A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2011.10.11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Szerencsére elmúlt a veszély, pánikra semmi ok. Luke Skywalker ugyan kivont lézerkarddal ment órára a jediképzőben, de a birodalmi gárda sem teketóriázott: még kicsöngetés előtt sikerült megelőznie a fejvesztett zűrzavart . A hatalmas sikert természetesen sajtótájékoztató követte, amire a birodalmiak három tagú vezetése terepszínű álcaruházatban, 10 feketébe öltözött elitgárdista társaságában vonult be. Itt minden nyitott kérdés megnyugtatóan tisztázódott, csupán egyetlen egy maradt. Hányféle sorrendben történhet a bevonulás, ha a szigorú előírás szerint 3 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 3 gárdista sorrendben kell vonulniuk? Segítsünk nekik.

   Minden bevonulási sorrendhez tartozik a vezetőknek és a gárdistáknak is egy-egy sorrendje. Ráadásul a vezetők tetszőleges sorrendjéhez és a gárdisták tetszőleges sorrendjéhez pontosan egy helyes bevonulási sorrend tartozik, amit úgy kapunk, hogy a két sorrendet alkalmas módon összefésüljük. (4 pont)
   A vezetők sorrendje egy permutáció, ezek lehetséges száma 3! . (2 pont)
   A gárdisták sorrendje szintén egy ismétlés nélküli permutáció, ezek lehetséges száma 10! . (2 pont)
   A szabályszerű sorrendek száma tehát a permutáció-párok száma, ami $3! \cdot 10!$, és ez a válasz a sajtótájékoztatón nyitva maradt kérdésre. (2 pont)

   Aki az elitgárdistákat a jól láthatóan viselt azonosító szám ellenére nem tekinti megkülönböztethetőnek, és így 3! végeredményt kap, az csak 2 pontot érdemel.

   Aki „félig” különbözteti meg a gárdistákat, azaz $\binom{10}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{2}{1}\binom{5}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{3}{3}$ válasszal próbálkozik, az kapjon 5 pontot.

2. A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?

   A leszámlálandó pörgetések száma úgy kapható, hogy a lehetséges pörgetéssorozatok számából kivonjuk azon pörgetéssorozatok számát, amelyekben mind a 10 szám különböző. (3 pont)
   A lehetséges pörgetéssorozatok száma 37 elem 10-edosztályú ismétléses permutációinak száma, azaz 37^{10}. (3 pont)
   A csupa különböző eredményt adó pörgetéssorozatok éppen 37 elem 10-edosztályú ismétlés nélküli variációi, ezek száma $\frac{37!}{27!}$. (3 pont)
   A válasz tehát $37^{10} - \frac{37!}{27!}$. (1 pont)

   Aki szerint egy pörgetés kimenetele csupán 36-féle lehet, de egyébként jól számol, az kapjon 9 pontot.

3. Adott $n + 2$ rendezett tömb, méreteik rendre $1, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n$. Adjunk olyan eljárást, ami legfeljebb 2^{n+2} összehasonlítással rendezi a tömbökben tárolt rekordokat.

   Tanultuk, hogy egy n és egy k méretű rendezett tömb összefésüléséhez legfeljebb $n + k$ összehasonlítás szükséges. (Valójában elegendő $n + k - 1$ is, de a számolás egyszerűbb a fenti, rosszabb becsléssel.) (3 pont)
   Fésüljük össze a két 1 méretű tömböt, majd az így kapott 2 méretűt az eredetileg kapott 2 méretűvel, az így kapott 4 méretű tömböt az inputban szereplő 4 méretű tömbbel, sít. (4 pont)
   Az egyes összefésülésekhez legfeljebb $2, 4, 8, \ldots, 2^{n+1}$ összehasonlítás szükséges, így az összehasonlítások száma a teljes eljárásban legfeljebb $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^{n+2} - 2 < 2^{n+2}$ (3 pont)

4. Kupac-e az $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&2&8&3&7&5\\\hline\end{array}$ tömb?

   A kupactulajdonság akkor teljesül egy tömbre, ha minden i-re igaz, hogy a tömbben i-diknek tárolt rekord nem nagyobb sem a tömbben $2i$-diknek, sem pedig a $(2i+1)$-diknek tárolt rekordnál. (Természetesen akkor, ha léteznek a tömbben a kérdéses elemek.) (5 pont)
   Azonban az 5-diknek tárolt rekord kisebb a 2-dik rekornál, (3 pont)
   a kupactulajdonság tehát nem teljesül, (1 pont)
   a kérdezett tömb nem kupac. (1 pont)

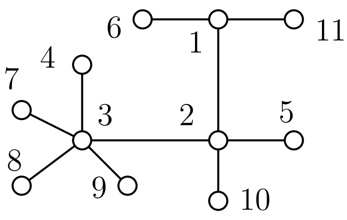
5. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, 10 pontú gráf adható meg, amelyek egyetlen 9-fokú és 9 db 3-fokú csúcsot tartalmaznak?

   Ez a feladat rosszul lett kitűzve: nem kötöttük ki, hogy a gráf egyszerű. A kitűzött feladat megoldása sajnos reménytelen. Ezért az alábbi eljárást követjük. Mindenkinek csak a maradék 5 megoldását értékeljük, és az arra kapott pontszámát szorozzuk 1,2-vel, majd lefelé kerekítünk. Ezen kívül, aki foglalkozott ennek a feladatnak az egyszerű változatával, az kapjon legfeljebb 5 pontot a helyes megoldásért, aki pedig a nem egyszerű változatot nézte és érdemi eredményt ért el, az legfeljebb 4 pontot kapjon. A rossz kitűzés egyértelműen az én hibám (Fleiner), elnézést kérek mindenkitől az okozott kellemetlenség miatt.

   A feladatban szereplő gráfok mindegyike úgy kapható meg, hogy egy 9 csúcsú 2-reguláris gráfhoz (amiben tehát minden csúcs fokszáma 2) hozzáveszünk egy 10-dik pontot, amit minden más csúccsal összekötünk. (2 pont)
   Két ilyen gráf pontosan akkor lesz izomorf egymással, ha a teljes fokú csúcs törlésével kapott 2-reguláris gráfok izomorfak. (2 pont)
   Egy 2-reguláris gráf minden komponense kör, tehát a gráf diszjunkt körök uniója. (2 pont)
   Az tehát a kérdés, hogy hány lényegesen különböző módon lehet 9 pontot diszjunkt körökkel lefedni, azaz hányféleképpen lehet a 9-et olyan egész számok összegére felbontani, amelyek mindegyike legalább 3. (2 pont)
   Ez utóbbit viszont kiszámolhatjuk az ujjainkon: $9 = 3+3+3 = 3+6 = 4+5$, ami pontosan 4-féle lehetőség, vagyis legfeljebb 4 páronként nem izomorf gráf adható meg a feladatban megkívánt tulajdonsággal. (2 pont)

6. Határozzuk meg azt az F' fát, aminek Prüfer-kódja az ábrán látható F fa Prüfer-kódjának fordítottja, tehát amit úgy kapunk, hogy F Prüfer-kódját jobbról balra olvassuk.

   Az órán tanult módszerrel kiszámítjuk az adott fa Prüfer-kódját: mindig a legkisebb leveleket törölve, és azok szomszédját felírva kapjuk az $(1,2,2,3,3,3,1,2,3)$ Prüfer-kódot. (3 pont)
   Ennek fordítottja a $(3,2,1,3,3,3,2,2,1)$ kód, (1 pont)
   amihez az órán tanultak szerint hozzáírunk egy 11-est, majd mindig az adott halmazból hiányzó legkisebb elemeket kitöltve megkapjuk a leveleket a $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}3&2&1&3&3&3&2&2&1&11\\\hline 4&5&6&7&8&9&3&10&2&1\end{array}$ táblázat szerint. (4 pont)



   Az ábrán látható a keresett fa, éleit a táblázat oszlopai határozzák meg. (2 pont)