

31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!

Az $F_X(x) = Q_X((-\infty, x)) = \mathbf{P}(A = \{\omega: X(\omega) < x\})$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. F_X értéke x -ben az x -hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- 1) F_X monoton nő, azaz $F_X(x) \leq F_X(y)$, ha $x < y$.
- 2) F_X balról folytonos, azaz $\lim_{x \rightarrow y^-} F_X(x) = F_X(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ -re,
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

33. Mi a binomiális eloszlás képlete?

$X \in B(n, p)$

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?

Ha $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ és np állandó, akkor $B(n, p) \rightarrow Po(np)$, vagyis a binomiális eloszlás k -adik tagja tart a Poisson-eloszlás k -adik tagjához.

35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?

A geometriai eloszlás ($X \in G(p)$), mert $\mathbf{P}(X = m+k | X > m) = \mathbf{P}(X = k) \forall k, m$ -re.

36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?

Az exponenciális eloszlás ($X \in E(\lambda)$), mert $\mathbf{P}(X < x+t | X \geq x) = \mathbf{P}(X < x) \forall 0 < x, t$ -re.

37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?

A binomiális eloszlással ($X \in B(n, p)$).

38. Ha $X \in N(m, D)$, akkor milyen eloszlást követ $\frac{X-m}{D}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

39. Ha $Y \in U(0, 1)$, F invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz $F^{-1}(Y)$ eloszlás-függvénye?

$F(y)$, hiszen:

$$\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}(F(F^{-1}(U)) < F(y)) = \mathbf{P}(U < F(y)) = F(y).$$

40. Ha X folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor $F_X(X)$ milyen eloszlású lesz?

Egyenletes eloszlású ($X \in E(\lambda)$).

41. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a < X \leq b) = ?$

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a+0)$$

42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \text{ másrészt } p_i = F_X(x_i+0) - F_X(x_i).$$

Azaz diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, melynek az ugróhelyei az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ helyeken vannak és az ugrás nagysága rendre $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett valószínűségi változó. Az $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az X sűrűségfüggvényének nevezzük, ha X -nek az F_X eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

- 1) $f_X(x) \geq 0$,
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$.

46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in U([a, b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!

$$X \in U([a, b])$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

48. Mi a binomiális eloszlás módusza?

Eloszlás móduszának nevezzük azt a k . tagot, amire p_k a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz $[(n+1)p]$. (Ha egész, akkor a módusz egyenlő $k = (n+1)p - 1$ értékével, így két módusz van.)

49. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $P(a < X < b) = ?$

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a + 0)$$

50. Mi a geometriai eloszlás képlete?

$$X \in G(p)$$

$$p_k = P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1}p$$

51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?

Az X valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis $\forall \omega \in \Omega$ -ra $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?

$$X \in E(\lambda)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?

$$X \in E(\lambda)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?

A tétel szerint $P(X < x + t \mid X \geq x) = P(X < x) \forall 0 < x, t$ -re.

X azért „örökifjú”, mert annak feltételes valószínűsége, hogy X legfeljebb $x + t$ -ig él, (ha már x -et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy X legfeljebb t ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és t között ugyanaz a túlélési esély, mint x és $x + t$ között.

55. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $P(a \leq X \leq b) = ?$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b + 0) - F_X(a)$$

56. Mi a Poisson eloszlás képlete?

$$X \in Po(\lambda)$$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0$$

57. $P(X = a) = ?$

Folytonos esetben $\forall P(X = a) = 0$.

58. Ha $X \in N(0, 1)$, akkor milyen eloszlást követ $aX + b$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

59. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlásfüggvénnyel!

$$F_X(x) = \Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

60. Fejezze ki az $X \in N(m, D)$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűségfüggvénnyel!

$$f_X(X) = \varphi_{m,D}(x) = \frac{1}{D} \varphi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$