31. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját!

Az $F_X(x) = Q_X((-\infty, x)) = \mathbf{P}(A = \{\omega: X(\omega) < x\})$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. F_X értéke x-ben az x-hez tartozó nívóesemény valószínűsége.

32. Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1) F_X monoton nő, azaz $F_X(x) \le F_X(y)$, ha $x < y$.
2) F_X balról folytonos, azaz $\lim_{x\to y-} F_X(x) = F_X(y), \forall y \in \mathbb{R}$-re,
3) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

33. Mi a binomiális eloszlás képlete?

$X \in B(n,p)$

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

34. Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között?

Ha $n \to \infty$, $p \to 0$ és np állandó, akkor $B(n,p) \to Po(np)$, vagyis a binomiális eloszlás k-adik tagja tart a Poisson-eloszlás k-adik tagjához.

35. Melyik az egyetlen diszkrét örökifjú eloszlás?

A geometriai eloszlás ($X \in G(p)$), mert $\mathbf{P}(X = m + k \mid X > m) = \mathbf{P}(X = k)\ \forall k, m$-re.

36. Melyik az egyetlen folytonos örökifjú eloszlás?

Az exponenciális eloszlás ($X \in E(\lambda)$), mert $\mathbf{P}(X < x + t \mid X \ge x) = \mathbf{P}(X < x)\ \forall 0 < x, t$-re.

37. Melyik eloszlással írjuk le a visszatevéses mintavételezést?

A binomiális eloszlással ($X \in B(n,p)$).

38. Ha $X \in N(m, D)$, akkor milyen eloszlást követ $\frac{X-m}{D}$?

$\Phi_{m,D}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$, azaz standard normális eloszlást követ.

39. Ha $Y \in U(0,1)$, F invertálható eloszlásfüggvény, akkor mi lesz $F^{-1}(Y)$ eloszlás-függvénye?

$F(y)$, hiszen:

$$\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}\Big(F\big(F^{-1}(U)\big) < F(y)\Big) = \mathbf{P}\big(U < F(y)\big) = F(y).$$

40. Ha X folytonos valószínűségi változó invertálható eloszlásfüggvénnyel, akkor $F_X(X)$ milyen eloszlású lesz?

Egyenletes eloszlású ($X \in E(\lambda)$).

41. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a < X \le b) = ?$

$\mathbf{P}(a < X \le b) = F_X(b+0) - F_X(a+0)$

42. Milyen függvény a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

Lépcsős.

43. Adja meg a normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

44. Adja meg a sűrűségfüggvény definícióját!

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -n értelmezett valószínűségi változó. Az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az X sűrűségfüggvényének nevezzük, ha X-nek az F_X eloszlásfüggvénye előállítható a következő alakban:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

45. Mik a sűrűségfüggvény tulajdonságai?

Legyen X az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Ekkor az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy:

1) $f_X(x) \ge 0$,
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.

46. Adja meg az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét!

$X \in U([a,b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

47. Adja meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét!

$X \in U([a,b])$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

48. Mi a binomiális eloszlás módusza?

Eloszlás módusának nevezzük azt a k. tagot, amire p_k a legnagyobb érték, amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz $[(n+1)p]$. (Ha egész, akkor a módusz egyenlő $k=(n+1)p-1$ értékével, így két módusz van.)

49. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a<X<b)=$?

$\mathbf{P}(a<X\le b)=F_X(b+0)-F_X(a+0)$

50. Mi a geometriai eloszlás képlete?

$X\in G(p)$

$p_k=\mathbf{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p=q^{k-1}p$

51. Mi a diszkrét valószínűségi változó definíciója?

Az X valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis $\forall\omega\in\Omega$-ra $X(\omega)\in\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$.

52. Mi az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye?

$X\in E(\lambda)$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

53. Mi az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye?

$X\in E(\lambda)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

54. Folytonos esetben mit jelent az örökifjú tulajdonság?

A tétel szerint $\mathbf{P}(X<x+t\mid X\ge x)=\mathbf{P}(X<x)\ \forall 0<x,t$-re.

X azért „örökifjú”, mert annak feltételes valószínűsége, hogy X legfeljebb $x+t$-ig él(, ha már x-et megélt), egyenlő annak valószínűségével, hogy X legfeljebb t ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és t között ugyanaz a túlélési esély, mint x és $x+t$ között.

55. Fejezze ki F_X eloszlásfüggvénnyel: $\mathbf{P}(a\le X\le b)=$?

$\mathbf{P}(a\le X\le b)=F_X(b+0)-F_X(a)$

56. Mi a Poisson eloszlás képlete?

$X\in Po(\lambda)$

$$p_k=\mathbf{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad\lambda>0$$

57. $\mathbf{P}(X=a)=$?

Folytonos esetben $\forall\mathbf{P}(X=a)=0$.

58. Ha $X\in N(0,1)$, akkor milyen eloszlást követ $aX+b$?

Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x)=ax+b, a\ne 0$, akkor az $Y=t(X)=aX+b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_Y=\begin{cases}F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a>0\\ 1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a<0\end{cases}$$

59. Fejezze ki az $X\in N(m,D)$ eloszlásfüggvényét a standard normális eloszlás-függvénnyel!

$$F_X(x)=\Phi_{m,D}(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$

60. Fejezze ki az $X\in N(m,D)$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűség-függvénnyel!

$$f_X(X)=\varphi_{m,D}(x)=\frac{1}{m}\varphi\left(\frac{x-m}{D}\right)$$