

2. Zárthelyi 2010 tavasz A2

Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Határozza meg az összes olyan n pozitív egészet, melyre az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n$ minden sajátértéke pozitív!

2. Hol folytonosak az alábbi függvények ha $f(0,0) = g(0,0) = 0$ és az origón kívül

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \quad (b) \quad g(x, y) = \frac{x^2 + x^2 y^2}{x^2 + y^4}$$

3. Legyen $f(x, y) = \frac{x^4}{x^3 + y^3}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$ és $g(x, y) = (x + y)e^{x+y}$ az egész síkon. Határozza meg az f és g függvények $e = (1, 0)$ irányú iránymenti deriváltját az origóban és a $P = (1, 1)$ pontban, amennyiben ezek léteznek!

4. Legyen H_1 és H_2 két háromszög a síkban, H_1 csúcsai a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ pontok, míg H_2 csúcsai az $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$ pontok. Számítsa ki az $f(x, y) = 4xy$ területi integrálját a $T = H_1 \cup H_2$ tartományon!

5. Állapítsa meg, hogy a következő numerikus sorok közül melyik konvergens:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{5n}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{5n}\right)^{n^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{2}{n})^n}{5n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+\frac{2}{n})^n}{n}$$

6.

(a) Melyik állítás igaz és melyik nem?

$$(a1) \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy dx = 0 \quad (a2) \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy dx = 0$$

$$(a3) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy dx = -1 \quad (a4) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2 dy dx = 0$$

(b) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(b1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is

(b2) Ha tagjai monoton nőnek, akkor konvergens

(b3) Ha konvergens, akkor a tagjai 0-hoz tartanak.

(b4) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.