# II. házi feladat : Diszkrét idejű hálózatok vizsgálata

| | |
|---|---|
| **Név** | Seyler Lajos |
| **Neptun kód** | EGWIB4 |
| **Adatsor száma** | 1 |
| **Beadási határidő:** | 12. oktatási hét |

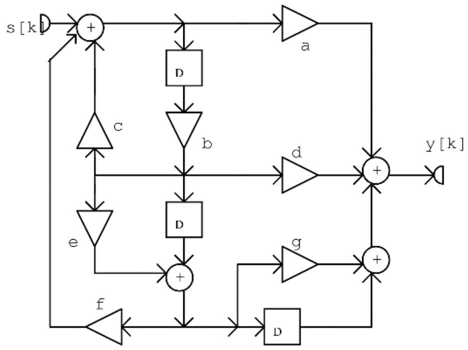
***Megjegyzések:*** *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* ***és a feladatlapot is be kell adni****. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását elölről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* ***nem elegendő a végeredményeket közölni****! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* ***a megoldás elvi lépéseit*** *ekkor is* ***részletesen*** *ismertetni kell.*

**Gyakorlatvezető neve:**

**Javító véleménye (elfogadás, javítások):**

A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A hálózat paraméterei az ábra alatti táblázatból határozandók meg. A fejlécben található „*Adatsor száma*" mező jelöli ki a táblázat megfelelő sorát.

**32.**




Erősítések | 1.4.

| a | b | c | d | e | f | g | F | G | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,9 | -0,8 | -0,8 | -1 | 1,2 | -1 | 0,8 | -7,5 | 5,5 | -0,8 |
| 0,6 | -0,8 | 1,2 | 0,4 | -0,8 | -1 | -0,2 | 8 | 6 | 1,2 |
| 0,8 | -0,8 | -1,4 | -0,7 | 0,6 | -1 | 0,7 | 8,5 | 7,2 | -1,1 |
| -0,7 | -0,8 | 0,6 | 0,4 | -1,4 | -1 | -1 | 9,5 | 7,4 | 0,7 |
| -0,7 | 1,6 | 0,6 | 0,4 | 0,8 | 0,5 | -0,3 | -8 | -7,4 | -0,7 |
| 0,4 | 1,6 | -0,6 | -0,6 | -0,8 | 0,5 | -0,6 | 7,6 | -6 | 0,6 |
| 1,3 | 0,5 | 2 | 0,5 | 4 | 0,8 | 0,9 | -8,4 | 8,5 | -0,6 |
| -1,2 | -0,8 | -0,3 | -0,7 | 2,4 | -0,5 | 0,3 | 9,6 | -9 | 0,85 |
| -1,1 | 0,5 | -0,4 | 0,4 | -2,5 | 0,8 | 0,6 | -6,8 | 7 | -1,2 |
| -0,8 | -0,8 | 0,7 | 0,4 | -1,6 | -0,5 | -0,9 | 6,9 | 5,6 | -0,75 |

2.2. | 2.3. s[k] értékei

| S | $\vartheta_0$ | ρ | k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | π/23 | -π/7 | | 8 | 6 | 4 | 2 | -1 | 1 |
| 16 | π/22 | -π/8 | | 1 | 3 | 5 | 7 | -1 | 1 |
| 17 | π/21 | -0,2π | | 2 | 3 | 5 | 8 | 0 | 3 |
| 18 | π/20 | π/8 | | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | -3 |
| 19 | π/19 | π/7 | | 4 | 4 | -3 | -2 | 7 | 5 |
| 12 | π/18 | π/5 | | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 10 | π/17 | -π/6 | | 2 | 4 | 6 | 5 | 4 | -4 |
| 20 | π/16 | π/6 | | 7 | 5 | 3 | 3 | 1 | -2 |
| 21 | π/15 | -π/9 | | 2 | 4 | -3 | -2 | 4 | 2 |
| 22 | π/14 | π/9 | | 3 | 4 | -2 | 5 | -6 | 4 |

# 1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!

1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!

1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!

1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \ldots, 5$ értékekre!

1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

# 2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!

2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?

2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!

2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!

2.5 Az 1.3-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!

2.6 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!

2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1 és a 2.2 pont eredményeit az ANDI programmal!

# 3. feladat: Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

3.1 Határozza meg a hálózat átviteli függvényét normálalakban a $z$ tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!

3.2 Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés-válasz stabilitását!

3.3 Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \ldots, 5$-re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!

3.4 Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$ !

3.5 Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!

3.6 A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4 feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$ ütemre!

3.7 (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!

3.8 (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!

### 1.1. rész

$$x_1[k+1] = b \cdot c \cdot x_1[k] + b \cdot e \cdot f \cdot x_1[k] + f \cdot x_2[k] + u[k]$$

$$x_2[k+1] = b \cdot x_1[k]$$

$$x_3[k+1] = b \cdot e \cdot x_1[k] + x_2[k]$$

$$y[k] = b \cdot d \cdot x_1[k] + b \cdot e \cdot g \cdot x_1[k] + b \cdot c \cdot a \cdot x_1[k] + b \cdot e \cdot f \cdot a \cdot x_1[k] + f \cdot a \cdot x_2[k] + g \cdot x_2[k] + 1 \cdot x_3[k] + a \cdot u[k]$$

Az állapotváltozós leírás a megadott adatsorral:

$$x_1[k+1] = 1{,}6 \cdot x_1[k] - 1 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 1 \cdot u[k]$$

$$x_2[k+1] = -0.8 \cdot x_1[k] + 0 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$x_3[k+1] = -0{,}96 \cdot x_1[k] + 1 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$y[k] = 1{,}472 \cdot x_1[k] - 0{,}1 \cdot x_2[k] + x_3[k] + 0{,}9 \cdot u[k]$$

Ezek alapján

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & -1 & 0 \\ -0{,}8 & 0 & 0 \\ -0{,}96 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1{,}472 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = 0{,}9$$

### 1.2 rész

Sajátértékek meghatározása MATLAB segítségével:

```
A=[1.6 -1 0;-0.8 0 0;-0.96 1 0]
la=eig(A)
```

Sajátértékek:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -0{,}4 \qquad \lambda_3 = 2$$

$\lambda_3$ nem az egységkörön belül van→ Nem asszimptotikusan stabilis → Nem G-V stabilis

Új paraméterek: b legyen $-0{,}8$ helyett 0,8, f legyen $-1$ helyett 0,5

Így az állapotváltozós leírás:

$$x_1[k+1] = -0{,}16 \cdot x_1[k] + 0{,}5 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 1 \cdot u[k]$$

$$x_2[k+1] = 0{,}8 \cdot x_1[k] + 0 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$x_3[k+1] = 0{,}96 \cdot x_1[k] + 1 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$y[k] = -0{,}176 \cdot x_1[k] + 1{,}25 \cdot x_2[k] + 1 \cdot x_3[k] + 0{,}9 \cdot u[k]$$

Ezek alapján

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}16 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}96 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -0{,}176 & 1{,}25 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = 0{,}9$$

Sajátértékek meghatározása MATLAB segítségével:

```
A=[-0.16 0.5 0;0.8 0 0;0.96 1 0]
la=eig(A)
```

Sajátértékek:

$\lambda_1 = 0{,}5575$ $\lambda_2 = -0{,}7175$ $\lambda_3 = 0$

Minden sajátérték az egységkörön belül helyezkedik el → a rendszer G-V stabil

### 1.3 rész

Az impulzusválasz első 10 ütembeli értéke az állapotváltozós leírás alapján:

| k | u[k] | x1[k] | x2[k] | x3[k] | y[k] |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,9 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -0,17600 |
| 2 | 0 | -0,16 | 0,8 | 0,96 | 1,98816 |
| 3 | 0 | 0,4256 | -0,12800 | 0,64640 | 0,41149 |
| 4 | 0 | -0,13210 | 0,34048 | 0,28058 | 0,72942 |
| 5 | 0 | 0,19138 | -0,10568 | 0,21367 | 0,04789 |
| 6 | 0 | -0,08346 | 0,5310 | 0,07804 | 0,28411 |
| 7 | 0 | 0,08990 | -0,06677 | 0,07298 | -0,02630 |
| 8 | 0 | -0,04777 | 0,07192 | 0,01954 | 0,11785 |
| 9 | 0 | 0,04360 | -0,03821 | 0,02607 | -0,02938 |
| 10 | 0 | -0,02608 | 0,03488 | 0,00365 | 0,05184 |

Az impulzusválasz analitikus alakja:

$$h[k] = D \cdot \delta[k] + C \cdot B \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot C \cdot \left\{L_1 \cdot \lambda_1^{k-1} + L_2 \cdot \lambda_2^{k-2}\right\} \cdot B$$

$$h[k] = D \cdot \delta[k] + C \cdot B \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \left\{K_1 \cdot \lambda_1^{k-1} + K_2 \cdot \lambda_2^{k-2}\right\} \qquad \left(L_i = \prod_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{3} \frac{A-\lambda_p \cdot E}{\lambda_i - \lambda_p}\right)$$

$K_1$ és $K_2$ kiszámítása MATLAB segítségével:

```
A=[-0.16 0.5 0;0.8 0 0;0.96 1 0]
B=[1;0;0]
C=[-0.176 1.25 1]
D=0.9
la=eig(A)
la1=la(2,1)                    // la (sajátérték vektor) 2. sor 1. oszlop
la2=la(3,1)                    // la (sajátérték vektor) 3. sor 1. oszlop
L1=(A/la1)*(A-eye(3)*la2)/(la1-la2)          //eye(3): 3x3-as egységmátrix
L2=(A/la2)*(A-eye(3)*la1)/(la2-la1)
K1=C*L1*B*la1
K2=C*L2*B*la2
```

Kapott eredmények:

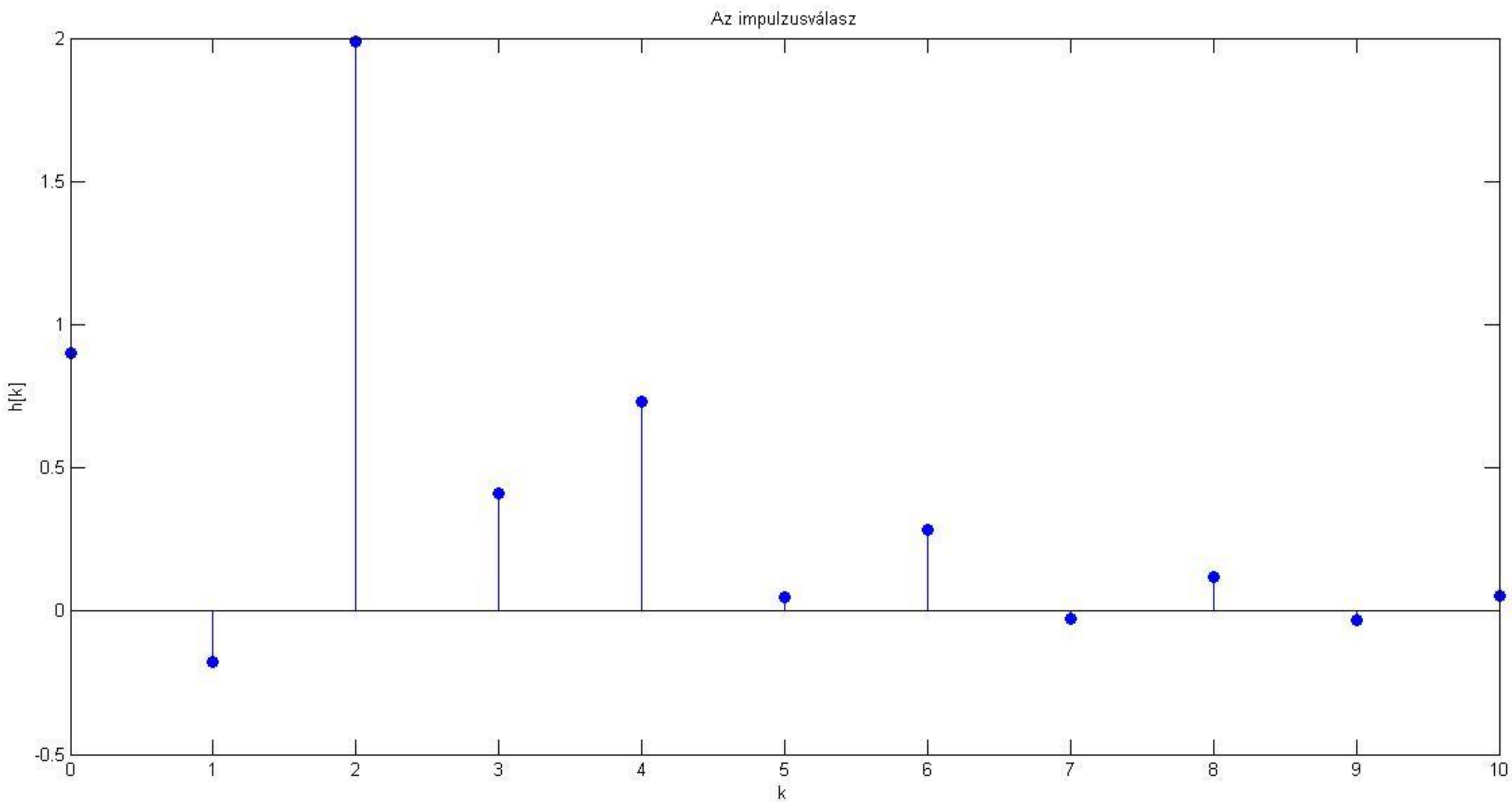
$K1 = 1{,}4416$ $K2 = 0{,}5466$

$\lambda_1 = 0{,}5575$ $\lambda_2 = -0{,}7175$ $C \cdot B = -0{,}176$

$$h[k] = 0{,}9 \cdot \delta[k] - 0{,}176 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \{1{,}4416 \cdot 0{,}5575^{k-2} + 0{,}5466 \cdot (-0{,}7175)^{k-2}\}$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
k=0:10;
h=(1.4416*0.5575.^(k-2)+0.5466*(-0.7175).^(k-2))
h(1)=0.9                 // 0,9 · δ[k] beillesztése
h(2)=-0.176              // −0,032 · δ[k − 1] beillesztése
stem(k,h,'fill')
xlabel('k')
ylabel('h[k]')
title('Impulzusválasz')
```


Az impulzusválasz
h[k]
k
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

## 1.4. rész

Gerjesztés: $\mathrm{u}[k] = \varepsilon[k] \cdot \left(-7{,}5 + 5{,}5 \cdot (-0{,}8)^k\right)$

$y[k] = ?$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{u}[i] \cdot h[k-i]$$

Mivel a gerjesztés belépő és a rendszer kauzális, ezért elég 0-tól k-ig összegezni.

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{u}[i] \cdot h[k-i]$$

| k | u[k] | h[k] | y[k] |
|---|---|---|---|
| 0 | -2 | 0,9 | -1,8 |
| 1 | -11,9 | -0,176 | -10,358 |
| 2 | -3,98 | 1,988 | -5,4636 |
| 3 | -10,316 | 0,411 | -33,06312 |
| 4 | -5,2472 | 0,73 | -17,16 |
| 5 | -9,302 | 0,0479 | -38,375 |

$\boldsymbol{k = 0}$

$$y[0] = \mathrm{u}[0] \cdot h[0] = -2 \cdot 0{,}9 = -1{,}8$$

$\boldsymbol{k = 1}$

$$y[1] = \mathrm{u}[0] \cdot h[1] + \mathrm{u}[1] \cdot h[0] = -2 \cdot (-0{,}176) + (-11{,}9) \cdot 0{,}9 = -10{,}358$$

$\boldsymbol{k = 2}$

$$y[2] = \mathrm{u}[0] \cdot h[2] + \mathrm{u}[1] \cdot h[1] + \mathrm{u}[2] \cdot h[0] =$$

$$= -2 \cdot 1{,}988 + (-11{,}9) \cdot (-0{,}176) + (-3{,}98) \cdot 0{,}9 = -5{,}4636$$

$\boldsymbol{k = 3}$

$$y[3] = \mathrm{u}[0] \cdot h[3] + \mathrm{u}[1] \cdot h[2] + \mathrm{u}[2] \cdot h[1] + \mathrm{u}[3] \cdot h[0] =$$

$$= -2 \cdot 0{,}411 + (-11{,}9) \cdot 1{,}988 + (-3{,}98) \cdot (-0{,}176) + (-10{,}316) \cdot 0{,}9 = -33{,}06312$$

$\boldsymbol{k = 4}$

$$y[4] = \mathrm{u}[0] \cdot h[4] + \mathrm{u}[1] \cdot h[3] + \mathrm{u}[2] \cdot h[2] + \mathrm{u}[3] \cdot h[1] + \mathrm{u}[4] \cdot h[0] =$$

$$= -2 \cdot 0{,}73 + (-11{,}9) \cdot 0{,}411 + (-3{,}98) \cdot 1{,}988 + (-10{,}316) \cdot (-0{,}176) + (-5{,}2472) \cdot 0{,}9 = -17{,}16$$

$\boldsymbol{k = 5}$

$$y[5] = \mathrm{u}[0] \cdot h[5] + \mathrm{u}[1] \cdot h[4] + \mathrm{u}[2] \cdot h[3] + \mathrm{u}[3] \cdot h[2] + \mathrm{u}[4] \cdot h[1] + \mathrm{u}[5] \cdot h[0] =$$

$$= -2 \cdot 0{,}0479 + (-11{,}9) \cdot 0{,}73 + (-3{,}98) \cdot 0{,}411 + (-10{,}316) \cdot 1{,}988 + (-5{,}2472) \cdot (-0{,}176) + (-9{,}302) \cdot 0{,}9 = -38{,}375$$

## 2.1. rész

MATLAB kód: [szam,nev]=ss2tf(A,B,C,D)

$$szam = [0{,}9000 \quad -0{,}032 \quad 1{,}6 \quad 0{,}8]$$

$$nev = [1 \quad 0{,}16 \quad -0{,}4 \quad 0]$$

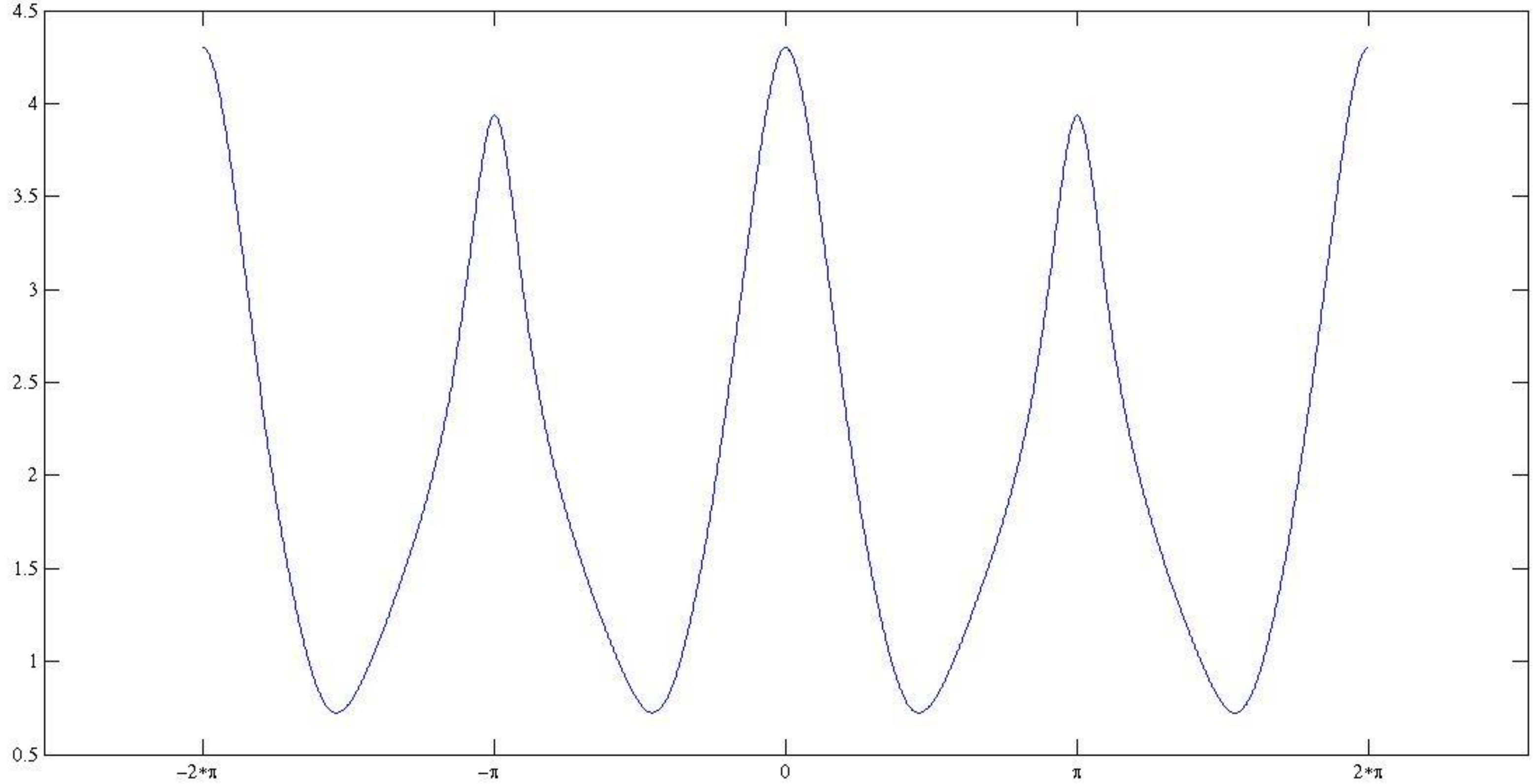
Tehát az átviteli karakterisztika:

$$H\left(e^{j\cdot\vartheta}\right) = \frac{0{,}9\cdot e^{j\cdot 3\cdot\vartheta} - 0.032\cdot e^{j\cdot 2\cdot\vartheta} + 1{,}6\cdot e^{j\cdot\vartheta} + 0{,}8}{1\cdot e^{j\cdot 3\cdot\vartheta} + 0{,}16\cdot e^{j\cdot 2\cdot\vartheta} - 0{,}4\cdot e^{j\cdot\vartheta}}$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
te=-2*pi:0.01:2*pi;
Hejt=(0.9*exp(i*3*te)-0.032*exp(i*2*te)+1.6*exp(i*te)+0.8)./(1*exp(i*3*te)+
0.16*exp(i*2*te)-0.4*exp(i*te));
absH=abs(Hejt);
plot(te,absH);
title('Amplitúdó karakterisztika');
set(gca,'XTick',-2*pi:pi:2*pi);
set (gca,'FontName','Symbol');
set(gca,'XTickLabel',{'-2*p','-p','0','p','2*p'});
```

Az átviteli karakterisztika



## 2.2. rész

$$\mathrm{u}[k] = U \cdot \cos(\vartheta_0 \cdot k + \rho) = 15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{23} \cdot k - \frac{\pi}{7}\right) \quad \rightarrow \quad \overline{U} = 15 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{7}}$$

$$\overline{H} = H\left(e^{j \cdot \vartheta}\right)\Big|_{\vartheta = \frac{\pi}{23}} = 3{,}9079 \; - \; 1{,}3999 \cdot j = 4{,}1511 \cdot e^{-j \cdot 0{,}344}$$

$$\overline{Y_g} = \overline{U} \cdot \overline{H} = 62{,}267 \cdot e^{-j \cdot 0{,}793}$$

$$y_g[k] = 62{,}267 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{23} \cdot k - 0{,}793\right)$$

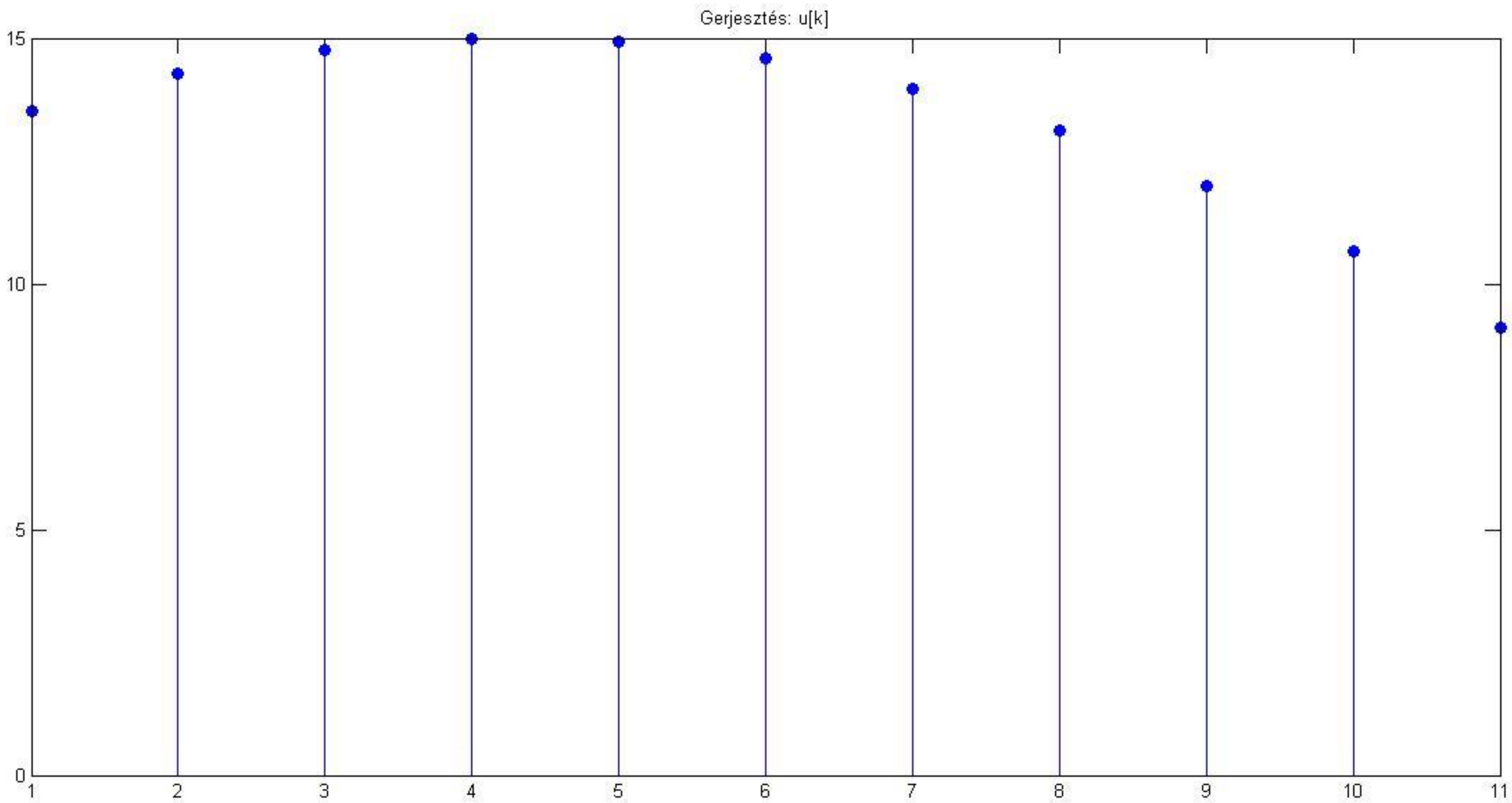
A jelek periodikusak, periódus: $L = 46$, mert $\vartheta_0 = \frac{\pi}{23} = \frac{2 \cdot \pi}{L}$, ahol $L$ a periódus

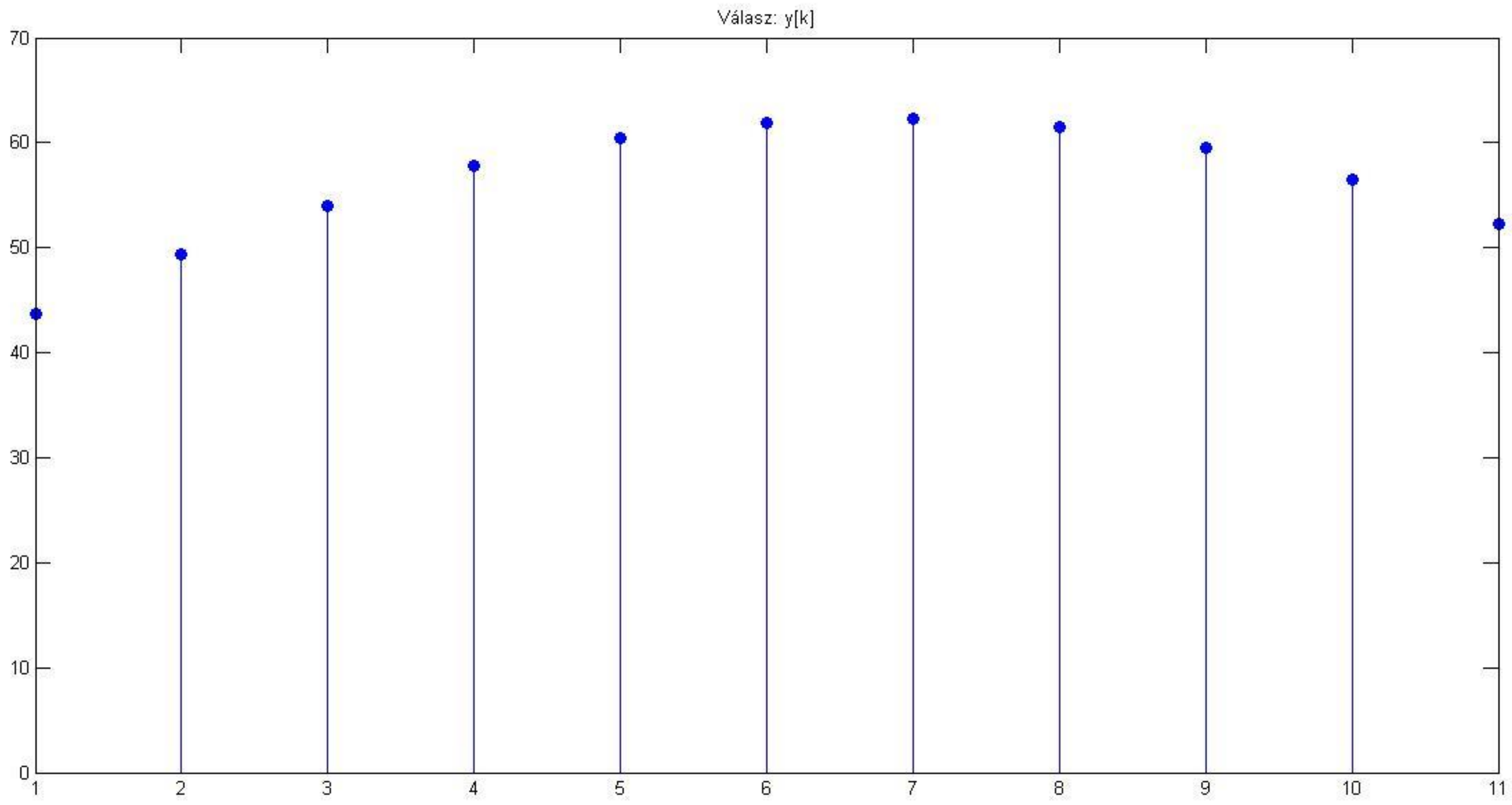
Az $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer G-V stabilis.

Ábrázolása MATLAB segítségével:

```
k=0:10;
u=15*cos(pi/23*k-pi/7)
stem(u,'fill');
title('Gerjesztés: u[k]')

y=62.267*cos(pi/23*k-0.793);
stem(y,'fill');
title('Válasz: y[k]')
```


Gerjesztés: u[k]
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11



Válasz: y[k]
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

## 2.3. rész

A periodikus jel értékei

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 | 6 | 4 | 2 | -1 | 1 |

$$L = 6 \qquad \vartheta_0 = \frac{2\cdot\pi}{L} = \frac{\pi}{3}$$

Fourier-sorfejtés: $X_p^c = \frac{1}{L}\cdot\sum_{k=0}^{L-1}\left(x[k]\cdot e^{-j\cdot k\cdot p\cdot\vartheta_0}\right)$

$$X_0^c = \frac{1}{6}\cdot(8+6+4+2-1+1) = \frac{20}{6}$$

$$X_1^c = \frac{1}{6}\cdot\left(8+6\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{3}}+4\cdot e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}+2\cdot e^{-j\cdot\pi}-1\cdot e^{-j\cdot\frac{4\cdot\pi}{3}}+1\cdot e^{-j\cdot\frac{5\cdot\pi}{3}}\right) = \frac{4}{3}-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot j = 1{,}965\cdot e^{-j\cdot 0{,}0825}$$

$$X_2^c = \frac{1}{6}\cdot\left(8+6\cdot e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}+4\cdot e^{-j\cdot\frac{4\cdot\pi}{3}}+2\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi}-1\cdot e^{-j\cdot\frac{8\cdot\pi}{3}}+1\cdot e^{-j\cdot\frac{10\cdot\pi}{3}}\right) = \frac{5}{6}$$

$$X_3^c = \frac{1}{6}\cdot(8+6\cdot e^{-j\cdot\pi}+4\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi}+2\cdot e^{-j\cdot 3\cdot\pi}-1\cdot e^{-j\cdot 4\cdot\pi}+1\cdot e^{-j\cdot 5\cdot\pi}) = \frac{1}{3}$$

$$X_4^c = X_2^{c*} = \frac{5}{6}$$

$$X_5^c = X_1^{c*} = \frac{4}{3}+\frac{5\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot j = 1{,}965\cdot e^{j\cdot 0{,}0825}$$

Komplex alak:

$$u[k] = \frac{20}{6}+\left(\frac{4}{3}-j\cdot\frac{5\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\cdot e^{j\cdot k\cdot\frac{\pi}{3}}+\frac{5}{6}\cdot e^{j\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}+\frac{1}{3}\cdot e^{j\cdot k\cdot\pi}+\frac{5}{6}\cdot e^{j\cdot k\cdot\frac{4\cdot\pi}{3}}+\left(\frac{4}{3}+j\cdot\frac{5\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\cdot e^{j\cdot k\cdot\frac{5\cdot\pi}{3}}$$

Valós alak:

$$X_0 = X_0^c$$

$X_p^A = 2\cdot Re\{X_p^C\}$ és $X_p^B = -2\cdot Im\{X_p^C\}$, ahol $0 < p < \frac{L}{2} = 3$

$$X_3^A = X_3^c \quad X_3^B = 0 \qquad \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$x[k] = X_0+\sum_{p=1}^{3}\left(X_p^A\cdot\cos(p\cdot k\cdot\vartheta_0)+X_p^B\cdot\sin(p\cdot k\cdot\vartheta_0)\right)$$

$$u[k] = \frac{20}{6}+\frac{8}{3}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{3}\cdot\cos\left(2\cdot k\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\cos(k\cdot\pi)$$

Ellenőrzés MATLAB segítségével:

```
k=0:5
```

Valós alakra

```
x1=20/6+(4/3-j*5/6*sqrt(3))*exp(j*k*pi/3)+5/6*exp(j*k*2*pi/3)+1/3*exp(j*k*pi)
+5/6*exp(j*k*4*pi/3)+(4/3+j*5/6*sqrt(3))*exp(j*k*5/3*pi)
```

Komplex alakra

```
x2=20/6+(8/3)*cos(k*pi/3)+(5/3*sqrt(3))*sin(k*pi/3)+(5/3)*cos(k*2*pi/3)+(1/3)*cos(k*pi)
```

## 2.4. rész

$$u[k] = \frac{20}{6} + \frac{8}{3} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{3} \cdot \cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Használjuk a következő azonosságot:

$a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) = k \cdot sin(x + \varphi)$, ahol

$k = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\sin(\varphi) = \frac{b}{k}$

Ez alapján: $u[k] = \frac{20}{6} + 3{,}29 \cdot cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} + 1{,}07\right) + \frac{5}{3} \cdot cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot cos(k \cdot \pi)$

$$H\left(e^{j \cdot \vartheta}\right) = \frac{0{,}9 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot \vartheta} - 0.032 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \vartheta} + 1{,}6 \cdot e^{j \cdot \vartheta} + 0{,}8}{1 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot \vartheta} + 0{,}16 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \vartheta} - 0{,}4 \cdot e^{j \cdot \vartheta}}$$

$\bar{Y}_p = \bar{U}_p \cdot \bar{H}_p$, ahol $\bar{H}_p = H\left(e^{j \cdot \vartheta_p}\right)$

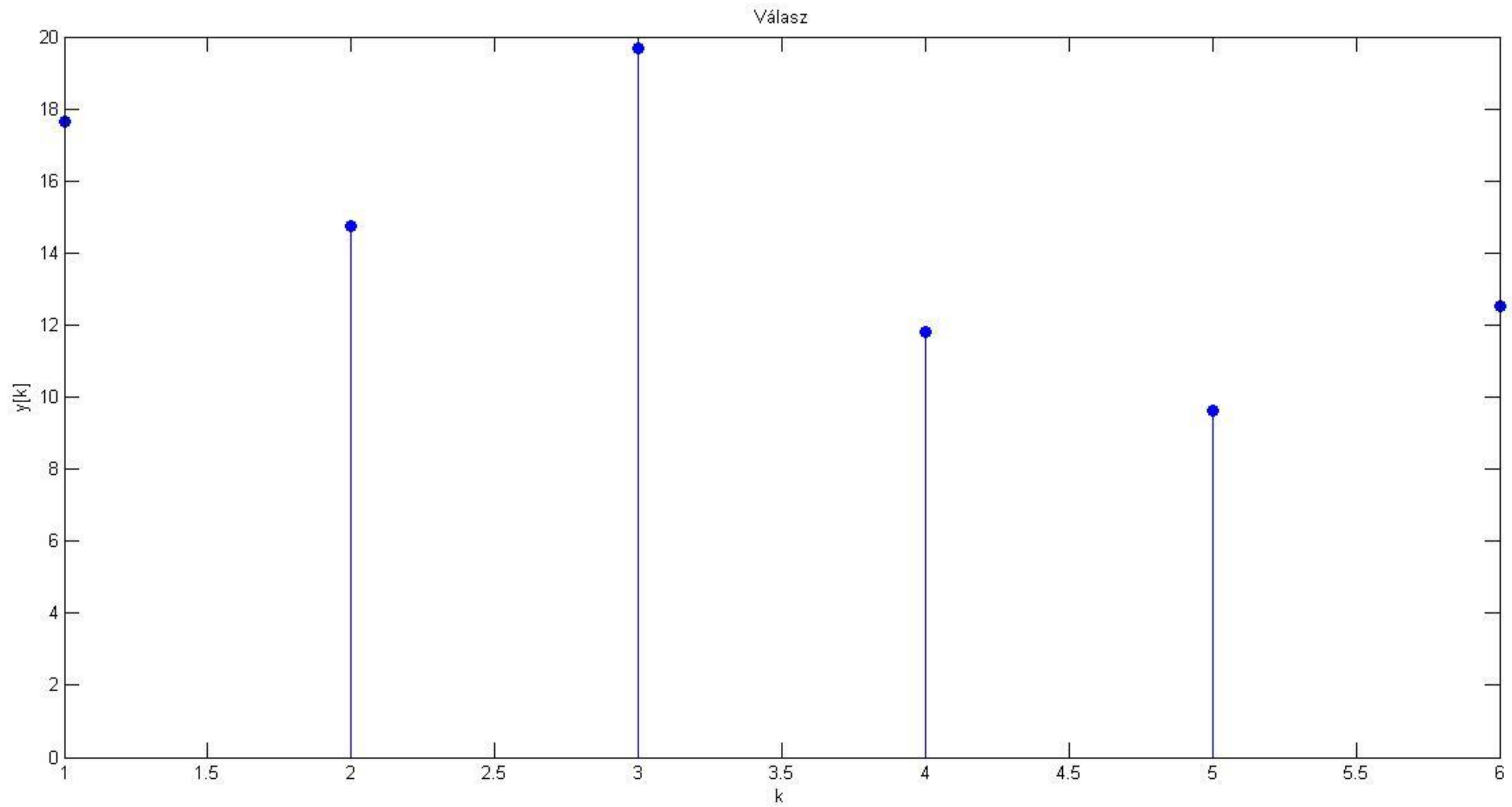
| p | $\vartheta_p$ | $\bar{U}_p$ | $\bar{H}_p$ | $\bar{Y}_p$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $0$ | $\frac{20}{6}$ | $4{,}3$ | $14{,}333$ |
| 1 | $\frac{\pi}{3}$ | $3{,}29 \cdot e^{j \cdot 1{,}07}$ | $1{,}184 \cdot e^{-j \cdot 2{,}217}$ | $3{,}895 \cdot e^{-j \cdot 1{,}147}$ |
| 2 | $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $1{,}38 \cdot e^{j \cdot 1{,}4044}$ | $2{,}3 \cdot e^{j \cdot 1{,}4044}$ |
| 3 | $\pi$ | $\frac{1}{3}$ | $3{,}9364$ | $1{,}312$ |

Válasz:

$$y[k] = 14{,}333 + 3{,}895 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} - 1{,}147\right) + 2{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3} + 1{,}4044\right) + 1{,}312 \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
k=0:5;
yk=14.333+3.895*cos(k*pi/3-1.147)+2.3*cos(2*k*pi/3+1.4044)+1.312*cos(k*pi);
stem(yk,'fill');
ylabel('y[k]');
xlabel('k');
title('Válasz');
```


Válasz
y[k]
k
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6

## 2.5. rész

$$h[k] = 0{,}9 \cdot \delta[k] - 0{,}176 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \{1{,}4416 \cdot 0{,}5575^{k-2} + 0{,}5466 \cdot (-0{,}7175)^{k-2}\}$$

Ennek Fourier-transzformáltja:

$$H(e^{j\cdot\vartheta}) = 0{,}9 - 0176 \cdot e^{-j\cdot\vartheta} + \frac{1{,}4416 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}}{1-0{,}5575 \cdot e^{-j\cdot\vartheta}} + \frac{0{,}5466 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}}{1+0{,}7175 \cdot e^{-j\cdot\vartheta}} = \cdots = \frac{0{,}9 \cdot e^{j\cdot 3\cdot\vartheta} - 0.032 \cdot e^{j\cdot 2\cdot\vartheta} + 1{,}6 \cdot e^{j\cdot\vartheta} + 0{,}8}{1 \cdot e^{j\cdot 3\cdot\vartheta} + 0{,}16 \cdot e^{j\cdot 2\cdot\vartheta} - 0{,}4 \cdot e^{j\cdot\vartheta}}$$

Ez megegyezik a 2.1. részben kapott átviteli karakterisztikával.

## 2.6. rész

$$H(e^{j\cdot\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}9 \cdot e^{j\cdot 3\cdot\vartheta} - 0.032 \cdot e^{j\cdot 2\cdot\vartheta} + 1{,}6 \cdot e^{j\cdot\vartheta} + 0{,}8}{1 \cdot e^{j\cdot 3\cdot\vartheta} + 0{,}16 \cdot e^{j\cdot 2\cdot\vartheta} - 0{,}4 \cdot e^{j\cdot\vartheta}}$$

Osztás $e^{j\cdot 3\cdot\vartheta}$-val, hogy negatív kitevőket kapjunk.

$$H(e^{j\cdot\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}9 - 0.032 \cdot e^{-j\cdot\vartheta} + 1{,}6 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta} + 0{,}8 \cdot e^{-j\cdot 3\cdot\vartheta}}{1 + 0{,}16 \cdot e^{-j\cdot\vartheta} - 0{,}4 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}}$$

$$\overline{Y} \cdot \left(1 + 0{,}16 \cdot e^{-j\cdot\vartheta} - 0{,}4 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta}\right) = \overline{U} \cdot (0{,}9 - 0{,}032 \cdot e^{-j\cdot\vartheta} + 1{,}6 \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\vartheta} + 0{,}8 \cdot e^{-j\cdot 3\cdot\vartheta})$$

$e^{-j\cdot k\cdot\vartheta}$-ás szorzó k-val való időbeli eltolást jelent, vagyis a hálózat rendszeregyenlete:

$$y[k] + 0{,}16 \cdot y[k-1] - 0{,}4 \cdot y[k-2] = 0{,}9 \cdot u[k] - 0{,}032 \cdot u[k-1] + 1{,}6 \cdot u[k-2] + 0{,}8 \cdot u[k-3]$$

## 3.1. rész

z-tartománybeli egyenletek:

$$z \cdot X_1 = -0{,}16 \cdot X_1 + 0{,}5 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot U$$

$$z \cdot X_2 = 0{,}8 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot U$$

$$z \cdot X_3 = 0{,}96 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot U$$

$$Y = -0{,}176 \cdot X_1 + 1{,}25 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 + 0{,}9 \cdot U$$

Ebből:

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}16 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}96 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = (-0{,}176 \quad 1{,}25 \quad 1) \qquad D = 0{,}9$$

MATLAB kód:

```
[szam,nev]=ss2tf(A,B,C,D)
```

$$szam = [0{,}9 \quad -0{,}032 \quad 1{,}6 \quad 0{,}8]$$

$$nev = [1 \quad 0{,}16 \quad -0{,}4 \quad 0]$$

Tehát:

$$H(z) = \frac{0{,}9 - 0{,}032 \cdot z^{-1} + 1{,}6 \cdot z^{-2} + 0{,}8 \cdot z^{-3}}{1 + 0{,}16 \cdot z^{-1} - 0{,}4 \cdot z^{-2}} = H(e^{j\cdot\vartheta})\Big|_{e^{j\cdot\vartheta} = z}$$

### 3.2. rész

Pólusok: Ahol a nevező nulla

Kiszámításuk MATLAB segítségével:

```
roots(nev);
```

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = -0{,}7175$$
$$p_3 = \ 0{,}5575$$

Zérusok : ahol a számláló nulla

Kiszámításuk MATLAB segítségével:

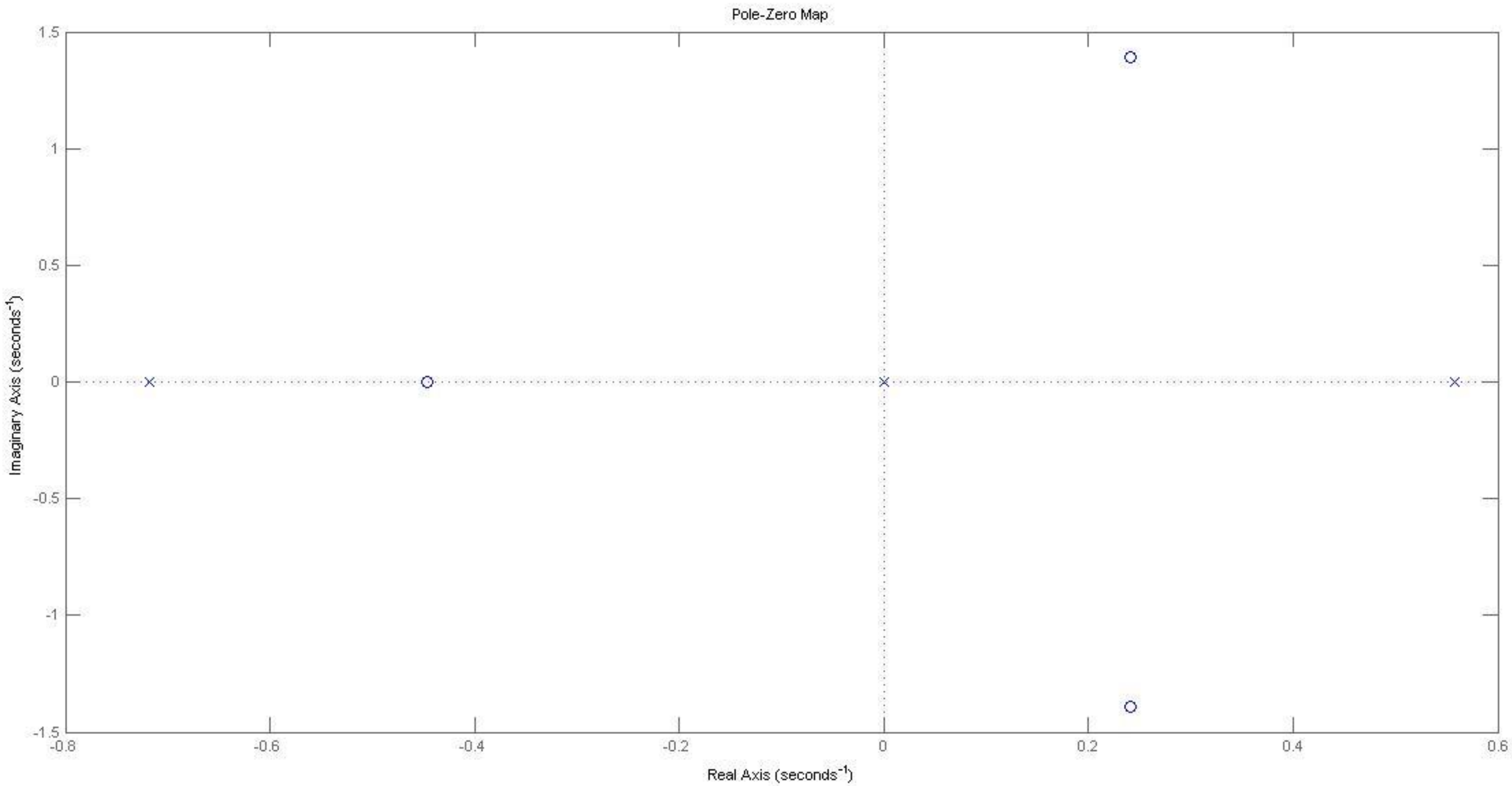
```
roots(szam);
```

$$z_1 = 0{,}2408 \ + \ 1{,}3909 \cdot j$$
$$z_2 = 0{,}2408 \ - \ 1{,}3909 \cdot j$$
$$z_3 = -0{,}4461$$

A pólusok az egységkörön belül helyezkednek el, ezért a hálózat G-V stabil.

Ábrázolása MATLAB segítségével:

```
pzmap(szam,nev);
```


Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds$^{-1}$)
Real Axis (seconds$^{-1}$)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

### 3.3. rész

$$H(z) = \frac{0{,}9 \cdot z^3 - 0{,}032 \cdot z^2 + 1{,}6 \cdot z + 0{,}8}{1 \cdot z^3 + 0{,}16 \cdot z^2 - 0{,}4 \cdot z}$$

Nevezőből kiemelve $z$-t: $\quad H(z) = z^{-1} \cdot \frac{0{,}9 \cdot z^3 - 0{,}032 \cdot z^2 + 1{,}6 \cdot z + 0{,}8}{1 \cdot z^2 + 0{,}16 \cdot z - 0{,}4}$

Részlettörtekre bontás MAPLE segítségével:

```
[r,p,k]=residue([0.9 -0.032 1.6 0.8],[0 1 0.16 -0.4])
```

$$r = [0{,}5466 \quad 1{,}4416]$$

$$p = [-0{,}7175 \quad 0{,}5575]$$

$$k = [0.9 \quad -0{,}176]$$

Ennek alapján: $\quad H(z) = z \cdot z^{-2} \cdot \left(0{,}9 \cdot z - 0{,}176 + \frac{0{,}5466}{z-(-0{,}7175)} + \frac{1{,}4416}{z-0{,}5575}\right)$

$$H(z) = 0{,}9 - 0{,}176 \cdot z^{-1} + z^{-2} \cdot \left(\frac{0{,}5466}{z-(-0{,}7175)} \cdot z + \frac{1{,}4416}{z-0{,}5575} \cdot z\right)$$

Így már tagonként transzformálható:

$$h[k] = 0{,}9 \cdot \delta[k] - 0{,}176 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \{0{,}5466 \cdot (-0{,}7175)^{k-2} + 1{,}4416 \cdot 0{,}5575^{k-2}\}$$

Megegyezik az 1.3-as feladatban kapott eredménnyel.

Ellenőrzés polinom-osztással:

$$(0{,}9 - 0{,}032 \cdot z^{-1} + 1{,}6 \cdot z^{-2} + 0{,}8 \cdot z^{-3}) : (1 + 0{,}16 \cdot z^{-1} - 0{,}4 \cdot z^{-2}) = 0{,}9 - 0{,}176 \cdot z^{-1} + 1{,}988 \cdot z^{-2} + 0{,}412 \cdot z^{-3} + 0{,}73 \cdot z^{-4} + 0{,}048 \cdot z^{-5}$$

$$\begin{array}{llllllll}
0{,}9 & +\,0{,}144 \cdot z^{-1} & -\,0{,}36 \cdot z^{-2} & & & & & \\ \hline
0 & -\,0{,}176 \cdot z^{-1} & +\,1{,}96 \cdot z^{-2} & +\,0{,}8 \cdot z^{-3} & & & & \\
 & -\,0{,}176 \cdot z^{-1} & -\,0{,}02816 \cdot z^{-2} & +\,0{,}0704 \cdot z^{-3} & & & & \\ \hline
 & 0 & +\,1{,}98816 \cdot z^{-2} & +\,0{,}7296 \cdot z^{-3} & & & & \\
 & & 1{,}98816 \cdot z^{-2} & +\,0{,}3181 \cdot z^{-3} & -\,0{,}7952 \cdot z^{-4} & & & \\ \hline
 & & 0 & +\,0{,}4115 \cdot z^{-3} & +\,0{,}7952 \cdot z^{-4} & & & \\
 & & & 0{,}4115 \cdot z^{-3} & +\,0{,}0658 \cdot z^{-4} & -\,0{,}1646 \cdot z^{-5} & & \\ \hline
 & & & 0 & +\,0{,}7294 \cdot z^{-4} & +\,0{,}1646 \cdot z^{-5} & & \\
 & & & & 0{,}7294 \cdot z^{-4} & +\,0{,}116704 \cdot z^{-5} & -\,0{,}223 \cdot z^{-6} & \\ \hline
 & & & & 0 & -\,0{,}047896 \cdot z^{-5} & +\,0{,}29176 \cdot z^{-6} & \ldots
\end{array}$$

A kapott eredmény inverz z-transzformálásával kapjuk a választ:

$$h[k] = 0{,}9 \cdot \delta[k] - 0{,}176 \cdot \delta[k-1] + 1{,}988 \cdot \delta[k-2] + 0{,}412 \cdot \delta[k-3] + 0{,}73 \cdot \delta[k-4] - 0{,}048 \cdot \delta[k-5] \ldots$$

### 3.4. rész

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot \left(-7{,}5 + 5{,}5 \cdot (-0{,}8)^k\right)$$

$$Z\{u[k]\} = \frac{-7{,}5 \cdot z}{z-1} + \frac{5{,}5 \cdot z}{z-(-0{,}8)} = U(z)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z)$$

$$H(z) = \frac{0{,}9 \cdot z^3 - 0{,}032 \cdot z^2 + 1{,}6 \cdot z + 0{,}8}{1 \cdot z^3 + 0{,}16 \cdot z^2 - 0{,}4 \cdot z}$$

$$U(z) = \frac{-7{,}5 \cdot z \cdot (z+0{,}8) + 5{,}5 \cdot z \cdot (z-1)}{(z-1) \cdot (z+0{,}8)} = \frac{-2 \cdot z^2 - 11{,}5 \cdot z}{(z^2 - 0{,}2 \cdot z - 0{,}8)}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{-1{,}8 \cdot z^5 - 10{,}35 \cdot z^4 - 2{,}814 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 - 9{,}2 \cdot z}{z^5 - 0{,}04 \cdot z^4 - 1{,}232 \cdot z^3 - 0{,}048 \cdot z^2 + 0{,}32 \cdot z}$$

Részlettörtekre bontás MAPLE segítségével:

```
[r,p,k]=residue([-1.8 -10.286 -2.814 -20 -9.2],[1 -0.04 -1.232 -0.048 0.32])
```

$$r = [-32{,}2368 \quad -47{,}2629 \quad 38{,}8752 \quad 30{,}2665]$$

$$p = [1 \quad -0{,}8 \quad -0{,}7175 \quad 0{,}5575]$$

$$k = [\,-1.8\,]$$

Ennek alapján:

$$Y(z) = -1{,}8 - \frac{32{,}24}{z-1} - \frac{47{,}26}{z+0{,}8} + \frac{38{,}88}{z+0{,}7175} + \frac{30{,}27}{z-0{,}5575} =$$

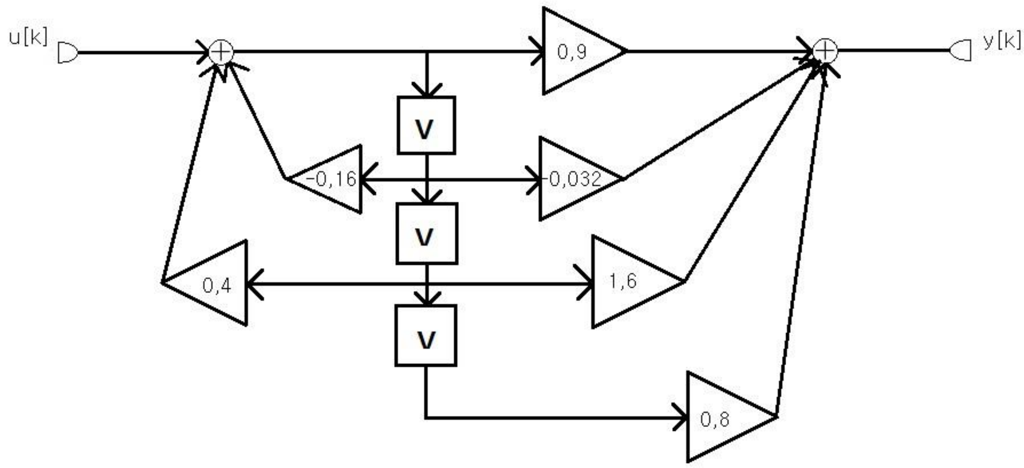
$$= -1{,}8 + z^{-1} \cdot \left(-\frac{32{,}24}{z-1} \cdot z - \frac{47{,}26}{z+0{,}8} \cdot z + \frac{38{,}88}{z+0{,}7175} \cdot z + \frac{30{,}27}{z-0{,}5575} \cdot z\right)$$

$$y[k] = Z^{-1}\{Y(z)\} =$$

$$= -1{,}8 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot (-32{,}24 - 47{,}26 \cdot (-0{,}8)^{k-1} + 38{,}88 \cdot (-0{,}7175)^{k-1} + 30{,}27 \cdot 0{,}5575^{k-1})$$

### 3.5. rész

$$H(z) = \frac{0{,}9 - 0{,}032 \cdot z^{-1} + 1{,}6 \cdot z^{-2} + 0{,}8 \cdot z^{-3}}{1 + 0{,}16 \cdot z^{-1} - 0{,}4 \cdot z^{-2}}$$




Rendszeregyenlet:

$$y[k] + 0{,}16 \cdot y[k-1] - 0{,}4 \cdot y[k-2] = 0{,}9 \cdot u[k] - 0{,}032 \cdot u[k-1] + 1{,}6 \cdot u[k-2] + 0{,}8 \cdot u[k-3]$$

### 3.6. rész

Gerjesztés

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot \left(-7{,}5 + 5{,}5 \cdot (-0{,}8)^k\right)$$

A válasz analitikus alakja

$$y[k] = -1{,}8 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot (-32{,}24 - 47{,}26 \cdot (-0{,}8)^{k-1} + 38{,}88 \cdot (-0{,}7175)^{k-1} + 30{,}27 \cdot 0{,}5575^{k-1})$$

Rendszeregyenlet

$$y[k] + 0{,}16 \cdot y[k-1] - 0{,}4 \cdot y[k-2] = 0{,}9 \cdot u[k] + 0{,}112 \cdot u[k-1] + 1{,}24 \cdot u[k-2] + 0{,}8 \cdot u[k-3]$$

Ellenőrzés

| k | $u[k]$ | $y[k]$ analitikus | $y[k]$ rendszeregyenlet |
|---|---|---|---|
| 0 | -2 | -1,8 | -1,8 |
| 1 | -11,9 | -10.35 | -10,358 |
| 2 | -3,98 | -5,4529 | -5,46392 |
| 3 | -10,316 | -33,0626 | -33,0660128 |
| 4 | -5,2472 | -17,1591 | -17,17537395 |
| 5 | -9,3 | -38,3694 | -38,37003489 |
| 6 | -6,06 | -22,5169 | -22,535664 |
| 7 | -8,65 | -38,4154 | -38,41114772 |
| 8 | -6.577 | -25,6283 | -25,64698197 |