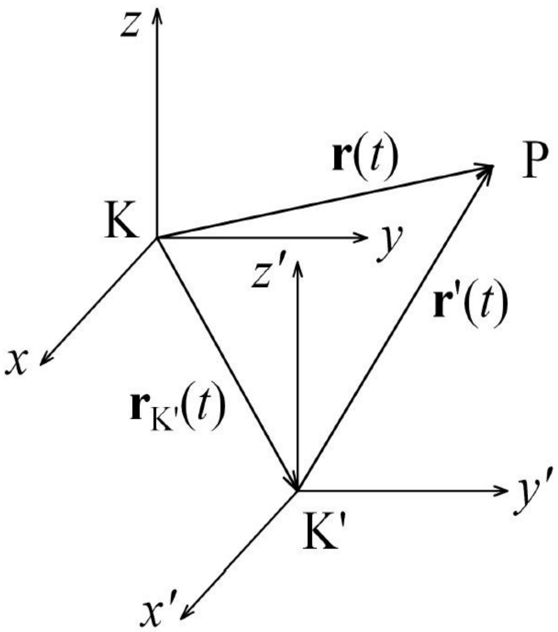
$\frac{d\underline{N_R}}{dt} = \sum_i \underline{r_i} \times \underline{F_{ki}} = \underline{M_k}$, ahol $\underline{M_k}$ a külső erők forgatónyomatéka.

Ha a külső forgatónyomatékok eredője nulla, akkor $\frac{d\underline{N_R}}{dt} = 0$ azaz $\underline{N_R}$ állandó, amiből következik, hogy a perdület nem változik. Ez az impulzusmegmaradás tétele pontrendszerre.

Mozgások leírása különböző vonatkoztatási rendszerekben

Galilei-transzformáció

Tekintsünk egy K vonatkoztatási rendszert, ami inerciarendszer, és egy hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző K’ rendszert.



A K rendszerben levő P pontba putató helyvektor $\underline{r}(t)$. A K’ rendszerben ugyan ebbe a pontba mutató helyvektor $\underline{r}'(t)$. A K’ rendszer origójának helyvektora a K rendszerben $r_{K'}(t)$. Mivel K’ egyenes vonalú egyenletes mozgást végez K-hoz képest, így:

$\underline{r}_{K'}(t) = \underline{w}t + \underline{r}_0$, ahol $\underline{w}$ K’ sebességvektora K-hoz képest, $\underline{r}_0$ meg K’ origójának helyvektora K vonatkoztatási rendszerben, t=0 időpillanatban.

A két rendszerben felírt helyvektor közötti kapcsolat a Galilei-transzformáció

$$\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{r}_{K'}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{w}t + \underline{r}_0$$

Ha ezt deriváljuk az idő szerint:

$$v(t) = v'(t) + \underline{w}$$

$$a(t) = a'(t)$$

Ebben az esetben $v(t), és\ v'(t)$ illetve $a(t)\ és\ a'(t)$ a P pont sebessége illetve gyorsulása a K valamint a K’ vonatkoztatási rendszerben.

Mindkét vonatkoztatási rendszerben felírhatjuk a P pont Descartes-koordinátáit is. Ekkor a Galilei-transzformáció koordinátákkal felírt alakja:

$$x = x' + w_x t + x_0$$

$$y = y' + w_y t + y_0$$

$$z = z' + w_z t + z_0$$

Newton II törvénye a K inerciarendszerben:

$$m\underline{a} = \underline{F_e}$$

Mivel a testre ható erők eredője független a vonatkoztatási rendszertől és mivel a gyorsulások megegyeznek a két rendszerben, így:

$$m\underline{a}' = \underline{F_e}$$

A Galilei-féle relativitás elve kimondja, hogy a jelenségeket leíró törvények az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerekben ugyanolyanok. Ha K rendszer inerciarendszer, akkor a hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző K' rendszer is inerciarendszer.

Lorentz-transzformáció

Ha egy c sebességű elektromágneses hullámot vizsgálunk két különböző, egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerben, akkor a Galilei-transzformáció értelmében $\underline{c} = \underline{c}' + \underline{w}$, azaz $\underline{c} \neq \underline{c}'$. Vagyis a fény sebessége a két rendszerben különböző lenne.

Ezek szerint a Galilei-transzformáció összhangban van a mechanika Newton-törvényeivel, viszont ellentmondásban áll az elektromágneses hullámokat leíró Maxwell-egyenletekkel.

A Lorentz-transzformáció kielégíti a $\underline{c} = \underline{c}'$ feltételt, azaz a fény minden inerciarendszerben ugyan akkora sebességgel terjed.

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk azt az esetet amikor a koordináta-rendszerek relatív sebessége párhuzamos az x-tengellyel, valamint $\underline{r_0} = 0$, akkor:

$$x = x' + \frac{wt}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t' + \frac{\frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

A két vonatkoztatási rendszerben másképp telik az idő. A speciális relativitás elméletben a mechanika törvényei mások.

Ha $w \ll c$, akkor a Lorentz-transzformáció és a Galilei-transzformáció jó közelítéssel megegyezik, így nem túl nagy sebességek esetén továbbra is lehet használni a Newton-törvényeket.

Gyorsuló vonatkoztatási rendszer

Most ismét tekintsünk egy K vonatkoztatási rendszert, amely inerciarendszer, de most K' rendszer gyorsuljon hozzá képest $\underline{a_0}$ gyorsulással.

$$\underline{r}(t) = \underline{r'}(t) + \underline{r_{K'}}(t)$$

Idő szerint deriválva az egyenletet:

$$\underline{v}(t) = \underline{v'}(t) + \underline{w}(t)$$

$$\underline{a}(t) = \underline{a'}(t) + \underline{a_0}$$

Az utolsó egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy:

$$\underline{a'} = \underline{a} - \underline{a_0}$$

$$m\underline{a'} = m\underline{a} - m\underline{a_0}$$

Newton II törvényét felírva:

$$m\underline{a} = \underline{F_e}$$

$$m\underline{a'} = \underline{F_e} - m\underline{a_0}$$

Vagyis K' rendszerben nem teljesülnek Newton törvényei, amiből következik, hogy K' rendszer nem inerciarendszer.

Ha azt szeretnénk, hogy Newton törvényei teljesüljenek, be kell vezetnünk egy fiktív, nem létező erőt, a tehetetlenségi erőt:

$$\underline{F_t} = -m\underline{a_0}$$

$$m\underline{a'} = \underline{F_e} + \underline{F_t} = \underline{F_e}'$$

Forgó vonatkoztatási rendszer

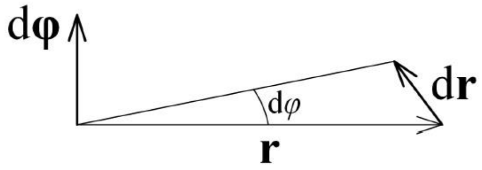
Vizsgáljunk meg egy olyan vonatkoztatási rendszert, amely egy inerciarendszerhez képest forgó mozgást végez.

A már megismert szögsebességre és szöggyorsulásra alapozva, vezessük be a ezen mennyiségeknek megfelelő vektorokat.

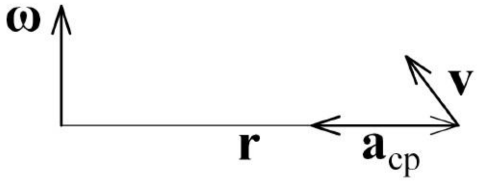
A $d\underline{\varphi}$ elemi elfordulás vektor nagysága az elemi elfordulás szöge, iránya a forgás tengelye, irányítottsága pedig olyan, hogy a vektor csúcsa felől nézve az elfordulás pozitív legyen. Ezekhez hasonlóan:

$$\underline{\omega} = \frac{d\underline{\varphi}}{dt}$$

$$\underline{\beta} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{d^2\underline{\varphi}}{dt^2}$$



Elfordulás vektor



Szögsebesség vektor

Ezen vektorok segítségével felírhatjuk egy körpályán mozgó test sebességét és gyorsulását:

$$d\underline{r} = d\underline{\varphi} \times \underline{r}$$

Ezt idő szerint deriválva:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{\varphi}}{dt} \times \underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{a_t} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2\underline{\varphi}}{dt^2} \times \underline{r} = \underline{\beta} \times \underline{r}$$

Az ábrán látszik, hogy az $a_{cp} = \omega v$ nagyságú centripetális gyorsulás felírható vektoriális szorzat alakban is:

$$\underline{a_{cp}} = \underline{\omega} \times \underline{v} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

Tehetetlenségi erők

K legyen inerciarendszer és K' vonatkoztatási rendszer forogjon $\underline{\omega}$ pillanatnyi szögsebességgel K-hoz képest. A két rendszer origója legyen közös.

Mivel a két rendszer origója megegyezik, ezért bármely két pont helyvektora is megegyezik majd: $\underline{r} = \underline{r'}$.

A helyvektor idő szerinti deriválásával megkaphatjuk P pont sebességvektorát:

$$\underline{v} = \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_K$$

A segédtétel kimondja, hogy:

$$\left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

Ennek értelmében:

$$\underline{v} = \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\underline{r'}}{dt}\right|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{v'} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

A sebesség idő szerinti deriválásával megkapjuk P pont gyorsulásvektorát:

$$\underline{a} = \left.\frac{d\underline{v}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\underline{v}'}{dt}\right|_K + \left.\frac{d(\underline{\omega} \times \underline{r}')}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\underline{v}'}{dt}\right|_K + \left.\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right|_K \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \left.\frac{d\underline{v}}{dt}\right|_K$$

$$= \left.\frac{d\underline{v}'}{dt}\right|_K + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times \left(\left.\frac{d\underline{r}'}{dt}\right|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'\right)$$

$$= \left.\frac{d\underline{v}'}{dt}\right|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

$$= \underline{a}' + 2\underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r}'$$

Ebben az egyenletben felhasználtuk, hogy $\underline{r}'$, valamint $\underline{v}'$ deriváltja K' vonatkoztatási rendszerben $\underline{v}'$ illetve $\underline{a}'$, és $\underline{\omega}$ deriváltja mellől elhagytuk a vonatkoztatási rendszerre utaló jelet, mivel minkét rendszerben ugyan akkora lenne.

Elhagyva az Euler-féle gyorsulást, valamint megszorozva m-mel:

$$m\underline{a}' = m\underline{a} - 2m\underline{\omega} \times \underline{v}' - m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') = \underline{F_e} - 2m\underline{\omega} \times \underline{v}' - m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

Ahhoz hogy itt is teljesüljön Newton II törvénye be kell vezetni a centrifugális erőt, valamint a Coriolis-erőt:

$$F_{cf} = -2m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

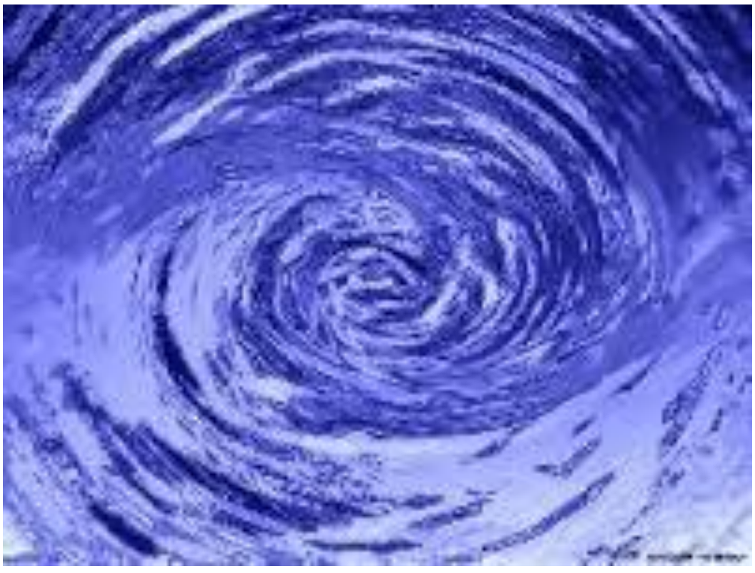
$$F_C = -2m\underline{\omega} \times \underline{v}'$$

Tehát:

$$m\underline{a}' = \underline{F_e} + \underline{F_{cf}} + \underline{F_C} = \underline{F_e}'$$

A centrifugális- illetve a Coriolis-erő a hétköznapokban:

- A Coriolis-erőnek például fontos szerepe van globális szelek és áramlatok kialakulásában.
- A Coriolis-erőnek köszönhetően az északi féltekén a folyók jobban alámossák a jobb partjukat.
- A mosógépben is alkalmazzuk a centrifugális-erő elvét.



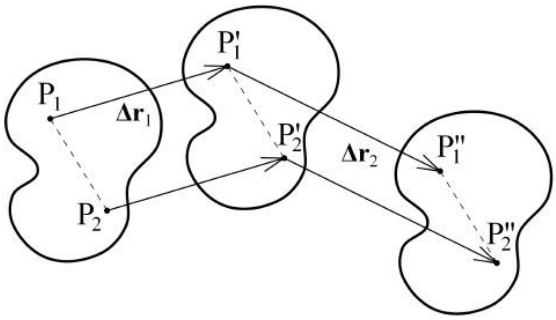
Merev test

Az eddigiekben a testeket a lehető legegyszerűbben, tömegpontként írtuk le, azonban ez semmit nem mondd a test alakjáról, méretéről, és bonyolultabb mozgásairól. A merev test egy bonyolultabb modell, mivel ez figyelembe veszi a testek alakját, kiterjedését, tömegeloszlását. Ellenben ez a modell nem foglalkozik a testek deformációjával.

Egy merev test helyzetét három pontjának helyzete egyértelműen meghatároz.

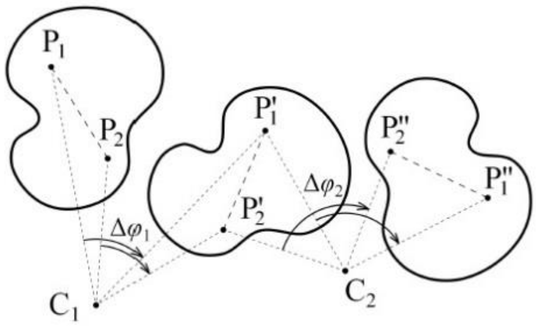
Haladó és forgómozgás

A merev test mozgása nagyon bonyolult lehet, de mindig leírható elemi elmozdulások és elfordulások egymásutánjaként.



Haladó mozgás:

Más néven transzláció. Transzláció esetén a merev test összes pontjának elmozdulása azonos. Ezért a merev test transzlációja leírható bármely pontjának transzlációjaként.



Forgómozgás

Más néven rotáció. Rotáció esetén a test egy adott forgástengely körül fordul el. Ebben az esetben a test minden egyes pontjának ugyan akkora a szögelfordulása.

Szögelfordulás: $\theta = \frac{s}{r} \quad [\theta] = rad$

Szögsebesség: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad [\omega] = \frac{rad}{s}$

Szöggyorsulás: $\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Merev testek forgásának alapegyenlete a pontrendszerekre levezetett összefüggés alapján:

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$

Merev test mozgási energiája

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \theta \omega^2$$

Merev test, mint pontrendszer

A merev testekre tekinthetünk úgy is, mint egy speciális pontrendszerre, így alkalmazhatjuk rá a pontrendszerekre megfogalmazott törvényeket.

Ha a merev testet kicsi térfogati darabokra osztunk, akkor a teljes térfogata és tömegre a következőket írhatjuk fel:

$$V = \sum_i \Delta V_i \quad \sum_i \Delta m_i = \sum_i \Delta\rho_i \Delta V_i$$

Homogén testek esetén: $m = \rho V$

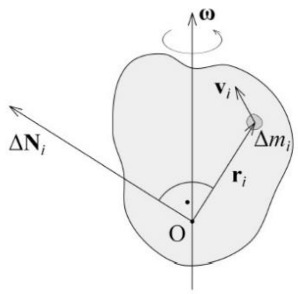
Merev testek tömegközéppontjába mutató helyvektort a pontrendszereknél tanult definíció alapján itt is felírhatjuk

$$\underline{r}_{TKP} = \frac{\int_V \underline{r}\rho(\underline{r})dV}{\int_V \rho(\underline{r})dV} = \frac{1}{m}\int_V \underline{r}\rho(\underline{r})\, dV$$

Merev test csak akkor lehet egyensúlyban, ha az impulzusa és a perdülete sem változik. A pontrendszerekre levezetett megmaradási tételek alapján az egyensúly feltétele a következőképp írható le: $\sum \underline{F} = 0 \qquad \sum \underline{M} = 0$

Merev test perdülete

Az ábrán látható merev test kicsi Δm_i tömegű darabjaihoz az $\underline{r_i}$ helyvektor mutat. A test ω szögsebességgel forog. Ebből következik, hogy a Δm_i tömegpont sebessége $\underline{v_i} = \underline{\omega_i} \times \underline{r_i}$ perdülete pedig



$$\Delta\underline{N_i} = \underline{r_i} \times \Delta\underline{p_i} = \Delta m_i \underline{r_i} \times \underline{v_i} = \Delta m_i \underline{r_i} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r_i}\right)$$

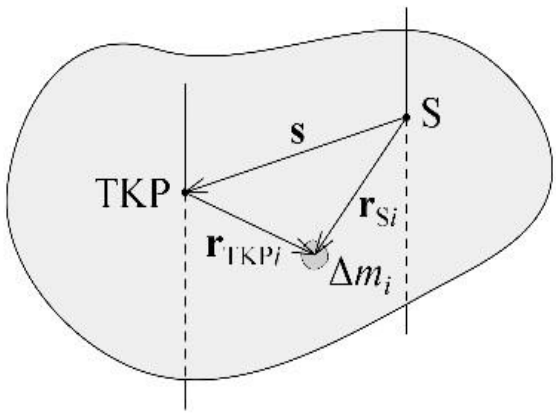
Az egész test perdülete a kis darabok perdületvektorainak összege: $\underline{N} = \sum_i \Delta\underline{N_i}$.

Tehetetlenségi nyomaték

$\theta = \sum_i m_i r_i^2$, ahol r_i az m_i tömegpont távolsága a tengelytől.

Homogén test esetén a ρ sűrűség nem függ a helytől, így a következő egyenletet kapjuk:

$\theta = \rho \int_V r^2 dV$, ahol az r a dV térfogat távolsága a tengelytől.



Steiner-tétel

Ha ismert egy test tehetetlenségi nyomatéka egy tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozóan, akkor meghatározható a tehetetlenségi nyomaték bármelyik másik, az adott tengellyel párhuzamos tengelyre vonatkozóan is.

Merev test Δm_i darabjának tehetetlenségi nyomatéka a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatva:

$$\Delta\theta_{TKPi} = \Delta m_i r_{TKPi}^2$$

Egy tetszőleges P ponton átmenő, az előzővel párhuzamos tengelyre vonatkoztatva:

$$\Delta\theta_{Pi} = \Delta m_i r_{Pi}^2 = \Delta m_i \left(\underline{P} + \underline{r_{TKPi}}\right)^2 = \Delta m_i \left(P^2 + 2\underline{P}\underline{r_{TKPi}} + r_{TKPi}^2\right)$$

P ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, az egyes darabkák tehetetlenségi nyomatékainak összege.

$$\theta_P = \sum_i \Delta\theta_{Pi} = P^2 \sum_i \Delta m_i + 2\underline{P} \sum_i \Delta m_i \underline{r_{TKPi}} + \sum_i \Delta m_i \underline{r_{TKPi}^2}$$

$P^2 \sum_i \Delta m_i = P^2 m$, ahol m a test tömege

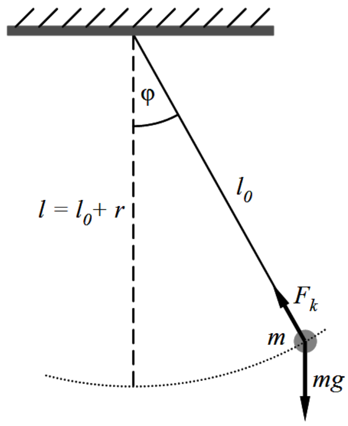
$$2\underline{P} \sum_i \Delta m_i \underline{r_{TKPi}^2} = 0$$

$$\sum_i \Delta m_i r_{TKPi}^2 = \theta_{TKP}$$

Ezek alapján a Steiner-tétel: $\theta_P = mP^2 + \theta_{TKP}$

Ingamozgás

Matematikai inga

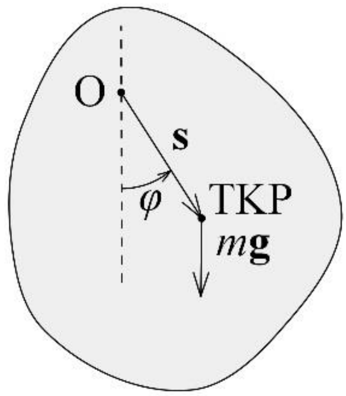


Más néven fonálinga. A matematikai inga egy vékony, adott l hosszúságú fonálra akasztott m tömegű tömegpont.

Periódusideje: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Frekvenciája: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

Fizikai inga



A fizikai inga egy súlypontja felett felfüggesztett merev test, amely egy vízszintes tengely körül szabadon foroghat.

Ha az ingát kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, akkor a nehézségi erő hatására egy forgatónyomaték lép fel.

$$\underline{M} = \underline{s} \times m\underline{g}$$

$$M = -smg \sin\varphi$$

Fizikai inga mozgásegyenlete:

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\theta_O}\sin\varphi$, ahol θ_O az O ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték.

Kis kitérés esetén $\sin\varphi \approx \varphi$, amiből az következik, hogy $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\theta_O}\varphi$.

$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha)$, ahol $\omega = \sqrt{\frac{mgs}{\theta_0}}$ a rezgés körfrekvenciája

Torziós inga

A torziós inga egy rugalmas szálra akasztott merev test, amely függőleges tengely körül elfordulhat. Az elfordulás hatására a szálban visszatérítő nyomaték lép fel.

$M = -D\varphi$, ahol D a direkciós állandó.

$M = \theta\beta = \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, ahol θ a merev test tehetetlenségi nyomatéka.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{\theta}\varphi$$

$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha)$, ahol $\omega = -\sqrt{\frac{D}{\theta}}$, a torziós rezgés körfrekvenciája.

Pörgettyű

A pörgettyű egy olyan merev test, amely egy rögzített pontja körül foroghat.

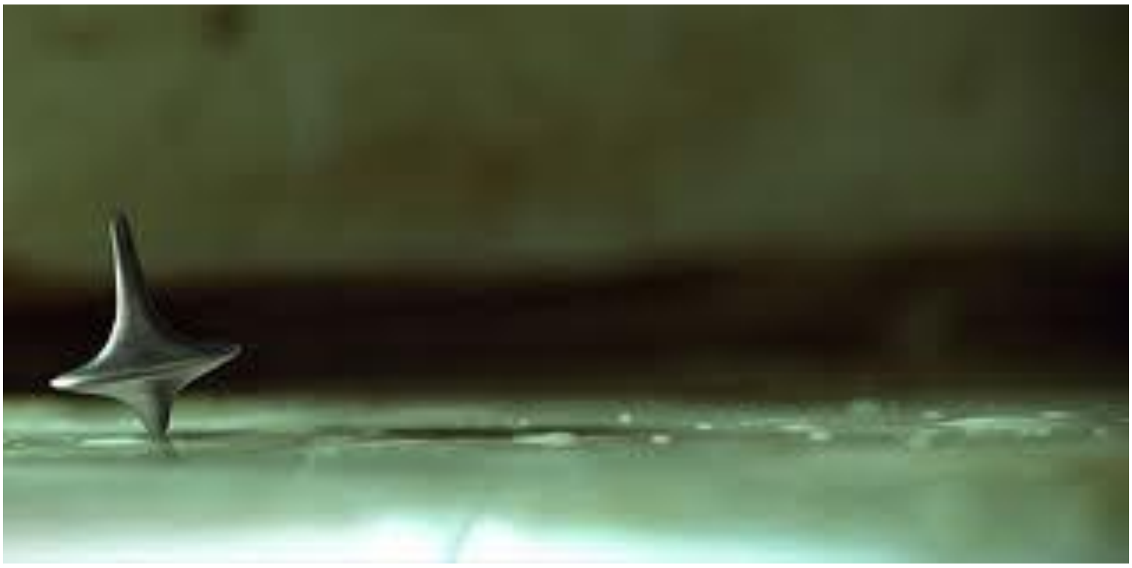
Mi csak a szimmetrikus pörgettyűk néhány speciális mozgásával foglalkozunk.

A pörgettyűt erőmentesnek nevezzük, ha nem hat rá külső erő és forgatónyomaték. Földi körülmények között ez legegyszerűbben úgy érhető el, hogy egy merev testet a tömegközéppontjában alátámasztunk.

Pörgettyű effektus

Ha egy vízszintesen forgó testet megtámasztunk, akkor az lassan vízszintes síkban kezd forogni. Ezt nevezzük pörgettyű effektusnak.
A forgás során a rendszer perdülete folyamatosan változik:

$\Delta L = L\Delta\omega$



Rezgések

Rezgésnek nevezünk minden olyan* f *fizikai jelenséget, ahol egy adott. fizikai mennyiség az időnek periodikus függvényeként változik. Vagyis megadható egy periódusidő, amire igaz, hogy:

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}+\mathrm{T})=\mathrm{f}(\mathrm{t}) \qquad \forall\mathrm{t}-\mathrm{re}$$

Anharmonikus rezgések

Minden olyan rezgést, ami nem harmonikus rezgés, anharmonikus rezgésnek nevezünk.

Minden anharmonikus rezgés felírható harmonikus rezgések összegeként a Fourier-sor teknikájával:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_A\cos(k\omega_0 x)+a_B\sin(k\omega_0 x))$$

ahol a_A és a_B :

$$a_A=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$a_B=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

Harmonikus rezgések

Egy periodikus függvényt is általában egy bonyolult függvény jellemez. Harmonikus mozgásnak nevezünk minden olyan mozgást, ami szinuszos vagy koszinuszos függvénnyel írható le. Jelentőségük, hogy a legegyszerűbb rezgő rendszerek mozgását ilyen függvény adja meg, valamint harmonikus függvények kombinációjaként bármilyen periodikus, vagy aperiodikus függvény előállítható.

Szabad rezgés

Legegyszerűbben úgy hozhatunk létre szabad harmonikus mechanikai rezgést, ha egy felfüggesztett rugóra egy testet akasztunk, és kitérítjük nyugalmi helyzetéből. Ekkor a kitérés-idő függvény a következőképp alakul:

$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$, ahol A a kitérés amplitúdója (maximális kitérés az egyensúlyhoz képest), ω_0 a mozgás körfrekvenciája, a φ pedig a $t=0$ időpillanatban a fázis értéke.

$$v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt}=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

Minden szabad harmonikus rezgés ilyen alakban írható le.

A rezgés időbeli lefolyását jellemezhetjük még a periódusidővel, valamint a frekvenciával

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0} \quad [T]=s \qquad f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi} \quad [f]=\frac{1}{s}=Hz$$

A rezgőmozgás sebessége és gyorsulása kiszámítható az előző kifejezésből idő szerinti deriválással.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Ezek alapján egy m tömegű harmonikus mozgást végző testre ható erő

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x$$

Az $m\omega_0^2$ állandó, tehát a harmonikus rezgőmozgás lineáris, a kitéréssel arányos visszatérítő erő re van szükség.

$$F_x = -Dx \qquad F_x = -m\omega_0^2 x$$

$$Dx = m\omega_0^2 x \;\rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Fonálinga

A matematikai inga egy adott l hosszúságú nyújthatatlan fonálra kötött m tömegű, pontszerű test. Ha az ingát az egyensúlyi helyzetből kitérítjük, akkor a testre ható tangenciális, visszatérítő erő:

$F_t = -mg\sin\alpha,$ ahol α a kitérés szöge.

A tangenciális gyorsulás: $a_t = \beta l = \frac{d^2\alpha}{dt^2} l$

$$F_t = ma_t$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\sin\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$$

Kis szögek esetén $\alpha = \sin\alpha$.

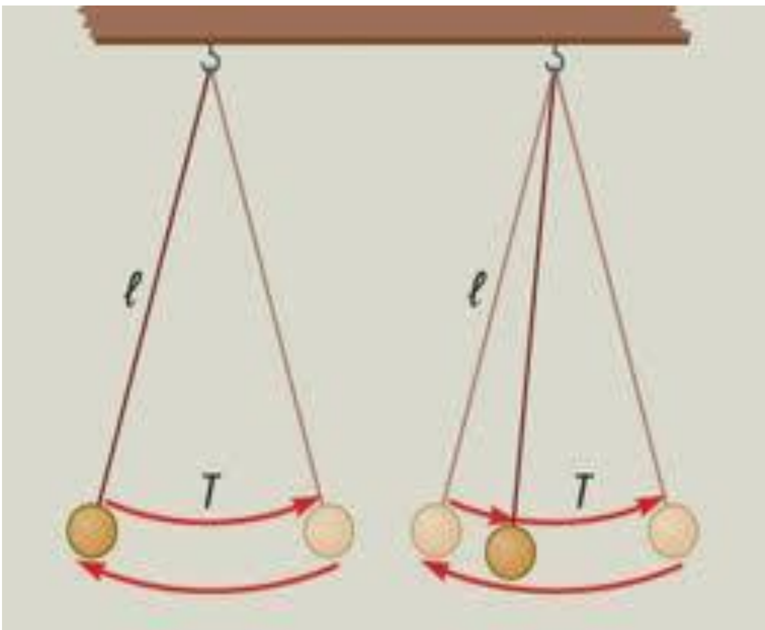
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Vezessük be itt is a körfrekvenciát

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

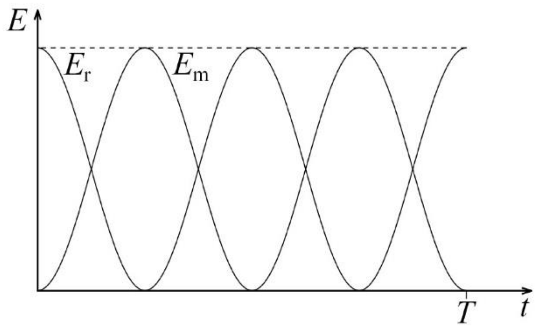
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$$

$$\alpha(t) = \alpha_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$



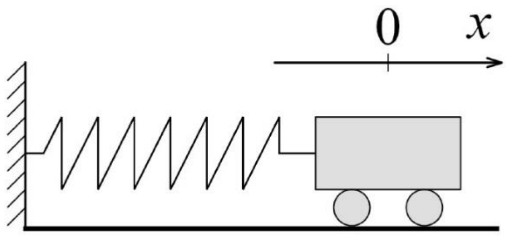
Rezgő rendszer energiaviszonyai

Ha megvizsgáljuk az ábrán látható rezgő rendszer energiaviszonyát, akkor látszik, hogy a helyzeti energiája állandó, mivel vízszintesen mozog. Vagyis a rendszernek csak rugalmas és mozgási energiája van, amiből következik, hogy a teljes mechanikai energia ezeknek az összege.



$$E(t) = \frac{1}{2}Dx^2(t) + \frac{1}{2}mv_x^2(t)$$
$$= \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$
$$+ \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Felhasználva hogy $D = m\omega_0^2$ azt kapjuk, hogy:



$$E(t) = \frac{1}{2}DA^2[\sin\text{^}2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$$
$$= \frac{1}{2}DA^2$$

Ebből látszik, hogy a teljes mechanikai energia állandó.

Csillapított rezgés

Egy magára hagyott rendszer amplitúdója folyamatosan csökken. A disszipáció oka lehet a közegellenállás vagy a súrlódás, de ha ezeket ki is küszöböljük akkor is keletkezik veszteség a rugó anyagában.

Feltételezzük, hogy a közegellenállás a sebességgel egyenesen arányos fékezőerőt eredményez, így a következő egyenletet kapjuk

$ma = -Dx - kv$, ahol k a csillapítás erősségét jelző állandó.

$$\frac{md^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = 0$$

Vezessük be itt is a körfrekvenciát, valamint a csillapítási tényezőt:

$\frac{D}{m} = \omega_0^2$ $\qquad 2\beta = \frac{k}{m}$, ahol β a csillapítási tényező.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Helyettesítsük be a próbafüggvényt a differenciálegyenletbe

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

Ha $e^{\lambda t} \neq 0$ –val egyszerűsítünk, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva azt kapjuk:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{a\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

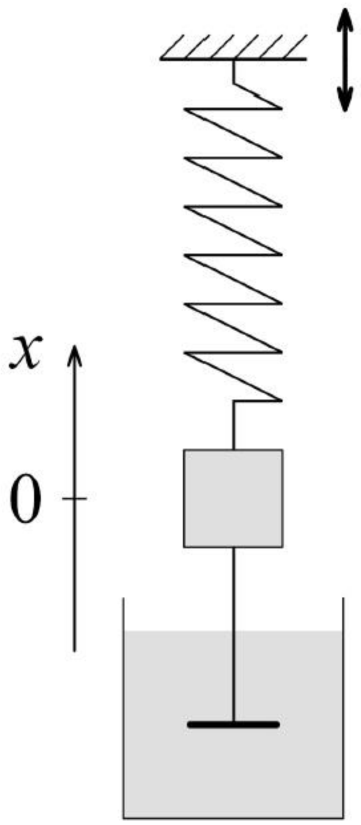
Ha $\beta > \omega_0$, akkor nagy csillapításról beszélünk.

Ha $\beta = \omega_0$, akkor határesetről beszélünk.

Ha $\beta < \omega_0$, akkor kis csillapításról beszélünk.

Kényszerrezgések

Ha azt szeretnénk, hogy egy rezgés a csillapodás ellenére fennmaradjon, akkor az elvesztett energiát folyamatosan pótolni kell. Az ábrán látható elrendezésben ezt úgy oldjuk meg, hogy a rugó felső végét az időben szinuszos függvény szerint fel-le mozgatjuk, amivel a rugóra egy időben szinuszosan változó erőt fejtünk ki. Ezt nevezzük kényszerrezgésnek.



$$F_k = F_0 \sin(\omega_k t)$$

ahol F_0 a maximális kényszererő, ω_k pedig a kényszer körfrekvenciája.

$$ma = -Dx - kv + F_0 \sin(\omega_k t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{d}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_k t)$$

Legyen: $\frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \frac{k}{m} = 2\beta \quad \frac{F_0}{m} = f_0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega_k t)$$

Rezonanciajelenségnek nevezzük azt, amikor egy kényszerrezgést végző test amplitúdója ugrásszerűen megnő. Rezonanciajelenség akkor következik be, mikor a kényszerrezgés frekvenciája közel azonos vagy azonos a test sajátfrekvenciájával.

$$E(\omega) = \frac{1}{2}mv_{max}^2(\omega) = \frac{1}{2}m\frac{f_0^2\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2]} = \frac{1}{2m}\frac{F_0^2\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2]}$$

aminek a maximuma $\omega_0 = \omega_k$-nál van

$$E(\omega_0) = \frac{F_0^2\omega_0^2}{8m\beta^2\omega_0^2} = \frac{F_0^2}{8m\beta^2}$$

Rezgések összeadása és felbontása

Lineáris rendszerekben érvényes a szuperpozíció elve.

Egyirányú rezgések

Ha két azonos frekvenciájú rezgést összegezünk, akkor a két vektor azonos szögsebességgel forog.

Legyen:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

ekkor:

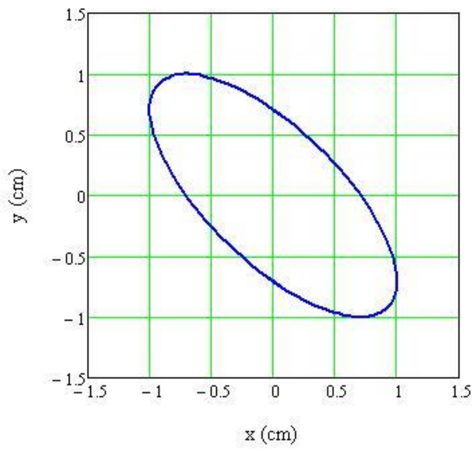
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}$$
$$|A_1 - A_2| \leq A \leq |A_1 + A_2|$$

Az amplitúdó tényleges nagysága függ a fázisviszonyoktól.

Ha a két rezgés frekvenciája nem azonos, viszont a két frekvencia hányadosa racionális szám, akkor az eredő rezgés periodikus lesz.

Merőleges rezgések

Azonos frekvenciájú, egymásra merőleges rezgések szuperpozicióját a legkönnyebben fonálinga segítségével lehet szemléltetni. Ha az ingát mindkét irányba kitérítjük, akkor a két mozgás egyszerre fog bekövetkezni.



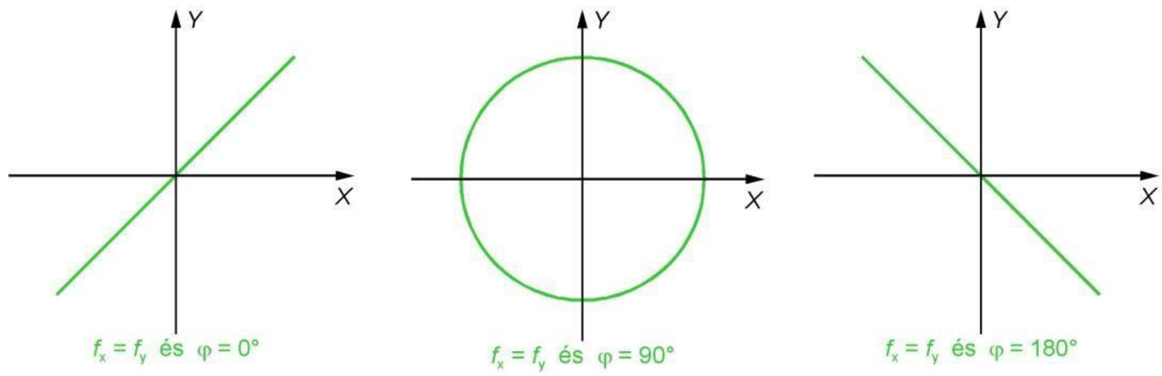
$$x_x(t) = A_x \cos(\omega t)$$
$$x_y(t) = A_y \cos(\omega t)$$

A kialakult pálya általános esetben egy ellipszis.

Speciális eset, amikor $A_x = A_y$:

Ha a két rezgés azonos, vagy ellentétes fázisban van, akkor egy egyenes mentén mozog a test.

Ha a két rezgés közötti fáziskülönbség $\frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2}$, akkor, körpályán mozog a test.



Ha a két rezgés frekvenciája különböző, akkor a kialakuló mozgás bonyolult lesz.

Rezgések felbontása

Ha egy függvény periodikus, akkor felírható harmonikus függvények végtelen soraként

$$x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\omega t + \varphi_i) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(B_i \sin(i\omega t) + C_i \cos(i\omega t))$$

Ez a Fourier-sor: A sorban szereplő függvények frekvenciái a vizsgált függvény frekvenciájával azonosak (alap harmonikus), valamint annak egész számú többszörösei (felharmonikusok).

Lebegés

Ha két frekvencia csak kicsit tér el egymástól:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$$

$$\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$$

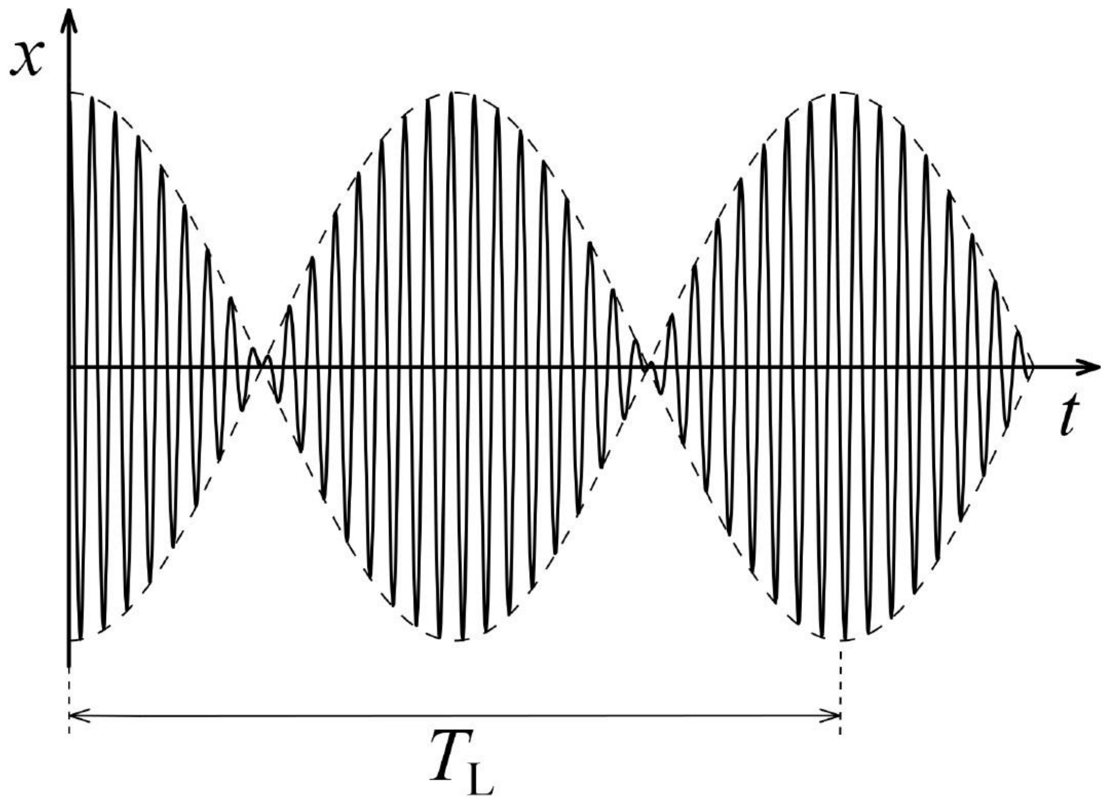
$$\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2} = \omega_L \ll \omega$$

Ekkor:

$$x(t) = 2A\cos(\omega_L t)\cos(\omega t)$$

A kialakuló rezgés felfogható egy lassan változó amplitúdójú harmonikus rezgésnek, ahol az amplitúdó nagysága szintén harmonikus függvény szerint változik. Ez a jelenség a lebegés. A lebegés periódusideje és frekvenciája:

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega_L} \qquad f_L = \frac{1}{T_L} = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{f_1 - f_2}{2}$$



Hullámmozgás

A következőkben a mechanikai hullámokkal foglalkozunk, de az itt megismert jelenségek, leírásmódok, összefüggések más, például elektromágneses, kvantummechanikai hullámok megértésénél is hasznosak.

A mechanikai hullám valamilyen zavar, tovaterjedése a térben.

Kiterjedés alapján lehet beszélni 1, 2 illetve 3 dimenziós hullámokról.

- Egydimenziós hullám:

  Példa egy rugalmas kötélen terjedő zavar.

- Kétdimenziós hullám:

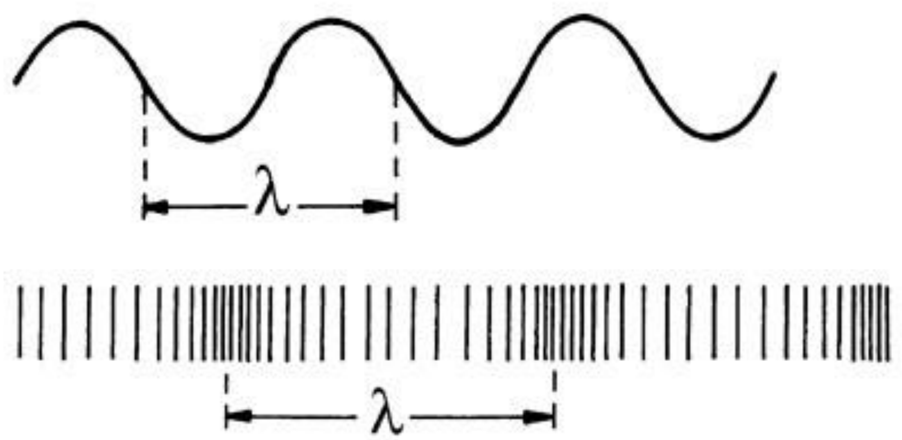
  A víz felszínén terjedő hullám.

- Háromdimenziós hullám:

  Általában a hang.

A zavar egy mechanikai hullámban a közeg pontjainak valamilyen irányú elmozdulása.

- Ha a pontok elmozdulása merőleges a hullám terjedési irányára, akkor transzverzális hullámokról beszélünk.
- Ha a pontok elmozdulása párhuzamos a hullám terjedési irányára, akkor longitudinális hullámokról beszélünk.



Hullámfüggvény

Először vizsgáljunk egy síkhullámot, ami az x tengellyel párhuzamosan terjed. A forrás legyen az $x = 0$ helyen. A zavar időfüggvénye legyen $f(t)$. A $\psi(x.t)$ hullámfüggvény megadja a zavar értékét és hely és idő függvényében.

$$\psi(0, t) = f(t)$$

Ha a zavar a pozitív irányba terjed v sebességgel, akkor x távolságra x/v késéssel fog odaérni.

$$\psi_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Ha a zavar az ellentétes irányba terjed:

$$\psi_-(x,t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

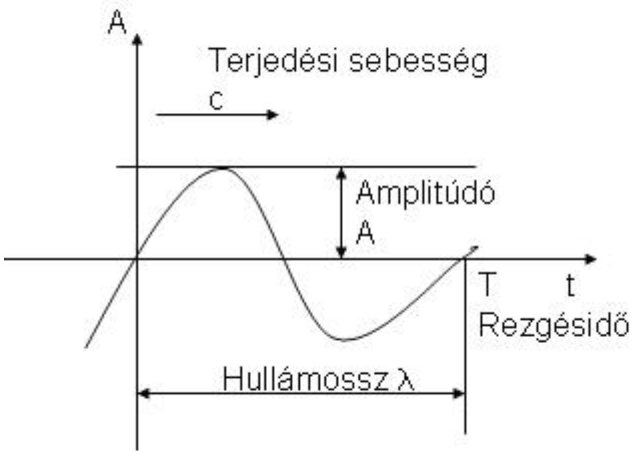
A hullámfüggvény mechanikai hullámok esetén általában a közeg pontjainak kitérését adja meg.

Harmonikus síkhullám

Ebben az esetben a zavar harmonikus.

$$f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

Amiből következik, hogy a zavarterjedés egy harmonikus síkhullám:



$$\psi(x,t) = f(t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right)$$

A hullámfüggvény kétváltozós függvény. Ha az egyik változóját rögzítjük, akkor a másik változó függvényében ábrázolhatjuk.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor fix helyen vizsgáljuk a hullámfüggvényt, az idő függvényében.

$$x = x_{fix}$$

Ekkor harmonikus függvényt kapunk, melynek periódusa a periódusidő.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor az időpillanatot rögzítjük, és a hullámfüggvényt a hely függvényében vizsgáljuk.

$$t = t_{fix}$$

Ebben az esetben is harmonikus függvényt kapunk, melynek a periódusa a hullámhossz lesz.

$$\lambda = 2\pi\frac{c}{\omega} = cT$$

A hullám fázisa a koszinusz függvény argumentuma:

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha$$

Ennek alapján meghatározható egy adott fázis helyzet elmozdulás-idő függvénye.

$$x(t) = ct - \frac{c(\varphi - \alpha)}{\omega}$$

Amiből a fázissebesség:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

A fázissebesség megegyezik a zavar terjedési sebességével.

A hullám időbeli viselkedését a perióduson kívül a frekvencia, valamint a körfrekvencia is jellemzi.

$f = \frac{1}{T}$ $\qquad\qquad\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

A hullám térbeli terjedése jellemezhető még a hullámszámmal:

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ $\qquad\qquad [k] = \frac{1}{m}$

Ezt behelyettesítve a hullámegyenletbe, megkapjuk az egydimenziós harmonikus síkhullám hullámfüggvényének leggyakoribb alakját:

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

Térbeli síkhullám

Ha háromdimenziós közegben terjed a hullám, akkor a hullámfüggvény az $\underline{r}$ helyvektor és az idő függvénye: $\psi(\underline{r}, t)$. Jelöljük $\underline{u}$-val azt az egységvektort, ami a síkhullám terjedési irányát mutatja. Ekkor a hullámfrontok az $\underline{u}$ vektorra merőleges síkok. A hullám fázisát egy tetszőleges helyen az adott ponton átmenő sík és az origó távolsága adja meg.

$$s = \underline{u}\,\underline{r}$$

Ezt behelyettesítve:

$$\psi(\underline{r}, t) = A\cos(\omega t - ks - \alpha) = A\cos(\omega t - k\underline{u}\,\underline{r} - \alpha)$$

Ha bevezetjük a $\underline{k} = k\underline{u}$ hullámvektort, aminek nagysága k, iránya pedig a hullám terjedési iránya, akkor:

$$\psi(\underline{r}, t) = A\cos(\omega t - \underline{k}\,\underline{r} - \alpha)$$

Hullámegyenlet

A hullám leírása akkor teljes, ha a hullámfüggvényt a hullámot létrehozó hatások segítségével le tudjuk vezetni, azaz ismerjük a hullámfüggvény meghatározására szolgáló fizikai egyenletet. Ez a hullámegyenlet, amelyet mechanikai hullámok esetén a hullámban elmozduló közeg térfogatelemére felírt mozgásegyenlet segítségével kaphatunk meg.

A hullámegyenlet levezetésének alapelve az, hogy a közeg elemi darabjára felírjuk a mozgásegyenletet, és a mennyiségeket a hullámfüggvénnyel fejezzük ki. Ekkor a hullámfüggvényre vonatkozó differenciálegyenletet kapunk.

Végezzük el a számolásokat egy S keresztmetszetű rugalmas rúdban x irányban terjedó longitudinális hullámra.

A mozgásegyenlet egy dm tömegű térfogatelemre:

$$dF = dm a_x$$

A rúd elemi darabjára ható dF erő a Hook törvénye segítségével kifejezhető.

$$d\psi = \psi(x + dx, t) - \psi(x, t)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

A Hook törvény értelmében, az erő és a deformáció arányos egymással:

$$F(x,t) = SE\varepsilon(x,t) = SE\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

Ahol E a rúd anyagának Young modulusa.

Az elemi darabra ható erő adott időpillanatban:

$$dF = F(x + dx, t) - F(x, t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

$$dF = SE\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

A gyorsulás a helykoordináta (itt a hullámfüggvény) második időderiváltja:

$$a = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$dm = \rho S dx$$

Mindezt behelyettesítve a mozgásegyenletbe, valamint Sdx-el egyszerűsítve:

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Ez egy másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet, amelynek most a harmonikus haladóhullám megoldását keressük $\psi(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx + \alpha)$ alakban.

$$-\frac{E}{\rho}Ak^2\cos(\omega t \pm kx + \alpha) = -A\omega^2\cos(\omega t \pm kx + \alpha)$$

A $\pm$ arra utal, hogy a hullám a pozitív és a negatív irányba is terjedhet.

Az egyenlőségnek minden helyen és minden időpillanatban teljesülnie kell.

$$\frac{E}{\rho}k^2 = \omega^2$$

Ebből következik, hogy:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2$$

Vagyis a rúdban terjedő haladóhullám sebességének nagysága a rúd Young modulusától, valamint a sűrűségtől függ.

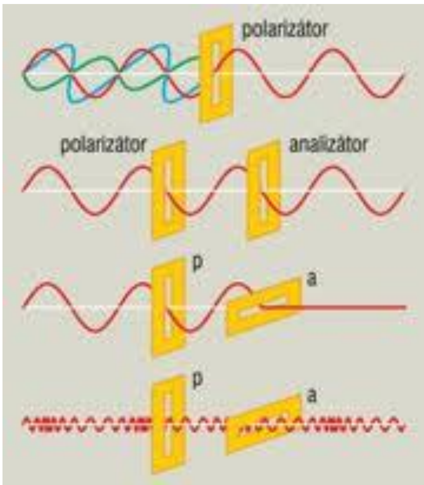
$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ha ezt behelyettesítjük a hullámegyenletbe, akkor megkapjuk az egydimenziós hullámegyenlet általános alakját:

$$v^2\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Polarizáció

Transzverzális hullámoknál a közeg pontjainak elmozdulása merőleges a terjedési irányra, viszont ez nem határozza meg egyértelműen a rezgés irányát. Általános esetben a kitérés irány bármilyen, a terjedési irányra merőleges lehet. Ezeket a hullámokat nevezzük polarizálatlan hullámoknak.



Ha egy polarizálatlan hullám egy polarizátoron halad át, akkor a hullám polarizálódik, azaz egy kiválasztott irányú rezgést fog végezni.

Egy analizátoron áthaladó hullám intenzitását könnyen kifejezhetjük. Bontsuk fel a belépő lineárisan polarizált A_0 amplitúdójú hullámot az analizátor rezgési síkjával párhuzamos illetve arra merőleges komponensekre. Az analizátoron csak az azzal párhuzamos komponensek haladnak keresztül, aminek az amplitúdója $A = A_0\cos(\alpha)$, ahol α a lineárisan polarizált hullám rezgési síkja és az analizátor rezgési síkja közti szöget jelöli. Mivel az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos, így

$$I = I_0 \cos^2(\alpha)$$

Ahol I_0 a belépő hullám intenzitása. Így a polarizátorok forgatásával szabályozható az áthaladó hullám intenzitása.

Speciális eset, amikor a két polarizátor 90°-os szöget zár be, mivel ekkor a hullám kioltódik.

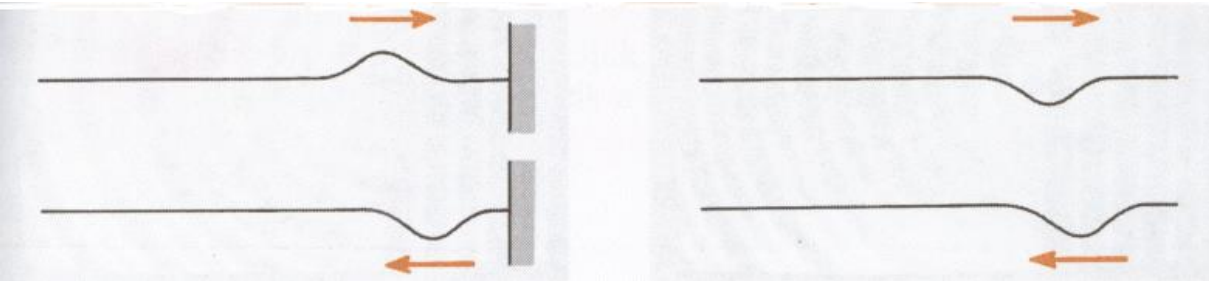
Longitudinális hullámok esetén a rezgés iránya egyértelmű, így ebben az esetben nem beszélhetünk polarizációról. Ha egy hullám polarizálható, akkor abból egyértelműen következik, hogy a hullám transzverzális.

Hullám visszaverődés és törés

Az eddigiekben nem tárgyaltuk azt az esetet, amikor a hullám egy közeghatárra ér. A tapasztalatok szerint ebben az esetben a hullám részben visszaverődik, részben pedig megtörve továbbhalad egy másik közegben.

Visszaverődéskor megváltozik a hullám iránya, valamint a fázisa is megváltozhat.

Törés esetén a terjedési sebesség, valamint a hullámhossz is változik.



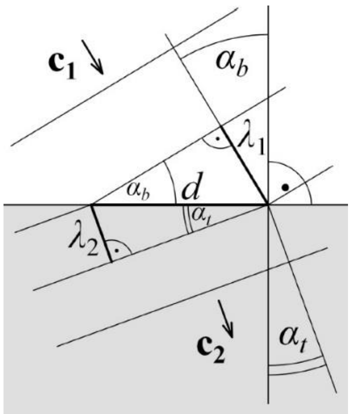
Ha a hullám szabad kötélvégről verődik vissza, akkor nincs fázisugrás, ha a kötélvég rögzített, akkor a visszaverődő hullám kitérése ellentétes előjelű, azaz a visszaverődésnél π fázisugrás történik.

Huygens-elv

A Huygens- elv alapja, hogy egy kicsiny, pontszerű nyíláson áthaladó hullám a nyílás mögött úgy terjed tovább, mintha egy pontforrásból kiinduló gömbhullám lenne. Ez az elhajlás jelensége.

A Huygens-elv ezek alapján két fontos állítást fogalmaz meg:

- egy hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki
- a kialakuló hullámfront az elemi gömbhullámok interferenciája adja meg.



A beesési és a törési szög közötti kapcsolatot az ábra alapján írhatjuk fel.

$$\lambda_1 = d \sin(\alpha_b)$$

$$\lambda_2 = d \sin(\alpha_t)$$

Mivel a hullám frekvenciája állandó, viszont a hullámhossz az egyes közegekben arányos a közegbeli hullámterjedési sebességgel, így a törési törvény a következőképp írható fel:

$$\frac{\sin(\alpha_b)}{\sin(\alpha_t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}$$

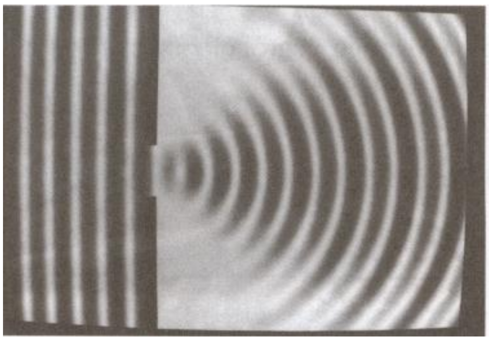
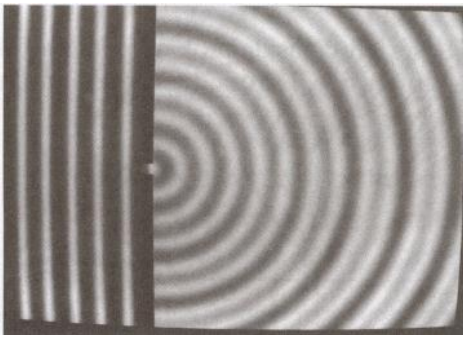
Ez a Snellius-Descartes-törvény. Az $n_{2,1}$ dimenziótlan mennyiség, amit szokás a 2-es közeg 1-es közegre vonatkoztatott törésmutatójának nevezni.

Amennyiben $c_2 < c_1$ akkor $n_{2,1} > 1$, valamint $\alpha_t < \alpha_b$. Ebben az esetben a beeső hullám részben megtörve belép a másik közegbe, részben visszaverődik.

Ha $c_2 > c_1$, akkor $n_{2,1} < 1$ és $\alpha_t > \alpha_b$, amiből következik, hogy $\sin(\alpha_t) = \frac{\sin(\alpha_b)}{n_{2,1}} \lessgtr 1$

Ha $\sin(\alpha_b) > n_{2,1}$, akkor $\sin(\alpha_t) > 1$, amiből következik, hogy α_t-re nem kaphatunk eredményt. Ez a teljes visszaverődés jelensége, amikor a hullám nem tud belépni a másik közegbe, hanem teljes mértékben visszaverődik.

Homogén közegnem a síkhullámok fullámfrontjai párhuzamosak, a hullám terjedési iránya a hullámfrontokra merőleges egyenes. Ha a hullám egy akadályhoz ér, akkor az nemcsak egyenesen halad tovább, hanem behatol az akadály mogotti árnyéktérbe is. Ezt a jelenséget nevezik hullámelhajlásnak.

Fermat-elv

A Fermat-elv szerint a hullám a tér rögzített A és B pontja között azon pályán halad, amelyen a hullámterjedés idejének szélsőértéke van.

Egy elemi út megtételéhez szükséges idő:

$$dt = \frac{1}{c} ds$$

Azt a pályát keressük, mire igaz hogy:

$$\tau_{AB} = \frac{1}{c}\int_A^B ds = \text{szélső érték}$$

Vizsgáljuk a törés jelenségét a Fermat-elv segítségével. Legyen A pont az egyes B pont a kettes közegben. A hullám mind a két közegben egyenes vonalban terjed, így csak azt kell meghatározni, hogy hol halad át a közeghatáron.

$$\tau_{AB} = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2+(x-x_A)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(x-x_B)^2}}{c_2}$$

Ennek a kifejezésnek keressük a minimumát, ha x értékét változtatjuk.

$$\frac{d\tau_{AB}}{dx} = \frac{\frac{1}{2c_1}2(x-x_A)}{\sqrt{a^2+(x-x_A)^2}} - \frac{\frac{1}{2c_2}2(x_B-x)}{\sqrt{b^2+(x_B-x)^2}}$$

$$\frac{\sin(\alpha_b)}{c_1} - \frac{\sin(\alpha_t)}{c_2} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha_b)}{\sin(\alpha_t)} = \frac{c_1}{c_2}$$

Interferencia

A közegben általában egyszerre több hullám is terjed. Ha a hullámot leíró egyenletek lineárisak, akkor a kialakuló hullámkép az egyes hullámok szuperpozíciója.

$$\psi(\underline{r},t) = \sum_i \psi(\underline{r},t)$$

A hullámok egy adott pillanatban, egy adott helyen erősíthetik, gyengíthetik, vagy éppen ki is olthatják egymást. Ezt a jelenséget nevezzük interferenciának.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor két pontforrás azonos frekvenciájú gömbhullámokat kelt. Az egyes hullámforrások által keltett hullámok hullámfüggvényei:

$$\psi_1(\underline{r},t) = A_1\cos(\omega t - kr)$$

$$\psi_2(\underline{r},t) = A_2\cos(\omega t - kr + \alpha)$$

A P pontban a hullámot a két hullám összege adja

$$\psi(P,t) = \psi_1\left(\underline{r_1},t\right) + \psi_2\left(\underline{r_2},t\right)$$

$$\psi(P,t) = A_1\cos(\omega t - kr_1) + A_2\cos(\omega t - kr_2 + \alpha) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A illetve φ a hullámok paramétereiből kifejezhetők

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(kr_1 - kr_2 + \alpha)}$$

Az amplitúdó akkor maximális, ha $kr_1 - kr_2 + \alpha = 2n\pi$. Ekkor $A = A_1 + A_2$

Az amplitúdó akkor minimális, ha $kr_1 - kr_2 + \alpha = (2n+1)\pi$. Ekkor $A = |A_1 + A_2|$

Koherencia

A hullám intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével, így az eredő hullám intenzitása:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(k\Delta s + \alpha),\ \text{ahol}\ \Delta s = r_1 - r_2$$

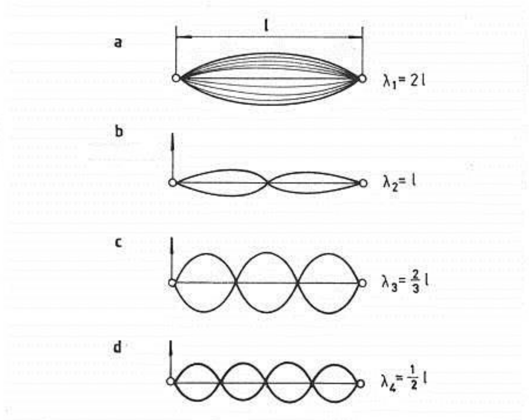
Az első két tag mindig pozitív, ezek a két szuperponálódó hullám intenzitásának az összegét adják. Az intenzitás helyfüggése, az úgynevezett interferencia tag következménye.

Ha a két forrás közötti fáziskülönbség időben állandó, akkor a két hullám koherens.

Állóhullámok

Állóhullám haladóhullámok interferenciájából alakulhat ki.

Vizsgáljunk egy L hosszúságú megfeszített húron kialakuló transzverzális állóhullámokat. A húr legyen párhuzamos x-tengellyel, valamint az egyik vége legyen a koordináta rendszer kezdőpontjában. A határfeltétel, hogy a húr mindkét vége rögzített, vagyis:



$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, ahol $\varphi(x) = A\sin(kx + \beta)$

Mivel $\varphi(0) = 0$ ebből következik, hogy $\beta = 0$.

$$\varphi(L) = A\sin(kL) = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$k_n = n\frac{\pi}{L}$$

Vagyis a hullámszám csak meghatározott, diszkrét értékeket vehet fel. A hullámszám meghatározza az állóhullám hullámhosszát, körfrekvenciáját és frekvenciáját:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{1}{n}2L$$

$$\omega_n = k_n c = n\frac{\pi c}{L}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\frac{c}{2L}$$

A húron csak meghatározott frekvenciájú állóhullám alakulhat ki. A lehetséges frekvenciák az alapfrekvencia (f_1) egész számú többszörösei.

Most vizsgáljunk egy az egyik végén zárt légoszlopot:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(L) = A$$

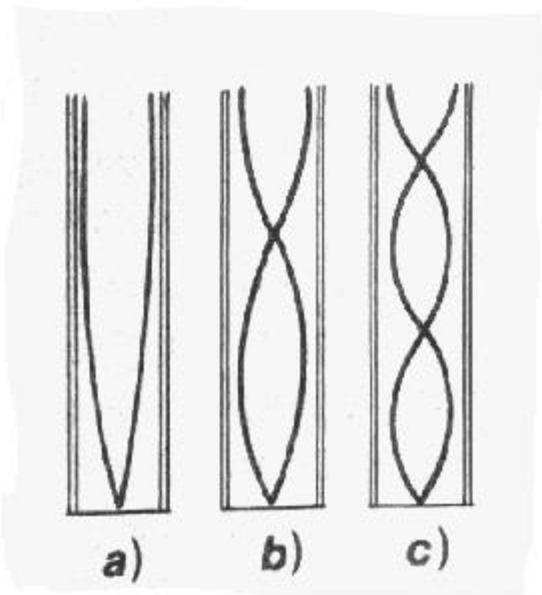
$\beta = 0$ az első feltétel alapján

$$\varphi(L) = A\sin(kL) = A$$

$$kL = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}$$

Tehát ebben az esetben is csak megadott, diszkrét értékeket vehet fel a hullámszám.



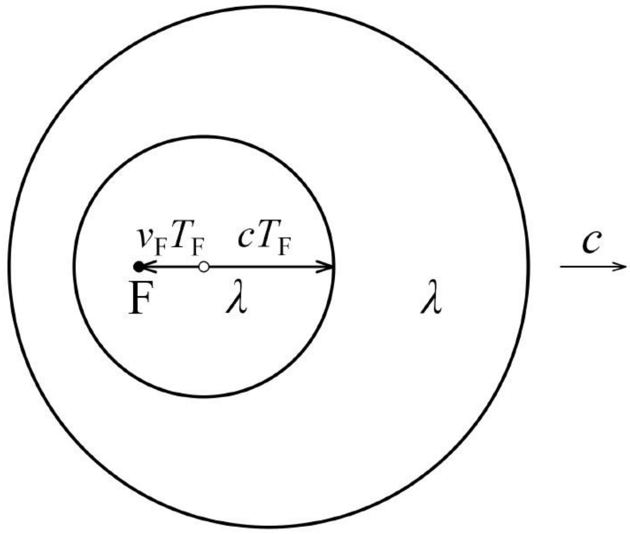
$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{1}{2n-1}4L$$

$$\omega_n = k_n c = (2n-1)\frac{\pi c}{2L}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = (2n-1)\frac{c}{4L}$$

Doppler-effektus

Ha a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mzog, akkor a megfigyelő a hullámforrás frekvenciájától eltérő frekvenciájú hullámot érzékel. Ez a jelenség a Doppler-effektus.



Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a forrás mozog a megfigyelő felé v sebességgel, míg a megfigyelő áll. Ekkor az érzékelt frekvencia nagyobb lesz, és a hullámhossz rövidebb.

$$\lambda' = \lambda - vt$$

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - vt}$$

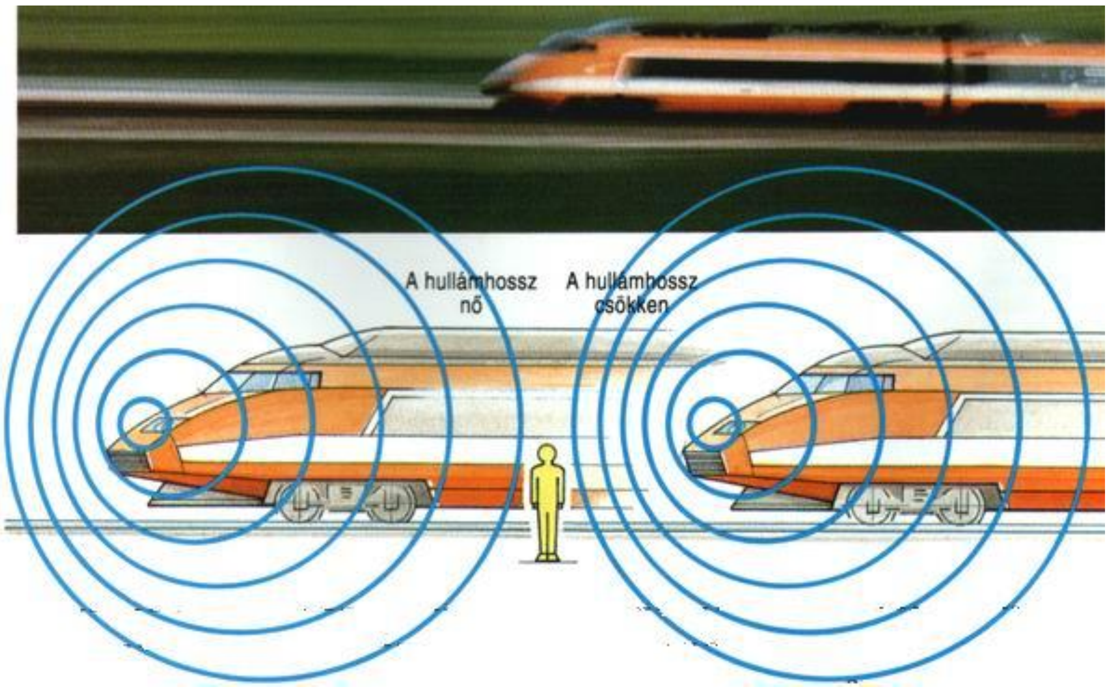
$$f' = \frac{c}{\frac{c}{f} - v\frac{1}{f}} = \frac{cf}{c-v} = \frac{f}{1-\frac{v}{c}} \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right) f$$

Ha a megfigyelő áll és a hullámforrás távolodik tőle, akkor az érzékelt frekvencia kisebb lesz, míg az érzékelt hullámhossz hosszabb. Ebben az esetben:

$$\lambda' = \lambda + vt$$

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda + vt}$$

Hasonló módon mint az előbb bizonyítható, hogy $f' \approx \frac{f}{1+\frac{v}{c}}$



Hangrobbanás

Ha a hullámforrás sebessége nagyobb, mint a hullám terjedési sebessége, akkor a forrás lehagyja a hullámot. A hullám csak egy kúpon belül érzékelhető. Ez az úgynevezett Mach-kúp. A Mach-kúp félnyílásszöge:

$$\sin(\vartheta) = \frac{v_F}{v_t}$$

A hangforrás sebességének és a hullám terjedési sebességének hányadosa a Mach-szám:

$$M = \frac{v_F}{v_t}$$

Termodinamika

Alapfogalmak

A termodinamikai állapot egyértelműen leírható néhány független változó megadásával. Ezek száma függ a rendszer fajtájától.

A termodinamikában nem az állapot változását, hanem a rendszer fizikai sajátosságait egy speciális állapotban, az úgynevezett termodinamikai egyensúly állapotában vizsgáljuk.

Ha a rendszer állapotát jellemző paraméterek megváltoznak, akkor a rendszer állapota is megváltozik. Ezt a folyamatot nevezzük termodinamikai folyamatnak.

Ha a külső feltételek olyan lassan változnak, hogy közben a rendszert bármely időpillanatban egyensúlyban levőnek tekinthetjük, akkor a folyamatot kvázisztatikus nevezzük.

Gondoljuk el, hogy valamilyen rendszer a külső feltételek nagyon lassú változtatása közben különböző állapotokon keresztül jut el a kezdő állapotból, egy végállapotba. Ezután változtassuk a külső feltételeket a fordított irányba. Ha a rendszer eközben visszatér a kezdeti állapotba, akkor a folyamat megfordítható, más szóval reverzibilis.

A megfordítható folyamatok kvázisztatikusak, viszont ez fordítva már nem biztos hogy igaz.

Egy makroszkopikus rendszer állapotát jellemző paraméterek függhetnek egymástól. Az egyensúlyi állapotra vonatkozó állapotjelzők közötti kapcsolatot az állapotegyenlettel írhatjuk le. Ha a rendszer nyomását p-val, térfogatát V-vel, hőmérsékletét T-vel és molszámát n-nel jelöljük, akkor a közöttük fennálló összefüggés:

$$f(p, V, T, n) = 0$$

Hőmérséklet

A hőmérséklet fogalmának kialakulása érzékszervi tapasztalatokon alapszik.

Ha két test egy harmadikkal termikus egyensúlyban van, akkor a két test egymással is termikus egyensúlyban van. Ha az egyik test a mérőműszer (hőmérő), akkor azon a termikus egyensúlynak megfelelő közös hőmérséklet leolvasható.

Fahrenheit volt az első, aki reprodukálható hőmérőt készített. Alsó pontnak a szalmiák és jég hidegkeverékének hőmérsékletét választotta, és ezt jelölte 0° -nak. Míg felső pontnak az emberi test hőmérsékletét, ami a 100° lett. 1714-ben áttért az alkoholosról a higanyos hőmérőre. Ekkor felső pontnak a víz forráspontját vette, alsó pontnak pedig a jég olvadáspontját. Hogy egyezés legye az alkoholos hőmérővel az alsó pont 32° lett, míg a felső $212°$. A két hőmérséklet közötti részt pedig 180 egyenlő részre osztotta. A későbbiekben Celsius svéd matematikus osztotta fel a két pont között részt 100 egyenlő részre.

Hőmérők készítésére úgy látszik azok az anyagok megfelelőek, amik kiterjedése a hőmérséklettel egyenesen arányos. Tapasztalat szerint a ritka gázok megfelelően magas hőmérsékleten és alacsony nyomáson közel azonosan viselkednek. Ha a hőmérsékletet állandó értéken tartjuk, akkor a nyomásuk és a térfogatuk szorzata jó közelítéssel

$$pV = áll.$$

a Boyle-Mariotte törvény szerint változik az anyagi minőségtől függetlenül. Ha a hőmérséklet változik, akkor a pV szorzat monoton függvénye a hőmérsékletnek. Azon gázok amik ennek megfelelően viselkednek, az ideális gázok.

Legyen az ideális gázhőmérséklet arányos a pV szorzattal

$$(pV)_f = nRT_f \qquad (pV)_o = nRT_o$$

1 mol esetén:

$T_f - T_o = 100$, ahol T_f a fagyási, illetve T_o az olvadási hőmérséklet.

$$R = \frac{((pV)_f - (pV)_o)}{100}$$

$$R = 8{,}314\, mol^{-1}K^{-1}$$

R az egyetemes gázállandó.

Az egyetemes gáztörvény egy másik alakja:

Ha nem a mol-számmal, hanem a részecskék számával szeretnénk számolni

$$pV = NkT$$

Ahol:

$$k = \frac{R}{Na} = 1{,}83 \cdot 10^{-23}$$

Ebben az esetben k a Boltzmann-állandó, Na pedig az Avogadro-szám.

Ennek ismeretében meghatározható a jég olvadáspontjának normál állapotban vett hőmérséklete, ami $T_0 = 273{,}15\ K$. Az így definiált ideális gázhőmérsékleti skála nem csak az anyagi minőségtől független, hanem abszolút is. Gyakran Kelvin féle hőmérsékleti skálának nevezik ezt.

Hőmennyiség, hőkapacitás

Ha a rendszer hőmérséklete megváltozik, és közben munkavégzés nem történik, akkor a rendszer hőt vett fel, vagy adott le. A környezettől felvett hő arányos a hőmérséklettel.

$$\Delta Q = C\Delta T$$

A C az arányossági tényező, amit a hőkapacitásának nevezünk. Ez függ a rendszer anyagától, valamint a hőfelvétel módjától. Más az arányossági tényező, ha adott térfogaton vagy adott nyomáson melegítjük. Az anyag 1 molnyi mennyiségére vonatkoztatott hőkapacitását molhőnek, a grammra vonatkoztatottat pedig fajhőnek nevezzük. A hőkapacitás a rendszer tömegének és fajhőjének szorzatával egyenlő.

Régebben a hőmennyiség egysége a kalória volt, ma már a joule-t használjuk.

$$1\, cal = 4{,}1868\, J$$

Véges hőmérséklet növekedés során:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT$$

Mivel a hőkapacitás igen nagy hőmérséklet-tartományban állandónak tekinthető, így:

$$Q = C(T_2 - T_1)$$

Vagyis a kőkapacitást két állapot közötti átmenethez rendelhetjük, nem pedig egy adott állapothoz. A felvett, vagy leadott hő függ a két állapot közötti átmenet módjától, nem csak a kezdeti és a végállapottól, tehát Q nem állapotfüggvény.

Az olyan rendszereket, amelyek a környezetükkel nem tudnak hőt cserélni, hőszigetelőknek nevezzük. A hőszigetelt rendszerekben lejátszódó termodinamikai folyamatokat a

$$\delta Q = 0$$

egyenlettel lehet jellemezni. Ezek az adiabatikus folyamatok.

Termodinamika első főtétele

Az első főtétel az energiatételnek általános megfogalmazása. A tétel szerint egy rendszer energiájának megváltozása két okból történhet:

- Külső erőhatások munkát végeznek a rendszeren
- A rendszer hőt vesz fel a környezetétől

A végzett munka és a hőmennyiség összege megegyezik az energia megváltozásával

$$E_2 - E_1 = Q + W$$

Az első főtétel azt is kimondja, hogy a hő energia, amit akkor tekintünk pozitívnak, ha a rendszer által felvett hőről van szó. W akkor negatív, ha a rendszer végez munkát. E_2, illetve E_1 a rendszer energiája a kezdeti valamint a végállapotban.

Az első főtételből következik, hogy a belső energia a termodinamikai állapotát jellemző paraméter egyértékű függvénye. Azt mondjuk, E állapotfüggvény. Ha a rendszer egy kezdeti állapotból eljut egy másik állapotba, akkor az energiaváltozás nem függ az átmenet módjától. Azt a kezdeti és végállapot közötti különbség egyértelműen meghatározza.

$$dE = \delta Q + \delta W$$

A δQ hőmennyiség és δW elemi munka nem teljesen differenciálok, amit a δ jelöl. Ez azt jelenti, hogy a felvett vagy leadott hő illetve a végzett munka függ attól, hogy a folyamat milyen úton megy végbe.

Mivel a belső energia állapotfüggvény, így ha egy termodinamikai folyamat során a rendszer visszatér a kezdeti állapotba, akkor belső energiája nem változik meg. Ezt nevezzük körfolyamatnak.

$$W + Q = 0$$

$$W = -Q$$

Mivel a p, V, T állapotjelzők közül az állapotegyenlet következtében csak kettő független, így feltehetjük, hogy a belső energia valamelyik kettő függvénye. Képezzük most E teljes differenciálját:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p dV$$

Mivel dE az első főtétel értelmében teljes differenciál, így a vegyes parciális deriváltak megegyeznek egymással.

$$\left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V\right]_p = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p\right]_V$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p \partial V} = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial p}$$

Ez természetesen minden esetben fennáll:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial p}$$

Entalpia

$\delta Q = dE + pdV$

Ebből látszik, hogy ha a hőközlés állandó térfogaton történik, akkor a rendszer által felvett hő teljes egészében a belső energia növelésére fordítódik.

Ha p állandó, akkor a következő alakban írható fel:

$$\delta Q = dE + d(pV) = d(E + pV)$$

$$H = U + pV$$

Ez szintén egy állapotfüggvény, amit a rendszer entalipájának nevezünk. Eszerint az állandó nyomáson közölt hő a rendszer entalpiáját növeli. Az entalpia állandó nyomásan ugyan azt a szerepet játssza, mint a belső energia állandó térfogaton.

Az első főtétel az entalpia segítségével:

$$\delta Q = dH - Vdp$$

Az entalpiát általában a nyomás és a hőmérséklet függvényeként szokás megadni:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp - Vdp = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp$$

Hőkapacitás, fajhő

A hőkapacitás a definíció szerint egy rendszer által felvett hőmennyiségének és ezzel együttjáró hőmérséklet-változásának hányadosa

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

Mivel a hőfelvétel különböző módokon történhet, ezért külön értelmezünk állandó térfogaton vett- illetve állandó nyomáson vett hőkapacitást. Szilárd anyagoknál valamint folyadékoknál a kettő közötti különbség elhanyagolható.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a test térfogata állandó a hőfelvétel során. Feltételezzük, hogy δQ hőfelvétel során a test hőmérséklete dT-vel megnő. Ekkor:

$$\delta Q = dE$$

Legyen a belső energia a V és T állapotjelzők függvénye:

$$\delta Q = dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT$$

Ha dV=0:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT$$

Most nézzük meg állandó nyomáson a hőkapacitást:

Mivel dp=0:

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ezek alapján állandó térfogaton vett hőkapacitás a belső energiának, az állandó nyomáson vett hőkapacitás pedig az entalpiának a hőmérséklet szerinti parciális deriváltja. Az első esetben a térfogatot, míg a második esetben a nyomást állandó értéken kell tartani, a deriváltak képzésénél.

Molhő esetén is beszélhetünk állandó térfogaton, és állandó nyomáson vett molhőről.

Számítsuk ki a két molhő különbségét:

$$\delta Q = dE + pdV = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T - p\right] dV$$

A térfogat az állapotegyenleten keresztül kifejezhető p-vel és T-vel:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$$

Feltételezzük, hogy a hőfelvétel állandó nyomáson történik, vagyis:

$\delta Q = C_p dT,$ valamint $dp = 0$

Ezt figyelembe véve:

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Ideális gáz esetén, n molt feltételezve. Az állapotegyenlet:

$$pV = nRT$$

Amiből:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{T}$$

A Gay-Lussac-kísérlet alapján:

$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0,$ valamint $\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0$

Ez azt jelenti, hogy ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ.

Ideális gázok hőkapacitásainak különbségére adódik:

$$C_p - C_V = nR$$

Egy mol esetén:

$$C_p - C_V = R$$

Ezek szerint állandó nyomáson, illetve állandó térfogaton vett molhők külömbsége az egyetemes gázállandóval egyezik meg.

Ha a molhőket a gáz grammban kifejezett M relatív molekulatömegével elosztjuk, akkor a megfelelő fajhőket kapjuk:

$$C_p - C_V = \frac{R}{M}$$

Az ideális gázok molhői függetlenek a hőmérséklettől. Ennél fogva az ideális gáz belső energiája a hőmérséklet lineáris függvénye:

$$E = C_V(T - T_0) + E_0$$

Tekintettel az entalpia definíciójára, valamint az állapotegyenletre, abból hogy az ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függvénye, ugyanez igaz az entalpiára is:

$$H = E(T) + pV$$

$$H = C_p(T - T_0) + H_0$$

Az ideális gázok állapotváltozásai

Az ideális gázok állapotát három állapotjelzővel adjuk meg. Ha változik az állapot, akkor általában mind a három állapotjelző változik. A változásaik azonban nem függnek egymástól, mivel fennáll a:

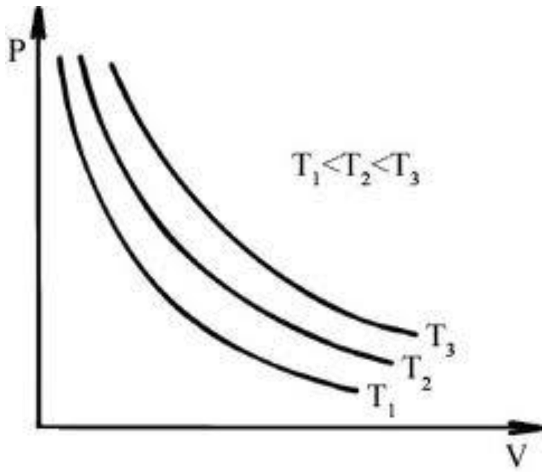
$$pV = nRT$$

állapotegyenlet. A gyakorlati alkalmazásban azonban megszorításokat eszközölünk, mint például a folyamat a szabad levegőn megy végbe, azaz állandó nyomáson. De ugyan így gyakoriak azok az esetek is, amikor a másik két állapotjelző egyike állandó.

Izoterm folyamatok

Legyen a gáz hőmérséklete állandó. Ebben az esetben az állapotegyenlet a

$$pV = áll.$$



Boyle-Mariotte-törvényre egyszerűsödik. A gáz izotermikus változását leíró egyenletet a p-V síkon egyenlő szárú hiperbola ábrázolja.

Mivel ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ, így izoterm folyamatok esetén a belső energia nem változik.

Tegyük fel, hogy az állapotváltozás abból áll, hogy egy adott p_1, V_1 állapotból állandó hőmérsékleten kitágulva eljut egy p_2, V_2 állapotba.

Mivel $V_2 > V_1$ ezért $p_1 > p_2$

A gáz a tágulás során munkát végez:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Ez a Boyle-Mariotte törvény alapján átírható:

$$W = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Mivel a gáz belső energiája változatlan maradt ezért:

$$Q = -W$$

Izobár folyamatok

Ebben az esetben a nyomást tekintjük állandónak. A gáz térfogata és hőmérséklete közötti kapcsolatot az állapotegyenletből kapjuk:

$$V = áll.\cdot T$$

Ez a Gay-Lussac-féle első törvény. Legyen a kezdeti állapot V_1, T_1, a végállapot pedig V_2, T_2. Tegyük fel, hogy a gáz felmelegszik az állapotváltozás során:

$$T_2 > T_1$$

aminek következménye, hogy kitágul:

$$V_2 > V_1$$

Az állandó nyomáson kitáguló gáz munkát végez:

$$W = p(V_2 - V_1)$$

és közben megváltozik a belső energiája. Az első főtétel értelmében a környezettől felvett hő most a gáz entalpiájának növelésére fordítódik:

$$Q = H_2 - H_1 = E_2 - E_1 + p(V_2 - V_1) = C_p(T_2 - T_1)$$

Izochor folyamatok

Vegyük azt az esetet, amikor a gáz térfogata állandó. Ekkor melegítéssel nő a nyomás i, hűtéssel pedig csökken.

$$p = áll.\cdot T$$

Ez a Gay-Lussac-féle második törvény. Mivel most nincs munkavégzés, a környezettől felvett hő a gáz belső energiáját növeli:

$$Q = E_2 - E_1 = C_V(T_2 - T_1)$$

Adiabatikus állapotváltozás

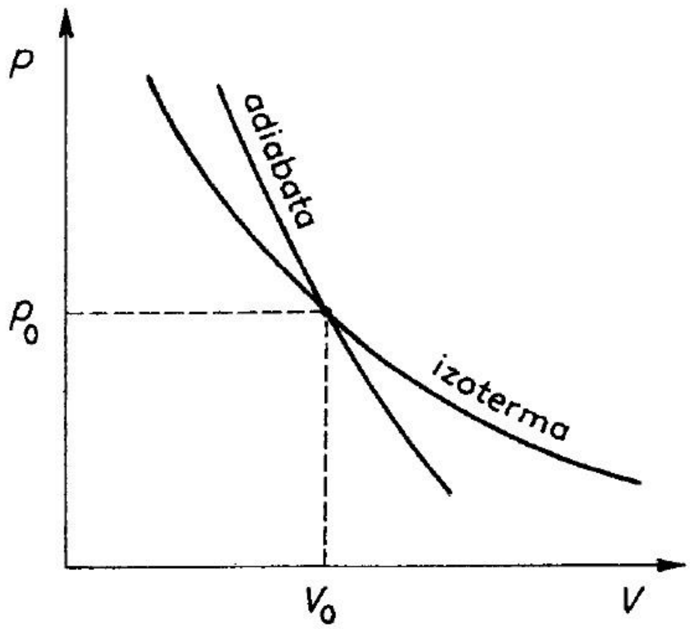
Adiabatikus folyamatnak nevezzük azon folyamatokat, amikor a gáz nem vesz fel hőt, de le sem ad, azaz:

$$\delta Q = 0$$

Ez kétféle képen történhet meg. Vagy hőszigetelt fallal vesszük körbe a rendszert, vagy a folyamat olyan gyorsan megy végbe, hogy a hőcserére nincs idő.

$$dE + pdV = 0$$

Ez minden adiabatikus állapotváltozásra igaz.



A megoldáshoz szükség van az állapotegyenletre, így a továbbiakban ideális gázra korlátozzuk. A V-t és T-t tekintjük független változóknak. Mivel E csak a hőmérséklettől függ:

$$C_V dT + p dV = 0$$

Ebből látszik, hogy a gáz hőmérséklete nő adiabatikus összenyomás esetén.

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$C_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

$nR = C_p - C_V$-t behelyettesítve, majd $C_V T$-vel osztva azt kapjuk:

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0, \text{ ahol } \gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Ezt integrálva:

$$\ln T + (\gamma - 1)\ln V = áll.$$

A bal oldal $TV^{\gamma-1}$ logaritmusa, így:

$$TV^{\gamma-1} = áll.$$

Az állapotegyenletet felhasználva:

$$pV^{\gamma} = áll.$$

Ezt a p-V síkon ábrázoló görbe az adiabata

Az ábrán jól látszik egymás mellett ábrázolva, hogy az adiabata meredekebb, mint az izoterma. Tekintsünk egy adiabatét és egy izotermát, amik a p_0, V_0 pontban metszik egymást.

Az izoterma:

$$pV = p_0 V_0$$

Az adiabata:

$$pV^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$$

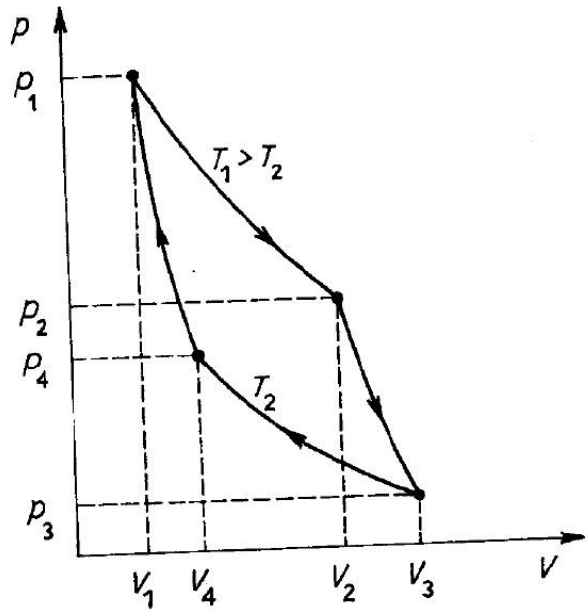
V szerint vett differenciálhányadosuk:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{iz} = -\frac{p_0}{V_0}$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = -\gamma\frac{p_0}{V_0}$$

Mivel $\gamma > 1$, így beláttuk, hogy tényleg az adiabata a meredekebb.

Carnot-féle körfolyamat ideális gázzal



Mivel körfolyamatról beszélünk, így a kezdeti és a végállapot ugyanaz, és mivel az energia állapotfüggvény így a rendszer belső energiája a körfolyamat alatt nem változik meg:

$$E_2 - E_1 = 0$$

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer 1 mol ideális gáz, amely dugattyúval ellátott hengerben van. A kezdeti állapotban legyen a térfogata V_1 , a nyomása p_1 . Helyezzük az egészet egy T_1 hőmérsékletű, nagy hőkapacitású hőtartályba. Feltéve, hogy a henger fala jó hővezető, a henger fala gyorsan felveszi a T_1 egyensúlyi hőmérsékletet. Ezután a gázt izotermikusan kitágítjuk $V_2 > V_1$ térfogatra. Eközben $p_2 < p_1$ nyomásra lecsökken. A gáz kitáguláskor munkát végez, amelyet a hőtartályból felvett hő fedez,mivel az energiája közben nem változott meg, mert az csak a hőmérséklettől függ, ami állandó. A hőtartályból felvett hő:

$$Q_1 = W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Mivel $V_2 > V_1$, ezért $Q_1 > 0$.

Most vegyük ki a hengert és vegyük körül jó hőszigetelővel, majd engedjük tágulni V_3 térfogatra. Ez a tágulás adiabatikus, mivel nem veszít hőt a rendszer. Eközben a hőmérséklete lecsökken T_2-ről T_1-re. A táguló gáz által végzett munka most a belső energia rovására történik.

$$W_2 = \int_{V_2}^{V_3} pdV = -\int_{V_2}^{V_3} dU = -C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = C_V(T_1 - T_2)$$

Most távolítsuk el a hőszigetelőt és egy T_2 hőmérsékletű hőtartályba tegyük bele. Így izotermikusan összenyomjuk V_4 térfogatúra, ami alatt a nyomás megnő p_4-re. Ekkor mi végzünk munkát a rendszeren. Mivel a belső energia nem változik, az általunk végzett munkával egyenlő hőt a rendszer leadja a hőtartálynak.

$$-Q_2 = W_3 = -\int_{V_3}^{V_4} pdV = -RT_2 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = -RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

$$Q_2 < 0$$

A V_4 térfogatot úgy választjuk meg, hogy ebből az állapotból egy adiabatikus összenyomással vissza lehessen jutni a kezdeti állapotba, amihez megint ki kell venni a rendszert a hőtartályból, és hőszigetelővel kell bevonni. Ezek után össze kell nyomni V_1 térfogatúra. Eközben a nyomása a nyomása a kezdeti p_1, hőmérséklete pedig T_1-re áll be. Az általunk végzett munka a belső energiát fogja növelni.

$$W_4 = -\int_{V_4}^{V_1} pdV = \int_{E_2}^{E_1} dE = C_V \int_{T_2}^{T_1} dT = C_V(T_1 - T_2)$$

A gáz által végzett teljes munka:

$$W = W_1 + W_2 - W_3 - W_4 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + C_V(T_1 - T_2) - RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4} - C_V(T_1 - T_2)$$

Az adiabatikus kitágulás és összenyomás kiejti egymást, ezért a gáz összes munkája a két hőtartályből felvett hőmennyiségek algebrai összege.

$$W = Q_1 + Q_2$$

A Carnot-féle körfolyamat egy olyan gépnek a működését szemlélteti, amely a hő rovására végez munkát. Felmerül a kérdés, hogy mennyi egy ilyen gépnek a hatásfoka. Termikus hatásfok alatt a végzett munka és az első tartályból felvett Q_1 hő hányadosát értjük

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1+Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

A $\frac{Q_2}{Q_1}$ hányados:

$$\frac{Q_1}{T_1} = R\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad \frac{Q_2}{T_2} = R\ln\frac{V_4}{V_3}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = R\ln\frac{V_2V_4}{V_1V_3}$$

$$T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{-1} \qquad \text{és} \qquad T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_4^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$\frac{V_2V_4}{V_1V_3} = 1$$

Vagyis:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Amiből következik:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

$$\eta = \frac{(T_1-T_2)}{T_1}$$

Vagyis a körfolyamatot végző gáz a melegebb tartályból hőt vesz fel és a hidegebb tartályban leadja annak egy részét. A végzett munka hatásfoka a két tartály hőmérsékletétől függ.

Termodinamika második főtétele

Az első főtétel megenged minden olyan folyamatokat, amiknél az energiatétel érvényesül. Mégis elmondható számos olyan állapotváltozás ami a természetben nem fordul elő. Például egy forgó folyadékot ha magára hagyunk, akkor az a súrlódás miatt egyszer csak megszűnik, és nyugalomban marad. A mozgás mechanikai energiája hővé alakult. Az első főtétel értelmében ez visszafele is lejátszódhat. Ha lehűtünk egy nyugvó folyadékot, akkor az elkezdene forogni?

Azt tapasztaljuk, hogy a hőátadással járó folyamatok irreverzibilis folyamatok. Az irreverzibilitás a természet sajátossága.

A termodinamika második főtételének értelmében nincs a természetben olyan termodinamikai folyamat, amelynek az összes hatása abban nyilvánul meg, hogy a hő a hidegebb helyről a melegebb helyre menne át. Másképp megfogalmazva, a hő magától csak a melegebb helyről a hidegebb fele áramolhat. W Thomastól származó megfogalmazás:

> „Nincs a természetben olyan folyamat, amelynek összes hatása abban áll, hogy egy test hőt veszít, és az teljesen munkává alakul."

Max Planck:

> „Lehetetlen olyan periodikusan működő gépet szerkeszteni, amely egyetlen hőtartályból hőt von el, és azt teljes egészében munkává alakítja."

Hatásában szinte egyenértékű lenne az első fajú perpettum mobilével, amely munkát adna, anélkül hogy energiát fogyasztana.

Az egyetlen hőtartály lehűlése árán munkát adó gép a másodfajú perpetuum mobile. Ennek működése nem ellenkezne az első főtétellel, de tapasztalataink szerint nem lehet ilyen gépet készíteni.

Carnot tétel

A második főtételt használjuk, hogy bizonyítsuk a Carnot-körfolyamatot végző gép hatásfoka maximális.

A Carnot-körfolyamatnál láttuk, hogy az első hőtartályból felvett hőnek csak egy része fordítódik munkára.

A körfolyamatot egyensúlyi állapotokon keresztül vezettük, ami azt jelenti, hogy visszafele is lefolyhat. Ilyenkor a Carnot gép hőpumpaként üzemel. Az a munka, amit eközben nekünk kell befektetni:

$$W_p = \eta Q_1$$

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1-\eta}$$

$$W_p = \frac{\eta}{1-\eta} Q_2$$

Ezek után gondoljuk el, hogy valamilyen hőerőgép nem Carnot-féle körfolyamatot végez a két tartály között η' hatásfokkal. Az első hőtartályból felvesz $Q_1{}'$ hőt, és ennek $\eta' Q_1{}'$ részét leadja:

$$Q_2' = (1 - \eta')Q_1{}'$$

Most ugyanezen tartályok között egy fordított irányú Carnot-féle körfalyamatot végez a rendszer. Ekkor a hőpumpáláshoz szükséges munka:

$$A_p{}' = \frac{\eta}{1-\eta}(1 - \eta')Q_1{}'$$

A két gép által végzett munka:

$$A_ö = A_p' + A_p = \eta' Q_1' - \frac{\eta}{1-\eta}(1 - \eta')Q_1' = \frac{\eta' - \eta}{1-\eta}Q_1{}'$$

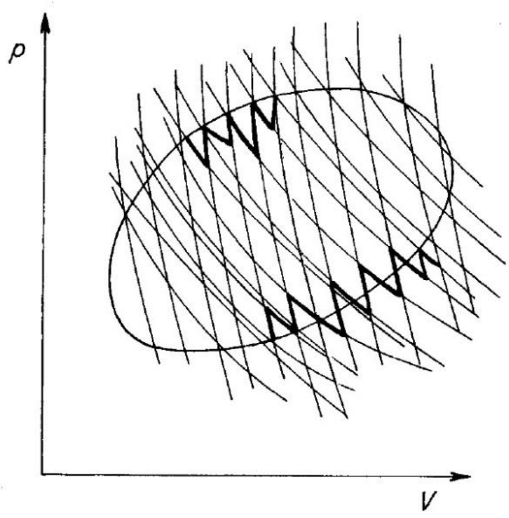
A második hőtartály visszajut az eredeti állapotába. A két gép munkaösszege is visszajut az eredeti állapotába. Csak az első hőtartály állapota változhatott meg. Ha a η' nagyobb lenne, mint a Carnot-féle gépé, akkor az összes munka pozitív lenne. Vagysi munkát nyernénk az első hőtartály hővesztesége mellett. Ez ellentétben áll a második főtétellel, szóval:

$$\eta' \leq \eta$$

Az entrópia

A reverzibilis Carnot-féle körfolyamatra a dolgozó közeg anyagi minőségtől függetlenül:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$



Most megvizsgáljuk, hogyan módosul ez tetszőleges reverzibilis körfolyamatra. A körfolyamatot a p-V síkon egy zárt görbével ábrázolhatjuk. A görbe minden egyes pontjához tartozik egy egyensúlyi hőmérséklet, ami a görbe mentén folyton változik. Rajzoljunk fel a p-V síkon adiabatákat és izotermákat, amik átszelik a körfolyamatot ábrázoló zárt görbét. Az ábrán látható, hogy a körfolyamat közelíthető a zárt görbét lefedő elemi Carnot-körfolyamatok összegével, ugyanis ha a rendszert gondolatban végigvezetjük az összes kis Carnot-körfolyamaton, akkor az adiabatákon kétszer megyünk végig, egyszer előre egyszer hátra. Így a munkavégzéshez csak az izotermaszakaszok járulnak hozzá. Ha az izotermák és az adiabaták elég sűrűn vannak, akkor a cikk-cakkos vonalakkal helyettesíthetjük a folytonos állapotgörbét. Mivel feltevésünk szerint körfolyamatról van szó, minden Carnot-ciklusra érvényes az

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

egyenlet.

Az elemi Carnot-körfolyamatok összegzésére adódik:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

Q_i alatt a kis izoterma szakaszokon felvett hőt értjük.

A korábbi megállapításunk szerint a rendszer által leadott hőt negatívnak vesszük.

T_i az i-edik izotermának megfelelő állandó hőmérséklet.

Vegyük fel a határesetet, amikor az izotermákkal és az adiabatákkal való felosztás minden határon túl finomul.

$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \to \oint \frac{\delta Q^{(r)}}{T} = 0$, azol az r felső index azt jelzi, hogy a folyamat reverzibilis, mivel a kiindulási egyenlet csak ekkor igaz.

A körintegrál a második főtételre alapozva mindig nulla, amiből következik, hogy az integráljel alatti mennyiség az állapotváltozók valamilyen függvényének teljes differenciálja. Ezt a függvényt nevezzük entrópiának

$$dS = \frac{\delta Q^{(r)}}{T}$$

Gondoljunk valamilyen fizikai rendszerre, amely az A állapotból kiindulva reverzibilis folyamat végén eljut B állapotba. Vegyük a $\frac{\delta Q}{T}$ hányados integrálját erre a folyamatra. Az entrópia definíciója alapján ez a két végállapot különbségével egyezik meg:

$$\int_A^B \frac{\delta Q^{(r)}}{T} = \int_A^B dS = S(B) - S(A)$$

Az integrál értéke független az úttól, azt a két állapot entrópiájának különbsége egyértelműen meghatározza.

Az entrópiát a második főtételre alapozott képleten keresztül vezettük be. Ez az entrópia teljes differenciálját határozza meg és nem magát az entrópiát. Ennek következtében az entrópiát egy adott állapotban önkényesen előírhatjuk. Ha ezt megtettük, akkor az összes állapothoz egyértékű entrópiafüggvény tartozik. Tehát a második főtétel csak egy állandó erejéig határozza meg az entrópiát.