

Kombinatorika és valószínűségszámítás - válogatás a nulladik zh-k feladataiból (2015. szeptembertől)

1. Egy 24 fős osztályban kisorsoljuk a *Dűne*, a *Randevú a Rámával* és az *Alapítvány* című könyveket. Egy diák csak egy könyvet kaphat. Hányféle kimenetele lehet a sorsolásnak?
2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan háromjegyű számot készíthetünk, melyben szerepel az 5-ös?
3. Egy dobozban 20 golyó van, amire 1-től 20-ig vannak az egész számok felírva. Találomra kihúzzuk egymás után az összeset. Mi annak a valószínűsége, hogy minden húzásra kisebbet húzunk, mint a következő húzásra? (A 20. húzást leszámítva - azután következő húzás nincs.)
4. A kétjegyű természetes számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a szám kettővel vagy hárommal osztható?
5. Egy hét tagú baráti társaságban asztalitenisz körmérkőzéseket játszanak (mindenki játszik mindenkivel egy meccset). Eddig hat mérkőzést játszottak le. Mi a valószínűsége annak, hogy ha találomra kiválasztunk két játékost, akkor ők ketten még nem játszottak egymással?
6. Mennyi a valószínűsége, hogy három dobókockával dobott szám szorzata páros?
7. Két dobókockával dobunk egyszer. Mi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 a dobott számok összege?
8. Egy dobókockával egymás után dobunk ötször. Mi annak a valószínűsége, hogy az öt dobásból egyetlen egyszer, a negyedik dobásnál dobunk hármast?
9. Egy alaposan összekevert francia kártyapakliból kihúzzunk 5 lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz a pikk dáma? (A francia kártyapakli 52 lapos, pikk a négy „szín” közül az egyik, minden színben 13 lap van, minden színben pontosan egy dáma van.)
10. Ármin, Boró és Cili egy-egy francia kártyapaklit tartanak a kezükben. Mi annak a valószínűsége, hogy ha találomra húznak a paklijaikból, akkor mindhárom diáknak király lesz a kezében? (A francia kártyapakli 52 lapos és egy pakliban négy király van.)
11. Anna, Bia és Csabi egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúznak egy-egy lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy a három gyerek közül pontosan egynél van király? (A magyar kártyában négy király van.)
12. Anna, Berci és Csabi kezében egy-egy 32 lapos magyar kártyapakli van. Mindannyian találomra húznak egy-egy kártyát a saját paklijukból. Mi annak a valószínűsége, hogy Anna és Berci királyt húzott, Csabi viszont nem? (Egy pakliban négy király van.)

Eredmények

$$1. \frac{24!}{21!} \quad 2. 6^3 - 5^3 \quad 3. \frac{1}{20!} \quad 4. \frac{2}{3} \quad 5. \frac{5}{7} \quad 6. \frac{7}{2^3} \quad 7. \frac{5}{18} \quad 8. \frac{5^4}{6^5} \quad 9. \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} \quad 10. \frac{4^3}{52^3} \quad 11. \frac{3 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 30} \quad 12. \frac{4^2 \cdot 28}{32^3}$$

További gyakorló feladatok

13. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre 3 lapot húzunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között legalább egy zöld van?

14. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy totószelvény vaktában kitöltve, az első 13 mérkőzés eredménye közül éppen 8-at találunk el.

15. Mi a valószínűsége, hogy egy lottószelvényt kitöltve pontosan k találatunk lesz ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)? Mi a valószínűsége, hogy legalább 3 találatunk lesz?

16. 200 termék közül 30 selejtes. Találomra kivesszünk 10-et. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak között

- a) nem lesz selejtes;
 b) lesz selejtes;
 c) pontosan két selejtes lesz;
 d) legfeljebb egy selejtes lesz,
 ha visszatevés nélkül választunk?

17. Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy a kiválasztott terméket minden húzás után visszatesszük.

18. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan öt 6-ost dobunk?

19. Egy vendéglő egyik asztalánál ülő 8 vendég 2 sört, 4 süteményt és 2 kávét rendel. A pincér véletlenszerűen teszi a vendégek elé az ételeket. Mi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

20. 20 darab 40 wattos és 30 darab 60 wattos égőből egymás után kivesszünk két darabot anélkül, hogy az elsőt visszatennénk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- a) mindkettő 40 wattos lesz? b) mindkettő 60 wattos lesz?
 c) csak az egyik lesz 40 wattos? d) lesz köztük 40 wattos?

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a mintavételt visszatevéssel végezzük.

Eredmények

$$13. 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}$$

$$14. \frac{\binom{13}{8} \cdot 2^5}{3^{13}} = \binom{13}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$15. P(k \text{ találat}) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

$$P(\text{legalább 3 találat}) = \sum_{k=3}^5 \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

$$16. \text{ a) } \frac{\binom{170}{10}}{\binom{200}{10}} \quad \text{b) } \frac{\binom{200}{10} - \binom{170}{10}}{\binom{200}{10}} \quad \text{c) } \frac{\binom{30}{2} \binom{170}{8}}{\binom{200}{10}} \quad \text{d) } \frac{\binom{170}{10} + \binom{30}{1} \binom{170}{9}}{\binom{200}{10}}$$

$$17. \text{ a) } \frac{30^{10}}{200^{10}} \quad \text{b) } \frac{200^{10} - 30^{10}}{200^{10}} \quad \text{c) } \frac{\binom{10}{2} \cdot 30^2 \cdot 170^8}{200^{10}} \quad \text{d) } \frac{170^{10} + \binom{10}{1} \cdot 30^1 \cdot 170^9}{200^{10}}$$

18. Az összes lehetőségek száma 6^{10} . A kedvező esetek számát így határozhatjuk meg: a 10 hely közül 5-öt $\binom{10}{5}$ -féleképpen választhatunk ki. Erre az 5 helyre 6-osokat írunk, a többi helyre pedig

az 1, 2, 3, 4, 5 számok valamelyikét. Így a keresett valószínűség: $\frac{\binom{10}{5} 5^5}{6^{10}} = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

$$19. \frac{2! \cdot 4! \cdot 2!}{8!}$$

20. Visszatevés nélküli mintavétellel:

$$\text{a) } p_1 = \frac{\binom{20}{2}}{\binom{50}{2}} \approx 0.155 \quad \text{b) } p_2 = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{50}{2}} \approx 0.355 \quad \text{c) } p_3 = \frac{\binom{20}{1} \cdot \binom{30}{1}}{\binom{50}{2}} \approx 0.489$$

$$\text{d) } p_4 = p_1 + p_3 = 1 - p_2$$