Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
7-8. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.05.28.

1. DI rendszerek analízise az időtartományban

1.1. Feladat

Döntsük el, hogy periodikusak-e az alábbi jelek. Ha igen, állapítsuk meg periódusszámukat.

a) $x_1[k] = \cos[0,17\pi k + 0,2\pi]$ A jel DI körfrekvenciája $\vartheta = 0,17\pi$. A periodicitás feltétele, hogy $\vartheta = \frac{2\pi M}{L}, M, L \in \mathbb{Z}$. Ennek megfelelően

$$\frac{0,17\pi}{2\pi} = \frac{M}{L} = \frac{0,17}{2} = \frac{17}{200}$$

Ebből a periódusszám $L = 200$.

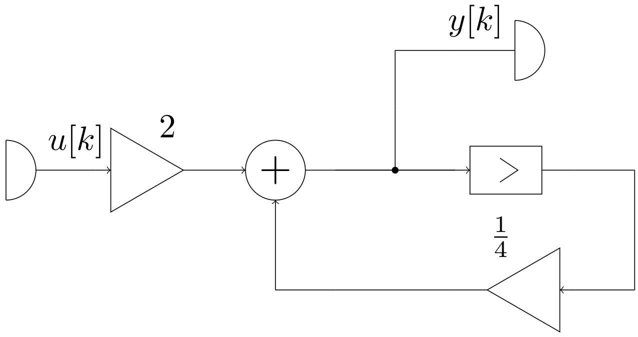
b) $x_2[k] = \cos[0,2k]$

$$\vartheta = 0,2 = 2\pi\frac{M}{L} \to \frac{M}{L} = \frac{0,2}{2\pi} = \frac{1}{10\pi} \to L = 10\pi,$$

így L nem egész, tehát nem periodikus a jel.

2. feladat

Az ábrán látható elsőrendű rekurzív hálózatot vizsgáljuk. Határozzuk meg a rendszer átviteli karakterisztikáját! Adjuk meg a rendszeregyenletet! Adjuk meg a rendszer válaszát, ha a gerjesztés $u[k] = 10\cos\left(\frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{3}\right)$! Adjuk meg az amplitúdó- és a fáziskarakterisztika kifejezését!



1. ábra. Elsőrendű rekurzív hálózat

Szinuszos állandósult állapotban a szinuszos időfüggvényeket fazorjaikkal helyettesítjük. Legyen a gerjesztés fazora $\overline{U}$, a válaszé $\overline{Y}$. A késleltető bemenete megegyezik az $\overline{Y}$ fazorral, így kimenete $\overline{Y}e^{-j\vartheta}$. Írjuk fel $\overline{Y}$-t az összegző kimeneteként:

$$\overline{Y} = 2\overline{U} + \frac{1}{4}\overline{Y}e^{-j\vartheta}$$

Ezt rendezzük $\overline{Y}$-ra, hogy azután kifejezzük az átviteli karakterisztikát.

$$\overline{Y}\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\vartheta}\right) = 2\overline{U}$$

$$\overline{Y} = \overline{U} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\vartheta}}$$

Az átviteli karakterisztika a válasz és a gerjesztés fazorának hányadosaként adódik:

$$\underline{\underline{H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\vartheta}}}}$$

Az átviteli karakterisztikából kiolvasható a rendszeregyenlet:

$$\underline{\underline{y[k] - 0{,}25y[k-1] = 2u[k].}}$$

A válasz időfüggvényének felírásához szükség van a megadott gerjesztés fazorára, valamint az átviteli karakterisztika értékére a körfrekvenciáján. A gerjesztés körfrekvenciája

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$$

(a periódusa $L = 8$ ütem), amplitúdója $U = 10$, kezdőfázisa $\rho = \frac{\pi}{3}$. Ezzel a gerjesztés fazora

$$\overline{U} = Ue^{j\rho} = 10e^{j\frac{\pi}{3}},$$

az átviteli tényező $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ körfrekvencián pedig

$$\overline{H} = H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}\left[\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right]} \approx \frac{2}{0,84199\mathrm{e}^{j0,21152}} = 2{,}3753\mathrm{e}^{-j0{,}21152}$$

A válasz fazora

$$\overline{Y} = \overline{U}\cdot\overline{H} = 10e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot 2{,}3753\mathrm{e}^{-j0{,}21152} = 23{,}753\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{3}-0{,}21152\right)} = 23{,}753\mathrm{e}^{j0{,}8357}$$

A fazor alapján ránézéses módszerrel meghatározható az időfüggvény:

$$\underline{\underline{y[k] = 23{,}753\cos\left(\tfrac{\pi}{4}k + 0{,}8357\right)}}$$

Az amplitúdókarakterisztika az átviteli karakterisztika abszolútértéke,

$$K(\vartheta) \equiv \left|H\left(e^{j\vartheta}\right)\right| = \left|\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\vartheta}}\right|$$

$$K(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{(1-0{,}25\cos\vartheta)^2 + (0{,}25\sin\vartheta)^2}}$$

A fáziskarakterisztika

$$\phi(\vartheta) = \arg H\left(e^{j\vartheta}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{0{,}25\sin\vartheta}{1-0{,}25\cos\vartheta}\right)$$

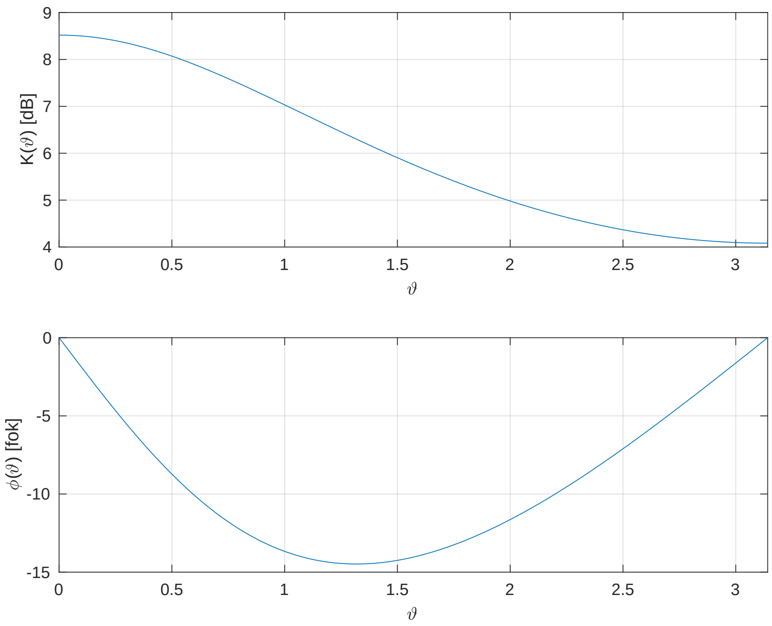
Az amplitúdó- és fáziskarakterisztikát a $[0,\pi]$ intervallumban ábrázoljuk (az amplitúdót dB-ben, a fázis fokban). Erre a célra az alábbi Matlab-szkript használható:

```
clear
close all

theta = linspace(0, pi);

K = 2./(sqrt((1 - 0.25 * cos(theta)).^2 + (0.25 * sin(theta)).^2));
fi = -180 / pi * atan2(0.25 * sin(theta), 1 - 0.25 * cos(theta));

subplot(2, 1, 1)
plot(theta, 20 * log10(K))
xlabel('\vartheta')
ylabel('K(\vartheta) [dB]')
xlim([0 pi])
grid
subplot(2, 1, 2)
plot(theta, fi)
xlabel('\vartheta')
ylabel('\phi(\vartheta) [fok]')
grid
xlim([0 pi])
```



2. ábra. Az 3. feladatbeli hálózat amplitúdó- és fáziskarakterisztikája

Az átviteli karakterisztikát a Matlab beépített `freqz` függvényével is kirajzoltathatjuk a rendszeregyenlet (ill. az átviteli karakterisztika számláló- és nevezőpolinomjának) ismeretében:

```
>> freqz(2, [1 -.25])
```

3. feladat

Fejezzük ki az előző feladatbeli hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását, és ennek alapján az átviteli karakterisztikát normálalakban!
Az egyetlen tároló állapota legyen $x[k]$, a bemeneti változója értelemszerűen $x[k+1]$. Az összegző kimenetére

$$x[k+1] = \frac{1}{4}x[k] + 2u[k],$$

ami maga az állapotegyenlet. A válaszra vonatkozó egyenlet

$$y[k] = x[k+1] = \frac{1}{4}x[k] + 2u[k].$$

A két egyenlet együtt az ÁVL normálalakja. Szinuszos állandósult állapotban $x[k]$-hoz tartozó fazor $\overline{X}$, az egy ütemmel siettetett $x[k+1]$ fazorja pedig $\overline{X}e^{j\vartheta}$. (Ügyeljünk a pozitív előjelre!)
Az állapotegyenlet fazoros alakja

$$\overline{X}e^{j\vartheta} = \frac{1}{4}\overline{X} + 2\overline{U},$$

amiből az állapotvektor fazora kifejezhető:

$$\overline{X} = \frac{2}{e^{j\vartheta} - \frac{1}{4}}\overline{U}.$$

Ezt a válaszegyenlet fazoros alakjába helyettesítve

$$\overline{Y} = \frac{1}{4}\overline{X} + 2\overline{U} = \overline{U}\left[\frac{2e^{j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - \frac{1}{4}}\right]$$

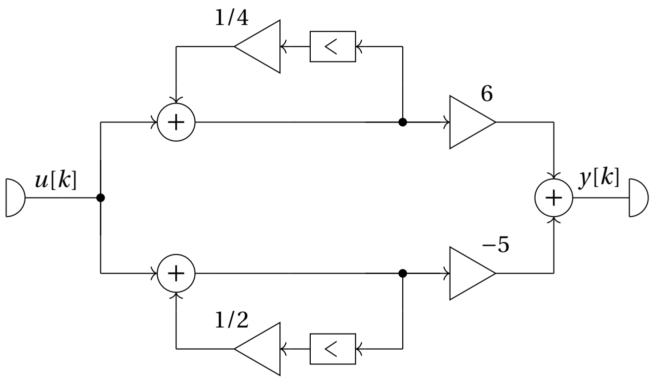
Az átviteli karakterisztika normálalakja

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{2e^{j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - \frac{1}{4}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\vartheta}}$$

akár $e^{j\vartheta}$ pozitív, akár negatív hatványaival kifejezve.

4. feladat

Adjuk meg az alábbi jelfolyamhálózattal reprezentált rendszer átviteli karakterisztikáját normál-alakban! Adjuk meg a rendszer válaszát az $u[k] = 5\cos\left(\frac{\pi}{6}k + \frac{\pi}{4}\right)$ gerjesztésre!



3. ábra

Szinuszos állandósult állapotban a szinuszos időfüggvényeket fazorjaikkal helyettesítjük. Legyen a gerjesztés fazora $\overline{U}$, a válaszé $\overline{Y}$. A felső késleltető bemeneti jeléhez rendeljünk egy $\overline{V}_1$ fazort, az alsó késleltető bemenetéhez egy $\overline{V}_2$ fazort. A felső késleltető kimenetén a jel fazora akkor $\overline{V}_1 e^{-j\vartheta}$, az alsó késleltető kimenete pedig $\overline{V}_2 e^{-j\vartheta}$. Írjuk fel az összegzők kimenetén a jeleket!

$$\overline{V}_1 = \frac{1}{4}\overline{V}_1 e^{-j\vartheta} + \overline{U}, \qquad \overline{V}_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\vartheta}}\overline{U}$$

$$\overline{V}_2 = \frac{1}{2}\overline{V}_2 e^{-j\vartheta} + \overline{U}, \qquad \overline{V}_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\vartheta}}\overline{U}$$

$$\overline{Y} = 6\overline{V}_1 - 5\overline{V}_2.$$

Célunk $\overline{V}_1$ és $\overline{V}_2$ segédváltozók kiküszöbölése, ami algebrai egyenletekről lévén szó, megtehető. Az átviteli karakterisztika normálalakja:

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = 6\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\vartheta}} - 5\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\vartheta}} = \frac{1-\frac{7}{4}e^{-j\vartheta}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\vartheta}+\frac{1}{8}e^{-j2\vartheta}}.$$

A normálalakú átviteli karakterisztikából kiolvasható a rendszeregyenlet is:

$$y[k] - 0{,}75y[k-1] + 0{,}125y[k-2] = u[k] - 1{,}75u[k-1].$$

Ez alapján ellenőrizhetjük, jogos-e szinuszos állandósult állapotról beszélnünk. A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$$p^2 - 0{,}75p + 0{,}125 = 0,$$

ahonnan $p_1 = 0{,}25$ ill. $p_2 = 0{,}5$. Mindkét sajátérték az egységkörön belül van, a rendszer gerjesztés-válasz stabil, valóban beáll a szinuszos állandósult állapot.
A megadott gerjesztés komplex csúcsértéke/fazora:

$$\overline{U} = 5e^{j\frac{\pi}{4}},$$

a rendszer $\overline{H}$ átviteli tényezője $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ körfrekvencián

$$\overline{H} = H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\pi/6} = \frac{1-\frac{7}{4}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{8}e^{-j2\frac{\pi}{6}}} = \frac{1-1{,}75\left(\cos\frac{\pi}{6}-j\sin\frac{\pi}{6}\right)}{1-0{,}75\left(\cos\frac{\pi}{6}-j\sin\frac{\pi}{6}\right)+0{,}125\left(\cos\frac{2\pi}{6}-j\sin\frac{2\pi}{6}\right)} =$$

$$\overline{H} = \frac{-0{,}5155 + 0{,}875j}{0{,}413 + 0{,}267j} = \frac{1{,}016 \cdot e^{j2{,}1}}{0{,}4916 \cdot e^{j0{,}5735}} = 2{,}065e^{j1{,}53}$$

(A rendszer erősítése $\pi/6$ körfrekvencián

$$k = 20\lg|H| = 20\lg 2{,}093 = 6{,}3\mathrm{dB},$$

fázistolása

$$\varphi = 1{,}53 = 87{,}7°.$$

Így a válasz fazorja

$$\overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{U} = 10{,}465e^{j2{,}32},$$

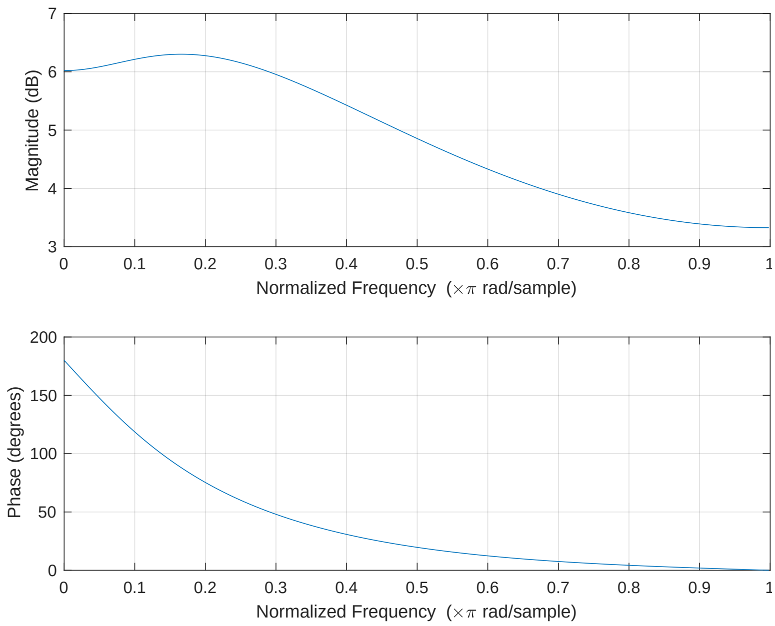
az időfüggvény pedig

$$y[k] = 10{,}465\cos\left(\frac{\pi}{6}k + 2{,}32\right).$$

Az átviteli karakterisztika ábrázolása beépített Matlab/Octave függvénnyel:

```
>> freqz([1 -7/4], [1 -3/4 1/8])
```

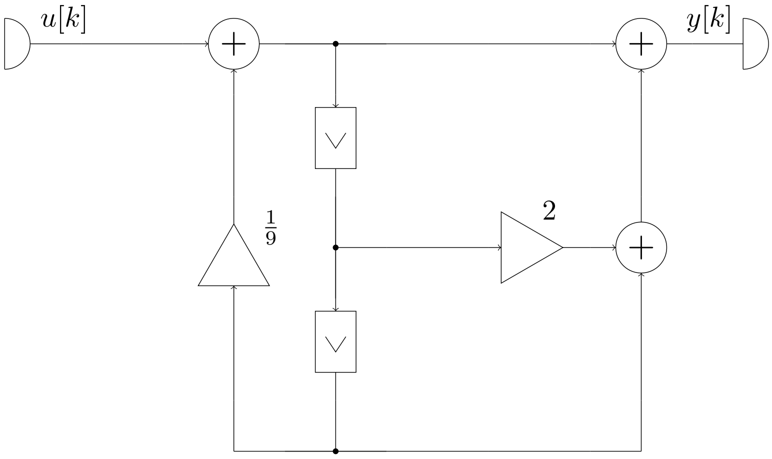
Az átviteli karakterisztika ábrája a 4. ábrán látható.



4. ábra. Az 4. feladatbeli hálózat amplitúdó- és fáziskarakterisztikája

5. feladat

Az ábrán egy IIR típusú hálózat látható. Határozzuk meg a hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikáját! Adjuk meg a rendszer válaszát, ha a gerjesztés $u[k] = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}k\right)$



5. ábra. IIR típusú hálózat

Szinuszos állandósult állapotban a szinuszos időfüggvényeket fazorjaikkal helyettesítjük. Legyen a gerjesztés fazora $\overline{U}$, a válaszé $\overline{Y}$. A felső késleltető bemeneti jeléhez rendeljünk egy $\overline{V}$ fazort, ekkor a felső késleltető kimenete $\overline{V}e^{-j\vartheta}$, míg az alsó késleltetőé $\overline{V}e^{-j2\vartheta}$.
Fejezzük ki $\overline{V}$-t a mint baloldali összeadó, valamint $\overline{Y}$-t mint a jobboldali összeadó kimenete:

$$\overline{V} = \overline{U} + \frac{1}{9}\overline{V}e^{-j2\vartheta}$$

$$\overline{Y} = \overline{V} + 2\overline{V}e^{-j\vartheta} + \overline{V}e^{-j2\vartheta}.$$

Az első egyenletet $\overline{V}$-re rendezve:

$$\overline{V}\left(1 - \frac{1}{9}e^{-j2\vartheta}\right) = \overline{U}$$

$$\overline{V} = \overline{U} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}e^{-j2\vartheta}}$$

Ezt helyettesítsük $\overline{Y}$ kifejezésébe:

$$\overline{Y} = \overline{V}\left(1 + 2e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}\right) = \overline{U} \cdot \frac{1 + 2e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}}{1 - \frac{1}{9}e^{-j2\vartheta}},$$

amiből következik az átviteli karakterisztika felírása.

$$H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{1 + 2e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}}{1 - \frac{1}{9}e^{-j2\vartheta}}$$

A válasz időfüggvényének felírásához szükség van a megadott gerjesztés fazorára, valamint az átviteli karakterisztika értékére a gerjesztés által meghatározott körfrekvencián. Ezeket az alábbi módon kapjuk meg:

$$\overline{U} = 4e^{j0} = 4$$

$$\overline{H} = H\left(e^{j\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{6}} = \frac{1+2e^{-j\frac{\pi}{6}}+e^{-j2\frac{\pi}{6}}}{1-\frac{1}{9}e^{-j2\frac{\pi}{6}}} = \frac{3{,}7321\mathrm{e}^{-j0{,}5236}}{0{,}94933\mathrm{e}^{j0{,}10153}} = 3{,}9312\mathrm{e}^{-j0{,}62513}$$

$$\overline{Y} = \overline{H}\cdot\overline{U} = 4\cdot 3{,}9312\mathrm{e}^{-j0{,}62513} = 15{,}7249\mathrm{e}^{-j0{,}62513}$$

A fazor alapján ránézéses módszerrel meghatározható az időfüggvény:

$$y[k] = 15{,}725\cos\left(\frac{\pi}{6}k - 0{,}625\right)$$